Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Zwanzigster Band.

In vier Heften.

Mit vier Figurentafeln.

Berlin, 1840.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier),
Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des zwanzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite
1.	Sur quelques transformations générales des intégrales définies. Par *E. E. Kummer*, Dr. phil. à Liegnitz en Silésie.	I.	1
2.	Etwas über die Bernoullischen Zahlen.	I.	11
3.	Remarques sur les fractions continues périodiques. Par Mr. *C. Ramus*, prof. des Mathém. à Copenhague. (Extrait d'un mémoire présenté à la société royale des sciences de Copenhague.)	I.	13
5.	Démonstration élémentaire du théorème de Wilson généralisé. Par l'éditeur.	I.	29
6.	Bemerkungen über eine Stelle in Lagrange's Traité de la résolution des équations numériques, article IV. No. 79. Von dem Herrn Prof. *Raabe* zu Zürich.	I.	57
7.	Ueber die Sonderung der Wurzeln einer Gleichung. Von Herrn Dr. *Umpfenbach* zu Giefsen.	I.	60
8.	Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale. Von Herrn Dr. *Gudermann* zu Münster. (Fortsetzung der Abhandlung No. I. im 1sten, No. 10. im 2ten, No. 15. im 3ten, No. 21. im 4ten Hefte des achtzehnten, No. 2. im 1sten, No. 8. im 2ten, No. 12. im 3ten Hefte des neunzehnten Bandes.)	I.	62
12.	Fortsetzung dieser Abhandlung.	II.	103
10.	De transformatione integralis $\iint \frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{\sqrt{(\sin^2\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\psi)}}$. Auctore *Haedenkamp*, Hamm. Guestph.	II.	97
13.	Bemerkung über die Wurzeln der algebraischen Gleichungen. Von Herrn Dr. *Ferd. Minding* zu Berlin.	II.	168
15.	Ueber den Fall, wenn in dem bestimmten Integrale $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ die Function $\varphi(x)$ für einen oder mehrere Werthe von x, welche innerhalb a und b liegen, unendlich grofs oder discontinuirlich wird. Von Herrn *J. L. Raabe* in Zürich.	II.	173
16.	Sur quelques propriétés d'une certaine classe de fonctions transcendantes. Par Mr. *O. J. Broch*, Candidatus philosophiae à Christiania.	II.	178
17.	Mémoire sur différens procédés d'intégration, par lesquels on obtient l'attraction d'un ellipsoïde homogène dont les trois axes sont inégaux, sur un point extérieur. Par Mr. *J. Plana* à Turin.	III.	189
18.	Note sur l'intégrale $\int \frac{dM}{r} = V$, qui exprime la somme des élémens de la masse d'un ellipsoïde, divisés respectivement par leur distance à un point attiré. Par Mr. *J. Plana* à Turin.	III.	271
19.	Addition à la Note de Mr. *Plana*, intitulée „Note, où l'on explique une remarquable objection faite par Euler en 1751 etc."	III.	283

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
22.	Recension der „Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von *Ludwig August Seeber*, Dr. der Philosophie, ordentl. Professor an der Universität in Freiburg. 1831. 248 S. in 4." (Mit Genehmigung des Herrn Verfassers aus den Göttingischen gelehrten Anzeigen vom Jahre 1831, 108tes Stück, abgedruckt.)	IV.	312
23.	Sur la valeur d'une série finie. Par Mr. *Stern* à Göttingue.	IV.	321
27.	Neuer Beweis für die Auflösbarkeit der algebraischen Gleichungen durch reelle oder imaginäre Werthe der Unbekannten. Von Herrn Dr. *F. Deahna* zu Cassel in Hessen.	IV.	337
28.	Ueber die Bedingungen der Integrabitität linearer Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen einer beliebigen Anzahl veränderlicher Gröfsen. Von Herrn Dr. *F. Deahna* zu Cassel in Hessen.	IV.	340
29.	Ueber Primzahlen. Von Herrn Gymnasiallehrer *Märcker* zu Meiningen.	IV.	350

2. Geometrie.

4.	Theorema geometricum ad trianguli rectilinei theoriam pertinens. Scripsit *C. Ramus*, professor matheseos in universitate Hafniensi.	I.	28
9.	Ueber die Fufspunctencurven der Linien zweiten Grades. Von Herrn *Rudolf Wolf* zu Zürich.	I.	88
14.	Ueber einen besondern Fall bei der Abwickelung krummer Flächen. Von Herrn Dr. *Minding* zu Berlin.	II.	171
17.	Mémoires sur différens procédés d'intégration, par lesquels on obtient l'attraction d'un ellipsoïde homogène dont les trois axes sont inégaux, sur un point extérieur. Par Mr. *J. Plana* à Turin.	III.	189
18.	Note sur l'intégrale $\int \frac{dM}{r} = V$, qui exprime la somme des élémens de la masse d'un ellipsoïde, divisés respectivement par leur distance à un point attiré. Par Mr. *J. Plana* à Turin.	III.	271
20.	De curvis et superficiebus secundi ordinis. Auctore Dr. *Ottone Hesse*. Regiom.	IV.	285
24.	Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen. Von Herrn Dr. *Ferd. Minding* zu Berlin.	IV.	323
25.	Auflösung der Aufgaben im im 17. Bande S 389 dieses Journals. Von Her. Dr. *Haedenkamp* zu Hamm.		328
26.	Fragment über die Begründung des Begriffs der Ebene. Von Herrn Professor *Gerling* in Marburg.	IV.	332

3. Mechanik.

17.	Mémoires sur différens procédés d'intégration, par lesquels on obtient l'attraction d'un ellipsoïde homogène dont les trois axes sont inégaux, sur un point extérieur. Par Mr. *J. Plana* à Turin.	III.	189
18.	Note sur l'intégrale $\int \frac{dM}{r} = V$, qui exprime la somme des élémens de la masse d'un ellipsoïde, divisés respectivement par leur distance à un point attiré. Par Mr. *J. Plana* à Turin.	III.	271

II. Anwendung der Mathematik.

11.	Ueber den innern Grund der Erscheinung der Aberration des Lichtes. Von Herrn Freiherrn *v. Forstner*, Königl. Preuss. Hauptmanne zu Berlin.	II.	101

III. Verschiedenes.

21.	Ein früherer Brief *Lagrange's* an *Laplace*.	IV.	309

1.

Sur quelques transformations générales des intégrales définies.

(Par *E. E. Kummer*, Dr. phil. à Liegnitz en Silèsie.)

En m'occupant d'une question concernant le calcul des différentielles à indices quelconques, que Mr. *Liouville* a proposé dans ce journal et dans celui de l'Ecole polytechnique, j'ai trouvé quelques formules générales rélatives à la transformation des intégrales définies, que je vais exposer aux géomètres. Voici la première de ces formules

$$1.\quad \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \varphi(x.2\cos v.e^{vi}).e^{2nvi}.dv = \sin n\pi \int_0^1 (1-u)^{n-1}\varphi(xu)\,du,$$

dans laquelle i désigne la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$, e le nombre dont le logarithme naturel est égal à l'unité et $\varphi(x)$ une fonction arbitraire, soumise à une condition, qui sera énoncée plus bas. Pour la démontrer je me sers du théorème de *Taylor*

$$\varphi(x+\alpha) = \varphi(x) + \frac{\alpha}{1}.\frac{d.\varphi(x)}{dx} + \frac{\alpha^2}{1.2}.\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \dots,$$

je prends $\alpha = -xe^{2vi}$, ce qui donne $x+\alpha = x.2\cos v.e^{vi}$ et par conséquent

$$\varphi(x.2\cos v.e^{vi}) = \varphi(x) - \frac{xe^{2vi}}{1}.\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{x^2e^{4vi}}{1.2}.\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} - \dots$$

Multipliant par $e^{2nvi}dv$ et intégrant entre les limites $v=-\frac{1}{2}\pi$ et $v=+\frac{1}{2}\pi$, on a

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \varphi(x.2\cos v.e^{vi}).e^{2nvi}.dv = \sin n\pi\left(\frac{\varphi(x)}{n} - \frac{x\,d\varphi(x)}{1.(n+1)\,dx} + \frac{x^2\,d^2\varphi(x)}{1.2.(n+2)\,dx^2} - \dots\right).$$

De même, faisant $\alpha = -xw$, on a

$$\varphi(x-xw) = \varphi(x) - \frac{xw}{1}.\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{x^2w^2}{1.2}.\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} - \dots,$$

d'où en multipliant par $w^{n-1}dw$ et intégrant entre les limites $w=0$ et $w=1$, on trouve la même série exprimée par cette autre intégrale

$$\int_0^1 w^{n-1}\varphi(x-xw)\,dw = \frac{\varphi(x)}{n} - \frac{x\,d\varphi(x)}{1.(n+1)\,dx} + \frac{x^2\,d^2\varphi(x)}{1.2.(n+2)\,dx^2} - \dots$$

Les deux expressions de cette série que nous venons de trouver, étant égalées entre elles, donnent l'équation

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \varphi(x.2\cos v.e^{vi}).e^{2nvi}.dv = \sin n\pi \int_0^1 w^{n-1}\varphi(x - xw)\,dw,$$

qui se réduit à la forme proposée par la substitution $\omega = 1 - u$. La démonstration que nous venons de donner est très générale, mais elle suppose que la série par laquelle nous avons exprimé ces deux intégrales, savoir

$$\frac{\varphi(x)}{n} - \frac{x\,d\varphi(x)}{1.(n+1)\,dx} + \frac{x^2\,d^2\varphi(x)}{1.2.(n+2)\,dx^2} - \dots$$

ait une valeur définie, ou qu'elle soit convergente. Si l'on vouloit appliquer cette formule à d'autres fonctions $\varphi(x)$, qui ne satisfont pas à la condition susdite, on pourroit facilement tomber en erreur.

Maintenant ayant démontré la formule générale, nous allons en déduire quelques cas particuliers. Soit par exemple $\varphi(x) = x^m$, nous aurons après avoir chassé les imaginaires et divisé par x^m

$$2. \quad 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (2\cos v)^m \cos(m+2n)v.dv = \sin n\pi \int_0^1 u^m(1-u)^{n-1}\,du.$$

L'une de ces intégrales est bien connue sous le nom d'intégrale Eulerienne de la première espèce; elle s'exprime par les fonctions Γ de la manière suivante:

$$\int_0^1 u^m(1-u)^{n-1}\,du = \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)}$$

de là on aura aussi l'expression en fonctions Gamma de l'autre intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (2\cos v)^m \cos(m+2n)v\,dv = \frac{\sin n\pi\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n+1)},$$

qui s'accorde également avec un résultat connu. Si au contraire on vérifie l'équation (2.) au moyen des expressions connues en fonctions Gamma de ces intégrales, on en pourra déduire une nouvelle démonstration de la transformation générale, au cas où la fonction $\varphi(x)$ soit développabie en série ordonnée suivant les puissances positives de x. En effet, si on développe la fonction $\varphi(x)$ dans les deux membres de l'équation (1.) et qu'on intègre séparement les termes de ces développements, on trouve au moyen de la formule (2.) que les termes correspondans de part et d'autre sont égaux.

Pour donner un autre exemple de la formule générale, prenons $\varphi(x) = \frac{\cos(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$: nous aurons après quelques simples réductions

$$3. \quad \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} e^{-2\sin\frac{1}{2}v.\sqrt{(2x\cos v)}}.\cos\left(2\cos\tfrac{1}{2}v.\sqrt{(2x\cos v)} + (2n-\tfrac{1}{2})v\right)\frac{dv}{\sqrt{(2\cos v)}}$$
$$= \sin n\pi \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{n-1}\cos(2\sqrt{(xu)}).du.$$

Les deux intégrales, dont la rélation est exprimée dans cette équation, sont rémarquables en ce qu'étant développées en séries ordonnées suivant les puissances entières positives de x, elles produisent l'une et l'autre une série connue, car on trouve

$$4.\quad \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} e^{-2\sin\frac{1}{2}v\sqrt{(2x\cos v)}}.\cos\left(2\cos\tfrac{1}{2}v.\sqrt{(2x\cos v)}+(2n-\tfrac{1}{2})v\right)\frac{dv}{\sqrt{(2\cos v)}}$$
$$=\frac{\sin n\pi\,\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\left[1-\frac{x}{1(n+\frac{1}{2})}+\frac{x^2}{1.2.(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}-\dots\right].$$

Voilà la série dont j'ai cherché autrefois la somme dans un mémoire de ce journal Tome XII. page 145, pour exprimer l'intégrale de l'équation de *Riccati* par des intégrales définies. Cette nouvelle expression, quoique un peu plus compliquée, a l'avantage de convenir également à toutes les valeurs positives ou négatives de la quantité n. Si n est un nombre entier positif, cette intégrale est égale à zéro: il faut alors diviser par $\sin n\pi$ et déterminer d'après les règles connues la véritable valeur de la première partie, qui devient $\frac{0}{0}$. Faisant $n=0$, $x=\frac{z^2}{4}$, on trouve la valeurs très simple de l'intégrale

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} e^{-z\sin\frac{1}{2}v\sqrt{(2\cos v)}}.\cos\left(z\cos\tfrac{1}{2}v.\sqrt{(2\cos v)}-\tfrac{1}{2}v\right)\frac{dv}{\sqrt{(2\cos v)}}=\pi\cos z.$$

Considérons encore le cas particulier de la formule générale, qu'on obtient en prenant $\varphi(x)=x^m.e^{-\frac{1}{x}}$. Après avoir fait disparaître les imaginaires, on a dans ce cas

$$2e^{-\frac{1}{2x}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(2\cos v)^m\cos\left(\frac{\operatorname{tang} v}{x}+(m+2n)v\right)dv$$
$$=\sin n\pi\int_0^1 u^m(1-u)^{n-1}.e^{-\frac{1}{xu}}du.$$

Faisant $u=\frac{1}{1+z}$, $m=\beta-1$, $n=\alpha-\beta$ et changeant x en $\frac{1}{x}$, on ramenera cette formule à la forme plus commode

$$5.\quad 2e^{\frac{1}{2}x}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(2\cos v)^{\alpha-\beta-1}(\tfrac{1}{2}x\operatorname{tang} v+(\alpha+\beta-1)v)\,dv$$
$$=\sin\beta\pi\int_0^{\infty}\frac{z^{\beta-1}.e^{-xz}\,dz}{(1+z)^{\alpha}}.$$

C'est la même rélation que j'ai trouvée par une méthode très différente dans un mémoire de ce journal (T. 17. p. 286), ayant pour titre: „De integralibus quibusdam definitis et seriebus infinitis." On y trouve aussi les

développements en séries infinies, et plusieurs cas particuliers de ces intégrales.

Examinons maintenant le cas de la formule (1.) ou $n = k$ est un nombre entier positif. Dans ce cas le facteur $\sin k\pi$ de l'intégrale $\int_0^1 (1-u)^{k-1}\varphi(xu)\,du$ est égal à zéro, et par conséquent toutes les fois que cette intégrale a une valeur finie, on aura

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \varphi(x.2\cos v.e^{vi}).e^{2kvi}.dv = 0,$$

k étant un nombre entier positif. Alors divisant l'équation (1.) par $\sin n\pi$, et déterminant la valeur de la première partie, qui devient $\frac{0}{0}$ pour $n = k =$ un entier positif, on obtient

$$6. \quad \frac{2i\cos k\pi}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \varphi(x.2\cos v.e^{vi})\,e^{2kvi}.v.dv = \int_0^1 (1-u)^{k-1}\varphi(xu)\,du.$$

L'intégrale $\int_0^1 (1-u)^{k-1}\varphi(xu)\,du$ sert, comme on sait, à exprimer les intégrations répétées d'une fonction quelconque $\varphi(x)$, par une intégrale définie; on pourra donc pour cela, quand on le jugera convenable, se servir aussi de l'intégrale transformée, contenue dans l'equation (6.). Le cas ou l'on a $k = 1$ mérite une attention particulière. Dans ce cas on a

$$7. \quad \frac{2}{i\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \varphi(x.2\cos v.e^{vi})\,e^{2vi}.v.dv = \int_0^1 \varphi(xu)\,du.$$

Voilà une nouvelle formule de transformation, aussi générale que la formule (1.); la fonction $\varphi(x)$ est également soumise à la seule condition, que la série

$$\frac{\varphi(x)}{n} - \frac{x\,d\varphi(x)}{1.(n+1)\,dx} + \frac{x^2 d^2\varphi(x)}{1.2.(n+2)\,dx^2} - \dots$$

soit convergente. Pour en donner un exemple, cherchons la transformation de l'intégrale connue

$$y = \int_z^\infty \frac{e^{-z}dz}{z}.$$

Si l'on change z en $\frac{z}{u}$, en considérant u comme variable, on trouve

$$y = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{z}{u}}du}{u}.$$

Prenant donc $x = 1$ et $\varphi(u) = \frac{e^{-\frac{z}{u}}}{u}$ on aura d'après l'équation (7.):

$$y = \frac{2}{i\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{e^{-\frac{xe^{-vi}}{2\cos v}}.e^{vi}.v.dv}{2\cos v},$$

qu'on peut présenter sous la forme réelle

$$8. \quad \int_x^{\infty} \frac{e^{-z}dz}{z} = \frac{2.e^{-\frac{1}{2}x}}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(\frac{1}{2}x\tang v + v).v.dv}{\cos v}.$$

Nous aurons un autre exemple très simple en prenant $\varphi(x) = x^{n-1}$. Dans ce cas l'équation (7.) donne

$$\frac{2}{i\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} (2\cos v)^{n-1}.e^{(n+1)vi}.v.dv = \frac{1}{n},$$

et de là, faisant disparaître les imaginaires, on tire

$$9. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (2\cos v)^{n-1}\sin(n+1)v.v.dv = \frac{\pi}{4n}.$$

Ce résultat est un cas particulier de l'intégrale plus générale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (2\cos v)^{n-1}.\sin mv.v.dv = \frac{\pi\Gamma(n)\left(Z\left(\frac{n+m+1}{2}\right) - Z\left(\frac{n-m+1}{2}\right)\right)}{4\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{n-m+1}{2}\right)},$$

où $Z(a)$ désigne la fonction connue $\frac{d.l\Gamma(a)}{da}$, et cette formule se déduit de la suivante

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (2\cos v)^{n-1}\cos mv.dv = \frac{\pi\Gamma(n)}{2\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-m+1}{2}\right)}$$

au moyen d'une simple différentiation par rapport à la quantité m.

Les deux formules générales peuvent être représentées sous plusieurs formes différentes, qu'on obtient par les transformations des intégrales. Si on prend $\psi(z-x)$ au lieu de $\varphi(x)$ on aura

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \psi(z-x.2\cos v.e^{vi})\,e^{2nvi}.dv = \sin n\pi.\int_0^1 (1-u)^{n-1}\psi(z-xu)\,du$$

et

$$\frac{2}{i\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \psi(z-x.2\cos v.e^{vi})\,e^{2vi}.v.dv = \int_0^1 \psi(z-xu)\,du$$

sous condition, que la série $\frac{\psi(z-x)}{n} + \frac{x\,d\psi(z-x)}{1.(n+1)dx} + \frac{x^2\,d^2\psi(z-x)}{1.2.(n+2)dx^2} + \dots$ soit convergente. Donc en faisant $z = x$ et $1-u = w$ on aura

$$10. \quad \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \psi(-xe^{2vi}).e^{2nvi}.dv = \sin n\pi.\int_0^1 w^{n-1}\psi(x.w)\,dw$$

et

$$11. \quad \frac{2}{i\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \psi(-x.e^{2vi})\, e^{2vi}.v.dv = \int_0^1 \psi(xw)\, dw$$

sous condition, que $\frac{\psi(0)}{n} + \frac{x\, d\psi(0)}{1.(n+1)dx} + \frac{x^2 d^2 \psi(0)}{1.2.(n+2)dx^2} + \dots$ soit une série convergente, ou, ce qui est la même chose, que la fonction $\psi(x)$ soit développable en série ordonnée suivant les puissances entières positives de x.

Prenant $\varphi(x) = x^{m-1}\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ et changeant $\frac{1}{x}$ en x on aura cette autre forme des formules (1.) et (7.):

$$12. \quad \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} (2\cos v)^{m-1}.e^{(2n+m-1)vi}.\psi\left(\frac{x.e^{-vi}}{2\cos v}\right) dv$$
$$= \sin n\pi \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\psi\left(\frac{x}{u}\right) du,$$

$$13. \quad \frac{2}{i\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} (2\cos v)^{m-1}.e^{(m+1)vi}.\psi\left(\frac{x.e^{-vi}}{2\cos v}\right) dv = \int_0^1 u^{m-1}\,\psi\left(\frac{x}{u}\right) du$$

sous condition que la série

$$\frac{x^{-m+1}\psi(x)}{n} - \frac{x\, d(x^{-m+1}\psi x)}{1.(n+1)\, d\frac{1}{x}} + \frac{x^2 d^2 (x^{-m+1}\psi x)}{1.2.(n+2)\left(d\frac{1}{x}\right)^2} - \dots$$

soit convergente.

Les intégrales contenues dans l'équation (12.) méritent une attention particulière à l'égard du calcul des différentielles à indices quelconques, puisque dans le cas $n = -m$ elles servent à exprimer par des intégrales définies ce nouveau genre des intégrales et des différentielles. Car en adoptant la définition de ces différentielles, que Mr. *Liouville* a donné dans le journal de l'Ecole polytechnique cah. XXI. page 3 et 72, on a

$$14. \quad \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\psi\left(\frac{x}{u}\right) du = (-1)^n x^{-n}\,\Gamma(n)\int_0^{(n)} \psi(x)\, dx^n$$

et

$$15. \quad \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} (2\cos v)^{m-1}.e^{-(m+1)vi}\,\psi\left(\frac{x.e^{-vi}}{2\cos v}\right) dv = \frac{(-1)^m x^m \pi}{\Gamma(m+1)}.\frac{d^m\psi(x)}{dx^m}.$$

La première de ces formules est la même que Mr. *Liouville* a trouvée et démontrée Tome XII. page 273 de ce journal. Elle suppose que n soit positif et par conséquent elle ne peut s'appliquer qu'aux intégrales à indices positifs. Pour démontrer la seconde, partons de la formule connue

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos v^{m-1} \cos(x \tang v - (m+1)v)\, dv = \frac{\pi.x^m.e^{-x}}{\Gamma(m+1)},$$

qui peut être présentée sous la forme

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}(2\cos v)^{m-1}.e^{-(m+1)vi}.e^{\frac{xe^{-vi}}{2\cos v}}.dv=\frac{\pi.x^m.e^{-x}}{\Gamma(m+1)}$$

et qui a lieu sous condition que x et $m+1$ soient positifs. Si on change x en hx (h étant positif) et qu'après avoir multiplié par le coëfficient A_h on prenne de part et d'autre la somme rélative aux valeurs différentes de h, on aura

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}(2\cos v)^{m-1}.e^{-(m+1)vi}\Sigma A_h e^{-\frac{hxe^{-vi}}{2\cos v}}.dv=\frac{\pi x^m}{\Gamma(m+1)}\Sigma A_h e^{-hx}.h^m.$$

Maintenant, si l'on fait $\Sigma A_h e^{-hx}=\psi(x)$, on a d'après la définition de Mr. *Liouville* $(-1)^m\Sigma A_h e^{-hx}.h^m=\frac{d^m\psi(x)}{dx^m}$, et de là

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}(2\cos v)^{m-1}.e^{-(m+1)vi}\psi\left(\frac{x.e^{-vi}}{2\cos v}\right)dv=\frac{(-1)^m x^m.\pi}{\Gamma(m+1)}.\frac{d^m\psi(x)}{dx^m}$$

sous condition que dans le développement exponentiel de la fonction $\psi(x)$ tous les exposants soient négatifs et que $m+1$ et x soient positifs. Nous observons encore que faisant $\tang v=\frac{t}{x}$ on aura cette autre forme de l'équation (15.):

$$15.\quad\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi\left(\frac{x-ti}{2}\right)dt}{\left(\frac{x+ti}{2}\right)^{m+1}}=\frac{2(-1)^m\pi.d^m\psi(x)}{\Gamma(m+1)dx^m}.$$

La même méthode dont nous avons fait usage pour démontrer la formule (1.) servira aussi à trouver une nouvelle formule semblable. Pour cela je développe d'après le théorème de *Taylor* la fonction

$$\varphi(x+\alpha)=\varphi(x)+\frac{\alpha}{1}.\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{\alpha^2}{1.2}.\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+\ldots.;$$

je prends $\alpha=xi\sin v.e^{vi}$, ce qui donne $x+\alpha=x\cos v.e^{vi}$, et par conséquent

$$\varphi(x\cos v.e^{vi})=\varphi(x)+\frac{ix\sin v.e^{vi}d\varphi(x)}{1.dx}+\frac{i^2x^2\sin^2 v.e^{2vi}d^2\varphi(x)}{1.2.dx^2}+\ldots.$$

Si l'on multiplie cette équation par $(\sin v)^{n-1}e^{(n+1)vi}dv$, et qu'on prenne de part et d'autre l'intégrale depuis $v=0$ jusqu'à $v=\frac{1}{2}\pi$, on aura cette série:

$$16.\quad\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{n-1}v.e^{(n+1)vi}\varphi(x\cos v.e^{vi})dv$$

$$=\varphi(x)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{n-1}v.e^{(n+1)vi}dv+\frac{ix.d\varphi(x)}{1.dx}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{n-1}v.e^{(n+2)vi}dv+\ldots.,$$

dont le terme général est

$$\frac{i^k x^k \, d\varphi(x)}{1.2.3\ldots.k.dx^k}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n+k-1} v . e^{(n+k+1)vi} . dv.$$

Effectuant l'intégration au moyen de la formule facile à démontrer

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{m-1} v . e^{(m+1)vi} \, dv = \frac{1}{m} e^{\frac{m\pi i}{2}},$$

et observant qu'on a $i^k = e^{\frac{k\pi i}{2}}$, on trouve que ce terme général se réduit à

$$\frac{(-1)^k e^{\frac{n\pi i}{2}} . x^k d^k \varphi(x)}{1.2.3\ldots.k\,(n+k)\,dx^k}.$$

Par là l'équation (16.) prend la forme

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-1} v . e^{(n+1)vi} . \varphi(x . \cos v . e^{vi}) \, dv$$

$$= e^{\frac{n\pi i}{2}} \left(\frac{\varphi(x)}{n} - \frac{x \, d\varphi(x)}{1.(n+1)\,dx} + \frac{x^2 \, d^2\varphi(x)}{1.2.(n+2)\,dx^2} - \ldots . \right).$$

Mais ayant déjà trouvé la même série exprimée par cette autre intégrale

$$\int_0^1 (1-u)^{n-1} \varphi(xu) \, du = \frac{\varphi(x)}{n} - \frac{x \, d\varphi(x)}{1.(n+1)} + \frac{x^2 \, d^2\varphi(x)}{1.2.(n+2)} - \ldots . ,$$

en égalant ces deux expressions de la série, nous aurons la nouvelle formule générale

$$17. \quad e^{-\frac{n\pi i}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-1} v . e^{(n+1)vi} \varphi(x \cos v . e^{vi}) \, dv = \int_0^1 (1-u)^{n-1} \varphi(xu) \, du,$$

qui sera également soumise à la condition, que la série

$$\frac{\varphi(x)}{n} - \frac{x \, d\varphi(x)}{1.(n+1)} + \frac{x^2 \, d^2\varphi(x)}{1.2.(n+2)} - \ldots .$$

soit convergente. Combinant ce résultat avec l'équation (1.), nous aurons

$$18. \quad \sin n\pi . e^{-\frac{n\pi i}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-1} v . e^{(n+1)vi} \varphi(x \cos v e^{vi}) \, dv$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \varphi(x . 2 \cos v e^{vi}) \, e^{2nvi} . dv$$

et faisant $n = 1$ dans l'équation (17.), puis comparant avec la formule (7.), nous aurons aussi

$$19. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(x . \cos v . e^{vi}) e^{2vi} . dv = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \varphi(x . 2 \cos v . e^{vi}) \, e^{2vi} . v . dv.$$

Pour faire voir l'usage de ces formules nous en donnerons quelques exemples.

Soit $\varphi(x) = x^{m-1}$, on aura par la formule (17.)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-1} v.\cos^{m-1} v.e^{(m+n)vi}.dv = e^{\frac{n\pi i}{2}}\int_0^1 (1-u)^{n-1}.u^{m-1}du,$$

d'où en séparant la partie réelle de la partie imaginaire et en substituant au lieu de l'intégrale connue à droite sa valeur exprimée en fonctions Gamma, on trouve

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-1} v.\cos^{m-1} v.\cos(m+n)v.dv = \frac{\cos\frac{n\pi}{2}\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{n-1} v.\sin^{m-1} v.\sin(m+n)v.dv = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)},$$

Voilà les mêmes résultats, que j'ai trouvés par une autre méthode dans un mémoire intitulé „De intégralibus definitis et seriebus infinitis" inséré dans ce journal (T. XVII. p. 215). Remarquons encore que prennant $n=1$, on a le cas le plus simple de formules suivantes:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{m-1} v.\cos(m+1)v.dv = 0,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{m-1} v.\sin(m+1)v.dv = \frac{1}{m}.$$

Pour donner une seconde application de la formule (17.) posons $\varphi(x) = x^{m-1}.e^{-\frac{1}{x}}$, nous aurons

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-1} v.\cos^{m-1} v.e^{(m+n)vi}.e^{-\frac{e^{-vi}}{x.\cos v}}.dv = e^{\frac{n\pi i}{2}}\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}.e^{-\frac{1}{xu}}.du,$$

d'où l'on tire sans difficulté ces deux équations dégagées des imaginaires

$$e^{-\frac{1}{x}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-1} v.\cos^{m-1} v.\cos\left(\frac{1}{x}\operatorname{tang} v + (m+n)v\right)dv$$

$$= \cos\frac{n\pi}{2}\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}.e^{-\frac{1}{xu}}.du,$$

$$e^{-\frac{1}{x}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-1} v.\cos^{m-1} v.\sin\left(\frac{1}{x}\operatorname{tang} v + (m+n)v\right)dv$$

$$= \sin\frac{n\pi}{2}\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}.e^{-\frac{1}{xu}}.du.$$

Changeant $\frac{1}{x}$ en x, m en $m-n$ et faisant $u = \frac{1}{1+z}$, on peut présenter ces deux équations de la manière suivante

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-1} v . \cos^{m-n-1} v . \cos(x \tang v + m v)\, dv = \cos\frac{n\pi}{2}\int_0^{\infty} \frac{z^{n-1}\, e^{-xz} . dz}{(1+z)^m},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-1} v . \cos^{m-n-1} v . \sin(x \tang v + m v)\, dv = \sin\frac{n\pi}{2}\int_0^{\infty} \frac{z^{n-1}\, e^{-xz}\, dz}{(1+z)^m},$$

ce qui s'accorde aussi avec les résultats du mémoire cité.

En général l'équation (17.) donne toujours deux résultats en même temps, puisque la partie réelle de l'intégrale à gauche doit être égale à l'intégrale réelle à droite, et la partie imaginaire doit être égale à zéro. Transportant le facteur $e^{\frac{n\pi i}{2}}$ à l'autre partie et égalant les parties réelles et les parties imaginaires on aura

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-1} v \left(\frac{e^{(n+1)vi}\varphi(x\cos v . e^{vi}) + e^{-(n+1)vi}\varphi(x\cos v . e^{-vi})}{2}\right) dv$$
$$= \cos\frac{n\pi}{2}\int_0^1 (1-u)^{n-1}\, \Phi(xu)\, du,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-1} v \left(\frac{e^{(n+1)vi}\varphi(x\cos v . e^{vi}) - e^{(n+1)vi}\varphi(x\cos v . e^{-vi})}{2i}\right) dv$$
$$= \sin\frac{n\pi}{2}\int_0^1 (1-u)^{n-1}\, \Phi(xu)\, du.$$

Considérons le cas particulier de cette dernière formule où l'on a $n=0$. Dans ce cas la partie à droite devient $0.\infty$; mais on trouve sans difficulté que la véritable valeur de cette expression est égale à $\frac{1}{2}\pi\,\Phi(x)$, et de là on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{e^{vi}\varphi(x\cos v . e^{vi}) - e^{vi}\varphi(x\cos v\; e^{-vi})}{2i\sin v}\, dv = \tfrac{1}{2}\pi\,\Phi(x),$$

ou en réunissant les deux parties de cette intégrale:

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\frac{1}{2}\pi} \frac{e^{vi}\varphi(x\cos v . e^{vi})\, dv}{\sin v} = \Phi(x).$$

Si l'on fait $\Phi(x) = x^{n-1} . e^{-\frac{m}{x}} . \psi(x)$, les quantités m et n étant positives, on pourra donner à cette équation une forme qui parait être plus générale à cause de deux quantités arbitraires qui entrent dans l'intégrale, car on a par la substitution indiquée

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \cos^{n-1} v . e^{\left(nv + \frac{m}{x}\tang v\right)i} . \psi(x\cos v . e^{vi})\frac{dv}{\sin v} = \psi(x)$$

et de là, prenant $\psi(x)=1$, $x=1$, on obtient l'intégrale rémarquable

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^{n-1} v\, \sin(m \tang v + nv)\, dv}{\sin v} = \tfrac{1}{2}\pi,$$

que j'ai trouvé également dans le mémoire cité.

2.

Etwas über die Bernoullischen Zahlen.

Die *Bernoulli*schen Zahlen kehren bei so vielen Entwickelungen wieder, dafs es vielleicht nicht ganz nutzlos sein dürfte, dieselben weiter berechnet zu haben. Die ersten 15 derselben findet man in Eulers *Instit. Calculi diff. P. II. Cap. V.* Die folgenden 10 hat Professor Rothe zu Erlangen berechnet und in der allgemeinen Litteratur-Zeitung (zu Halle) Nro. 63. März 1817, abdrucken lassen. Endlich hat Rothe mir auch noch die letztern 6 (also bis zur 31[sten] inclusive) mitgetheilt, mit dem Auftrage, solche der Redaction des Journals für Mathematik zur Aufnahme zuzusenden. Indem ich dieses thue, stelle ich jedoch zur Bequemlichkeit der davon Gebrauch machenden alle 31 bis jetzt berechneten Bernoullischen Zahlen zusammen. — Werden solche nämlich der Reihe nach durch $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$, etc. etc. bezeichnet, so sind sie, wie folgt:

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{1}{6}; \qquad \mathfrak{B}_9 = \frac{43867}{798};$$

$$\mathfrak{B}_2 = \frac{1}{30}; \qquad \mathfrak{B}_{10} = \frac{174611}{330} = \frac{283.617}{330};$$

$$\mathfrak{B}_3 = \frac{1}{42}; \qquad \mathfrak{B}_{11} = \frac{854513}{138} = \frac{11.131.593}{2.3.23};$$

$$\mathfrak{B}_4 = \frac{1}{30}; \qquad \mathfrak{B}_{12} = \frac{236364091}{2730};$$

$$\mathfrak{B}_5 = \frac{5}{66}; \qquad \mathfrak{B}_{13} = \frac{8553103}{6} = \frac{13.657931}{6};$$

$$\mathfrak{B} = \frac{691}{2730}; \qquad \mathfrak{B}_{14} = \frac{23749461029}{870};$$

$$\mathfrak{B}_7 = \frac{7}{6}; \qquad \mathfrak{B}_{15} = \frac{8615841276005}{14322}.$$

$$\mathfrak{B}_8 = \frac{3617}{510};$$

So weit die von Euler berechneten. Nun folgen die von Rothe bestimmten, nämlich:

$$\mathfrak{B}_{16} = \frac{7709321041217}{2.3.5\ 17};$$

$$\mathfrak{B}_{17} = \frac{2577687858367}{6} = \frac{17.151628697551}{2.3};$$

$$\mathfrak{B}_{18} = \frac{2631527155305347737 3}{2.3.5.7.13.19.37};$$

$$\mathfrak{B}_{19} = \frac{2929993913841559}{6} = \frac{19.154210205991661}{2.3};$$

$$\mathfrak{B}_{20} = \frac{261082718496449122051}{2.3.5.11.41};$$

$$\mathfrak{B}_{21} = \frac{1520097643918070802691}{2.3.7.43};$$

$$\mathfrak{B}_{22} = \frac{27833269579301024235023}{2.3.5.23};$$

$$\mathfrak{B}_{23} = \frac{596451111593912163277961}{2.3.47};$$

$$\mathfrak{B}_{24} = \frac{5609403368997817686249127547}{2.3.5.7.13.17};$$

$$\mathfrak{B}_{25} = \frac{495057205241079648212477525}{2.3.11},$$

$$\mathfrak{B}_{26} = \frac{13.6162813216426845825753269168 1}{2.3.5.53};$$

$$\mathfrak{B}_{27} = \frac{29149963634884862421418123812691}{2.3.7.19};$$

$$\mathfrak{B}_{28} = \frac{7.3541989899018895362407736770947 47}{2.3.5.29};$$

$$\mathfrak{B}_{29} = \frac{29.29132280465131048917947164135874 49}{2.3.59};$$

$$\mathfrak{B}_{30} = \frac{1215233140483755572040304994079820246041491}{2.3.5.7.11.13.31.61};$$

$$\mathfrak{B}_{31} = \frac{31.3967930785189309207081625760452705 21}{2.3};$$

u. s. w. f.

Endlich mag bei dieser Gelegenheit auch noch ein Rechnungsfehler in Erinnerung gebracht werden, der in Eulers *Instit. Calculi diff. P. II. Cap. VIII.* vorkommt. Setzt man nämlich nach Euler:

$$\sec x = \alpha + \frac{\beta x^2}{2!} + \frac{\gamma x^4}{4!} + \frac{\delta x^6}{6!} + \frac{\varepsilon x^8}{8!} + \ldots\ldots,$$

so ist der 10[te] dieser Coefficienten α, β, γ, δ, ε etc. etc. nicht, wie Euler angiebt, $= 2404879661671$, sondern (nach Rothe) $= 2404879675441$.

Berlin, den 15. July 1839.

M. Ohm.

3.

Remarques sur les fractions continues périodiques.

(Par Mr. *C. Ramus*, prof. des mathém. à Copenhague.)[1]

(Extrait d'un mémoire présenté à la société royale des sciences de Copenhague.)

---

§. 1.

Soient $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots.$ les termes positifs et entiers d'une fraction continue de la forme ordinaire, a_0 étant le nombre inférieur le plus approché de la valeur x de cette même fraction, ce que nous indiquons en écrivant

$$x = a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots.$$

La fraction est périodique, quand elle satisfait à la condition

$$a_{n+\mu t+\theta} = a_{n+\theta}$$

pour toutes les valeurs positives et entières de μ et θ, et la période, en commençant par a_{n+1}, contient un nombre de termes égal à t, ce qui d'après la notation de Mr. *le Besgue* (voy. le Bulletin des sciences publié par *Férussac*, 1re Sect. 1831, Mars) est clairement indiqué de la manière suivante:

$$1. \quad x = a_0, a_1, a_2, \ldots. a_n(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots. a_{n+t}).$$

La période peut aussi commencer par a_0, ce qui la rend *parfaitement périodique,* savoir

$$2. \quad u = (a_0, a_1, a_2, \ldots. a_{t-1}).$$

Désignons par $\frac{y_r}{z_r}$ la fraction convergente à indice r de cette dernière quantité u $\left(\text{la première convergente étant } \frac{y_0}{z_0} = \frac{a_0}{1}\right)$, et nous aurons, comme on sait,

$$3. \quad z_{t-1}u^2 - (y_{t-1} - z_{t-2})u - y_{t-2} = 0.$$

Cette équation a deux racines, dont l'une est positive et donnée par la formule (2.); l'autre est négative $= -u_1$ et admet un développement analogue. En effet, si l'on considère ces deux égalités:

$$\frac{z_{t-1}}{z_{t-2}} = a_{t-1}, a_{t-2}, a_{t-3}, \ldots. a_1,$$

$$\frac{y^{t-1}}{y_{t-2}} = a_{t-1}, a_{t-2}, a_{t-3}, \ldots. a_0,$$

fondées sur la propriété connue des fractions continues renversées, et qu'on pose

$$4.\quad v = (a_{t-1},\ a_{t-2},\ a_{t-3},\ \ldots.\ a_0),$$

on voit que l'équation en v se formera d'après celle en u (3) par le seul changement des quantités $\frac{y_{t-1}}{z_{t-2}}$ et $\frac{y_{t-2}}{z_{t-2}}$, qui devront être remplacées par ces autres respectivement $\frac{y_{t-1}}{y_{t-2}}$ et $\frac{z_{t-1}}{z_{t-2}}$. Ainsi on trouve:

$$5.\quad y_{t-2}v^2 - (y_{t-1} - z_{t-2})v - z_{t-1} = 0.$$

Cette équation donne des racines liées à celles de l'équation (3.) par la relation $v = \frac{z_{t-1}}{y_{t-2}}u$, puisque, en opérant cette substitution dans (5.), on retombe sur (3.); mais d'un autre côté on a $uu_1 = \frac{y_{t-2}}{z_{t-1}}$; d'où il résulte $uu_1 = \frac{u}{v}$ ou suivant (4.)

$$6.\quad -u_1 = -0(a_{t-1},\ a_{t-2},\ a_{t-3},\ \ldots.\ a_0).$$

Cette analogie remarquable des fractions continues résultantes du développement des deux racines d'une même équation du second degré n'a pas échappé aux géomètres, mais il parait qu'on l'a fondée sur d'autres considérations plus compliquées. Nous y reviendrons plus tard.

§. 2.

Il est intéressant de connaître la nature propre à la fraction continue (2.) dans le cas, où sa valeur se reduit à une simple quantité irrationelle, cela veut dire à la racine carrée d'une quantité rationelle, sans addition ni soustraction d'aucune quantité purement rationelle. C'est ce qui s'obtient en égalant à zéro le coëfficient de u dans l'équation (3.), ou en posant $y_{t-1} = z_{t-2}$. Il est facile d'en conclure 1°. que $u < 1$ ou $a_0 = 0$. 2°. d'après un théorème connu, que les termes

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots.\ a_{t-1}$$

forment une suite symétrique (voy. la Théorie des nombres T. I. pag. 27).

Cependant il faut observer que le terme $a_0 = 0$ se repète une infinité de fois dans la fraction continue, ce qui exige une légère modification de sa forme, que voici

$$\ldots.\ a_{t-1},\ a_{t-1},\ 0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots. = \ldots.\ a_{t-2},\ a_{t-1} + a_1,\ a_2,\ \ldots.$$

ou bien à cause de la symétrie ci-dessus remarquée

$$\ldots.\ a_2,\ a_1,\ 0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots. = \ldots.\ a_2,\ 2a_1,\ a_2,\ \ldots.$$

Or l'équation (3.) donne $u = \sqrt{\frac{y_{t-2}}{z_{t-1}}}$. On aura donc

$$7. \quad \begin{cases} \sqrt{\frac{y_{t-2}}{z_{t-1}}} = 0,\ a_1(a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_3,\ a_2,\ 2a_1), \\ \frac{y_{t-1}}{z_{t-1}} = 0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_3,\ a_2,\ a_1, \\ \frac{y_{t-2}}{z_{t-2}} = 0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_3,\ a_2. \end{cases}$$

Mais on peut présenter ce résultat sous une forme plus commode, que voici:

$$8. \quad \begin{cases} a_0(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_3,\ a_2,\ a_1,\ 2a_0) = \sqrt{\frac{p}{q^0}}, \\ \frac{p}{q} = a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_3,\ a_2,\ a_1,\ a_0, \\ \frac{p^0}{q^0} = a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_3,\ a_2,\ a_1. \end{cases}$$

Ajoutons y, que $pq^0 - p^0q = \pm 1$ et $q = p^0$, et soit posé $\frac{p}{q^0} = C$. Nous en tirons

$$9. \quad p^{0^2} - Cq^{0^2} = \mp 1,$$

formule connue et d'une grande importance dans l'analyse indéterminée.

§. 3.

La valeur x de la fraction continue périodique de la forme générale (1.) dépend aussi, comme on le sait, de la résolution d'une équation du second degré. En effet, si x_{n+1} désigne le quotient complèt de x à indice $n+1$, en sorte que

$$x_{n+1} = (\dot{a}_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots\ a_{n+t}),$$

on aura suivant (3.)

$$10. \quad \beta x_{n+1}^2 - (\alpha - \beta^0)\, x_{n+1} - \alpha^0 = 0,$$

α, β, α^0, β^0 étant donnés par les formules qui suivent:

$$11. \quad \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} = a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots\ a_{n+t}, \\ \frac{\alpha^0}{\beta^0} = a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots\ a_{n+t-1}. \end{cases}$$

De plus, si l'on élimine x_{n+1} de (10.) moyennant la relation connue

$$12. \quad x = \frac{y_n x_{n+1} + y_{n-1}}{z_n x_{n+1} + z_{n-1}},$$

on trouve l'équation qu'on cherche. Elle peut s'écrire comme suit:

$$13. \quad \beta(z_{n-1}x - y_{n-1})^2 - \alpha^0(y_n - z_n x)^2 - (\alpha - \beta^0)(z_{n-1}x - y_{n-1})(y_n - z_n x) = 0.$$

On peut demander si cette équation, outre les cas présentés dans les formules (7.) et (8.) peut en offrir d'autres, où la valeur x de la fraction continue soit une simple irrationelle de la forme $\sqrt{C}$. Pour y répondre, nous égalons à zéro le coëfficient de x dans l'équation (13.) en faisant:

$$\left.\begin{array}{l} y_n z_n \beta^0\left(\frac{\alpha^0}{\beta^0}+\frac{z_{n-1}}{z_n}\right)-y_{n-1} z_n \beta\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{z_{n-1}}{z_n}\right) \\ +y_n z_n \beta^0\left(\frac{\alpha^0}{\beta^0}+\frac{y_{n-1}}{y_n}\right)-y_n z_{n-1} \beta\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{y_{n-1}}{y_n}\right) \end{array}\right\}=0.$$

Comme il est permis de renfermer plusieurs périodes dans une seule, en substituant μt à t, ce qui ne change en rien x_{n+1}, et qu'on peut même faire μ infiniment grand, ce qui fait coïncider $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha^0}{\beta^0}$ et x_{n+1}, nous pouvons aussi exprimer la condition demandée ainsi qu'il suit:

$$\left.\begin{array}{l} y_{n-1} z_n \beta^0\left(x_{n+1}+\frac{z_{n-1}}{z_n}\right)\left(\frac{y_n}{y_{n-1}}-\frac{\beta}{\beta^0}\right) \\ +y_n z_{n-1} \beta^0\left(x_{n+1}+\frac{y_{n-1}}{y_n}\right)\left(\frac{z_n}{z_{n-1}}-\frac{\beta}{\beta^0}\right) \end{array}\right\}=0.$$

Cette équation ne peut évidemment pas subsister, à moins que la fraction $\frac{\beta}{\beta^0}$ soit comprise entre $\frac{y_n}{y_{n-1}}$ et $\frac{z_n}{z_{n-1}}$. Mais d'après la théorie connue des fractions continues renversées on a

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \ldots.\ a_0,$$

$$\frac{z_n}{z_{n-1}} = a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \ldots.\ a_1,$$

$$\frac{\beta}{\beta^0} = (a_{n+t},\ a_{n+t-1},\ a_{n+t-2},\ \ldots.\ a_{n+1}).$$

Il faut en conclure:

$$a_{n+t} = a_n,\quad a_{n+t-1} = a_{n-1},\quad a_{n+t-2} = a_{n-2},\ \ldots.$$

Ainsi la période doit commencer par a_1, ou en d'autres termes: x doit être de la forme $a+\frac{1}{u}$, a étant un nombre positif entier ou zéro et u étant donné par les formules (2.) et (3.). Par conséquent $u=\frac{1}{x-a}$, ce qui étant substitué dans (3.) donne

$$z_{t-1}-(y_{t-1}-z_{t-2})(x-a)-y_{t-2}(x-a)^2 = 0,$$

$\frac{y_r}{z_r}$ ayant la signification qui lui a été assignée dans le 1er §. Or, il est clair que la valeur de x ne peut être de la forme $\sqrt{C}$ que sous la condition suivante

$$2a + \frac{z_{t-2}}{y_{t-2}} = \frac{y_{t-1}}{y_{t-2}}$$

ou, ce qui revient au même,

$$2a,\ a_0,\ a_1,\ a_2 \ldots\ldots a_{t-2} = a_{t-1},\ a_{t-2},\ a_{t-3} \ldots\ldots a_0.$$

Il en suivrait:

$$a_{t-1} = 2a,\ a_{t-2} = a_0,\ a_{t-3} = a_1,\ \ldots\ldots$$

ce qui est précisément le cas considéré ci-dessus (8.). On aurait pu faire $a = 0$ ou $x < 1$, mais on retomberait alors dans les formules (7.).

Donc il est démontré, que ces mêmes formules (7.) et (8.) présentent les seuls cas possibles où la valeur d'une fraction continue périodique puisse être de la forme $\sqrt{C}$, C étant rationel, (7.) ayant lieu pour $C < 1$, (8.) pour $C > 1$.

§. 4.

Si l'on propose une équation du second degré à coëfficiens entiers A, B, C:

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

et qu'on désigne par x et x' ses racines, qui sont supposées reelles, on trouve

$$14.\quad x = \frac{-B + \sqrt{E}}{2A},\qquad x' = \frac{-B - \sqrt{E}}{2A},\qquad E = B^2 - 4AC.$$

Si ces racines étaient négatives toutes les deux, on substituerait $-x$ à x dans l'équation proposée, et l'on aurait une équation transformée à deux racines positives; on peut donc considérer comme positive au moins une des racines. Il en résulte, A étant supposé positif, que x est positif, mais que x' peut être positif ou négatif.

Cela posé, la relation connue qui existe entre x et x_r (le quotient complet de x à indice r) peut s'ecrire ainsi qu'il suit:

$$15.\quad x_r = \frac{A(z_{r-2}x - y_{r-2})(y_{r-1} - z_{r-1}x')}{A(y_{r-1} - z_{r-1}x)(y_{r-1} - z_{r-1}x')} = \frac{-Q_r + (-1)^r \tfrac{1}{2}\sqrt{E}}{P_r},$$

ce qui d'après les valeurs (14.) de x et x' donne

$$16.\quad \begin{cases} Q_r = Ay_{r-2}y_{r-1} - \tfrac{1}{2}B(y_{r-1}z_{r-2} + y_{r-2}z_{r-1}) + Cz_{r-2}z_{r-1}, \\ P_r = Ay_{r-1}^2 + By_{r-1}z_{r-1} + Cz_{r-1}^2. \end{cases}$$

De ces expressions on tire encore:

$$17.\quad \begin{cases} Q_r = a_{r-1}P_{r-1} + Q_{r-1}, \\ P_r = a_{r-1}(Q_r + Q_{r-1}) + P_{r-2}, \\ Q_r^2 - P_rP_{r-1} = \tfrac{1}{4}E, \end{cases}$$

en observant que $P_{-1} = C$, $P_0 = A$, $Q_0 = \tfrac{1}{2}B$.

Nous ne nous arrêterons pas aux conséquences nombreuses et très élégantes, qui peuvent être tirées de ces formules, et dont la plupart se

trouve dans les ouvrages de *Lagrange* et dans ceux de *Legendre*. Mais nous allons seulement présenter quelques remarques à ce sujet.

Une des propriétés les plus remarquables des deux fractions continues, qui forment les développemens des racines x et x', est celle de la périodicité. Partant x est de la forme (1.), et l'on trouve au moyen de (10.), en y substituant à x_{r+1} son expression donnée par (15.),

$$18. \quad \alpha^0 = -\frac{\beta P_n}{P_{r+2}}, \qquad \alpha - \beta^0 = \frac{2\alpha^0 Q_{n+1}}{P_n}.$$

Maintenant, si l'on observe d'une part, que toute quantité irrationnelle de la forme $\sqrt{C}$ (C étant rationnel) est la racine d'une équation du second degré à coëfficiens entiers, et que par conséquent la fraction continue, qui en est le développement, jouit de la propriété d'être périodique, d'autre part qu'il a été démontre dans le 3[me] §. que la valeur d'une fraction continue périodique n'est pas réductible à la forme $\sqrt{C}$, à moins qu'elle soit comprise dans le cas présenté par (7.) ou (8.), suivant que $C<1$ ou $C>1$, on en peut déduire le théorème qui suit.

Théorème I. Toute quantité irrationelle de la forme $\sqrt{C}$, C étant positif et rationnel, équivaut à une fraction continue de la forme (7.) si $C<1$, et de la forme (8.) si $C>1$. Ce théorème a été demontré d'une autre manière dans la *Théorie des nombres* T. I. pag. 53 et 54, mais pour le cas seulement où C est un nombre entier.

Nous avons désigné par a_{n+1} le premier terme de la période qui se trouve dans le développement de x (14.), et par $x_{n+1} = \frac{-Q_{n+1} + (-1)^{n+1} \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P_{n+1}}$ le quotient complet qui y répond. Cela posé, nous allons établir le théorème suivant.

Théorème II. Si la période $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots a_{n+t}$ est symétrique, ces deux autres suites

$$Q_{n+1}, Q_{n+2}, Q_{n+3}, \ldots Q_{n+t+1},$$
$$P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+3}, \ldots P_{n+t+1},$$

abstraction faite de leurs signes, qui sont comme on le sait alternativement $+$ et $-$, seront également symétriques.

Démonstration. La fraction continue $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots a_{n+t}$, dont la valeur est $= \frac{\alpha}{\beta}$ (11.), est supposée symétrique. Il suit de là $\alpha^0 = \beta$, et d'après la première (18.) $P_{n+1} = -P_n$. De plus, la première des équations (17.) donne, à cause de $a_{n+p} = a_{n+t+1-p}$, les formules suivantes:

$$19. \quad Q_{n+p+1} = a_{n+p} P_{n+p} + Q_{n+p}, \qquad Q_{n+t+2-p} = a_{n+p} P_{n+t+1-p} + Q_{n+t+1-p}$$

et la dernière (17.) donne également

$$20. \quad \begin{cases} Q^2_{n+p} - P_{n+p}\,P_{n+p-1} = \tfrac{1}{4}E, \\ Q^2_{n+t+2-p} - P_{n+t+2-p}\,P_{n+t+1-p} = \tfrac{1}{4}E. \end{cases}$$

Supposons égales entre elles leś valeurs numériques de $Q_{n+t+2-p}$ et Q_{n+p} en faisant

$$21. \quad Q_{n+t+2-p} = (-1)^t Q_{n+p}.$$

Substituons cette expression dans les quatre équations précédentes, et éliminons Q_{n+p} entre les deux (19.) aussi bien qu'entre les deux (20.), il viendra

$$22. \quad Q_{n+t+1-p} - (-1)^t Q_{n+p+1} = a_{n+p}\left((-1)^{t+1} P_{n+p} - P_{n+t+1-p}\right),$$

$$23. \quad P_{n+p}P_{n+p-1} = P_{n+t+2-p}\,P_{n+t+1-p}.$$

Supposons aussi

$$24. \quad P_{n+t+2-p} = (-1)^{t+1} P_{n+p-1}.$$

Cela réduit (23.) à

$$P_{n+t+1-p} = (-1)^{t+1} P_{n+p}$$

et consequemment (22.) à

$$Q_{n+t+1-p} = (-1)^t Q_{n+p+1}.$$

Or, ces deux derniers résultats se déduisent aussi de (24.) et (21.) en y changeant p en $p+1$. Il est donc permis de conclure que ces deux séries:

$$25. \quad \begin{cases} \quad\; Q_{n+1},\ Q_{n+2},\ Q_{n+3},\ \ldots\ Q_{n+t+1}, \\ P_n,\ P_{n+1},\ P_{n+2},\ P_{n+3},\ \ldots\ P_{n+t+1}, \end{cases}$$

abstraction faite des signes, sont symétriques toutes les fois que chacune d'elles a ses deux termes extrêmes numériquement égaux entre eux. Mais cette condition a véritablement lieu dans le cas actuel, parceque $Q_{n+t+1} = (-1)^t Q_{n+1}$ et $P_{n+t+1} = (-1)^t P_{n+1}$ d'après la loi connue de la périodicité, et due $P_{n+1} = -P_n$ comme il a été remarqué ci-dessus.

On peut même affirmer, que cette seule condition $P_{n+1} = -P_n$, toutes les fois qu'elle est satisfaite, rende symétriques la période de la fraction continue et les deux séries (25.). De plus, comme il est permis de considérer comme premier terme de la période un terme quelconque $a_{n+\theta+1}$ qui y appartient, il est clair, que, la seule condition $P_{n+\theta+1} = -P_{n+\theta}$ étant satisfaite, ces trois séries seront nécessairement symétriques:

$$\begin{array}{l} \quad\; a_{n+\theta+1},\ a_{n+\theta+2},\ a_{n+\theta+3},\ \ldots\ a_{n+\theta+t}, \\ \quad\; Q_{n+\theta+1},\ Q_{n+\theta+2},\ Q_{n+\theta+3},\ \ldots\ Q_{n+\theta+i}, \\ P_{n+\theta},\ P_{n+\theta+1},\ P_{n+\theta+2},\ P_{n+\theta+3},\ \ldots\ P_{n+\theta+t}; \end{array}$$

abstraction faite des signes alternatifs des deux dernières séries.

Enfin on peut démontrer d'une manière toute semblable cet autre théorème plus général.

Théorème III. Si une partie quelconque de la période

$$26. \quad a_{n+\theta+1}, \; a_{n+\theta+2}, \; a_{n+\theta+3}, \; \dots \; a_{n+\theta+k}$$

est symétrique et que ces deux égalités

$$27. \quad Q_{n+\theta+k+1} = (-1)^k Q_{n+\theta+1}, \quad P_{n+\theta+k+1} = (-1)^{k+1} P_{n+\theta}$$

ayent lieu, les séries suivantes seront également symétriques, abstraction faite des signes alternatifs:

$$28. \quad \begin{cases} \quad Q_{n+\theta+1}, \; Q_{n+\theta+2}, \; Q_{n+\theta+3}, \; \dots \; Q_{n+\theta+k+1}, \\ P_{n+\theta}, \; P_{n+\theta+1}, \; P_{n+\theta-2}, \; P_{n+\theta+3}, \; \dots \; P_{n+\theta+k+1}. \end{cases}$$

Ce théorème a lieu par exemple dans le cas où $B=0$, en sorte que l'équation proposée est pure, et que sa racine positive appartient à l'une des formes (7.) ou (8.); mais il suffit de considérer le cas où cette racine est >1, ce qui amène la forme (8.), parceque d'ailleurs en faisant $x=\frac{1}{y}$ on aurait une équation transformée, dont la racine, surpassant l'unité, se développe d'après (8.), et que la fraction continue qui en dérive, étant précédée du terme 0, donne immédiatement celle de x, tandis que les quotients complets restent les mêmes pour x et y. Faisons donc $n=0$, $\theta=0$, $k=t-1$, ce qui fait coïncider la suite (26.) avec la partie symétrique de la période présentée dans (8.). En vertu de (9.), C étant changé en $-\frac{C}{A}$, p^0 en y_{t-1}, q^0 en z_{t-1}, on a

$$Ay_{t-1}^2 + Cz_{t-1}^2 = (-1)^t A,$$

et en vertu de la seconde équation (16.), posant $r=t$ et $B=0$,

$$Ay_{t-1}^2 + Cz_{t-1}^2 = P_t.$$

Il suit de là $P_t = (-1)^t A$; mais on a généralement $P_0 = A$, partant $P_t = (-1)^t P_0$, ce qui est précisément la deuxième condition (27.) à cause des valeurs actuelles de n, θ, k. De plus, si dans la formule (15.) on fait $r=t$, $E=-AC$, $P_t=(-1)^t A$, on trouve

$$x_t = \frac{Q_t}{(-1)^{t-1}A} + \sqrt{-\frac{C}{A}}.$$

Mais on a $a_t = 2a_0 < x_t$ et $a_0 < \sqrt{-\frac{C}{A}}$ (le signe $<$ désignant que le nombre précédent est l'entier inférieur le plus approché); partant $Q_t = (-1)^{t-1} A a_0$. Or la première équation (17.) donne $Q_1 = a_0 P_0 + Q_0 = A a_0$ (parceque $P_0 = A$ et $Q_0 = \frac{1}{2}B = 0$). On a donc finalement $Q_t = (-1)^{t-1} Q_1$, et c'est à quoi se réduit aussi la première condition (27.).

Donc, les conditions supposées par le 3me théorème étant satisfaites, les deux séries (28.) seront symétriques, abstraction faite des signes.

Il est bon de remarquer que dans l'expression générale (15.) lorsque $r > n$, les trois termes $-Q_r$, P_r, $(-1)^r \frac{1}{2}\sqrt{E}$ ont toujours le même signe, en sorte qu'en posant $x_r = \frac{q_r + \frac{1}{2}\sqrt{E}}{p_r}$ on est dispensé de faire abstraction des signes alternatifs des deux séries symétriques, ces séries (28.) étant remplacées par deux autres, formées des quantités q et p qui sont toutes positives. Ainsi le caractère propre au développement de la quantité irrationelle $x = \sqrt{\frac{C}{A}}$, C et A étant deux nombres entiers premiers entre eux, dont $C > A$, est exprimé 1°. par la formule

$$29. \quad x = \sqrt{\frac{C}{A}} = a_0(a_1, a_2, a_3, \ldots. a_{t-1}, 2a_0),$$

2°. en posant $x_r = \frac{q_r + \sqrt{(CA)}}{p_r}$, par la symétrie de ces trois séries des nombres positifs entiers:

$$30. \quad \begin{cases} a_1, a_2, a_3, \ldots. a_{t-1}, \\ q_1, q_2, q_3, \ldots. q_{t-1}, q_t, \\ p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots. p_{t-1}, p_t. \end{cases}$$

Dans la *Théorie des nombres* T. I. pag. 59, où il est question de cette équation indéterminée du second degré

$$p^2 - Aq^2 = \pm D$$

et de la résolution en nombres entiers qu'on peut en obtenir au moyen de la deuxième formule (17.) dans le cas $P_r = \pm D$, en faisant $p = y_{r-1}$, $q = z_{r-1}$ $\left(\frac{y_{r-1}}{z_{r-1}}\right.$ étant la fraction convergente $\left.\sqrt{A}\right)$ on trouve le passage suivant: „Il peut se trouver plusieurs fois le même nombre D dans la même période, et il se rencontrera toujours au moins deux fois, puisque la période est symétrique (excepté lorsque le quotient auquel répond $\frac{p}{q}$ est le terme moyen de la période, abstraction faite de son dernier terme $2a$)." Mais dans ce qui précède, *Legendre* n'a pas démontré la symétrie de la période, dont il s'agit ici, savoir celle présentée par la troisième série (30.); mais il a seulement démontré la symétrie de la première série (30.), qui à elle seule n'amène pas nécessairement celle de la troisième.

§. 5.

Une propriété singulière des deux fractions continues qui résultent du développement des deux racines (14.), est, que leurs périodes sont formées des mêmes termes dans un ordre inverse. C'est ce que *Legendre* a démontré dans la *Théorie des nombres* (T. I. pag. 95 et suiv.) d'une manière très ingénieuse et par des considérations indirectes fondées sur la nature de l'équation indéterminée du second degré. Mais on peut aussi déduire cette propriété du résultat trouvé dans le 1[er] §., et c'est ce que nous nous proposons de faire dans ce qui va suivre.

D'abord il y a à remarquer que le développement de la racine positive x (14.) a la forme indiquée par l'équation (1.) et que la valeur de cette forme est généralement déterminée par l'équation (13.). Il suit de là, que cette dernière équation comprend toutes celles du second degré, qui peuvent être proposées dans cette recherche; savoir celles, dont l'une des racines est positive; car la valeur de x étant irrationnelle et de la forme $a+\sqrt{b}$, a et b étant rationnels, il est impossible, qu'il puisse y avoir d'autre équation du second degré à coëfficiens entiers propre à déterminer cette valeur, que cette seule équation, dont les racines soient $a+\sqrt{b}$ et $a-\sqrt{b}$. Il est donc permis de considérer l'équation (13.) comme celle, qui nous soit immédiatement proposée, et dont les racines doivent être développées en fractions continues. Or, nous avons vu que cette équation (13.) est satisfaite par l'expression (12.), x_{n+1} étant déterminé par l'équation (10.). Il résulte de là que les deux racines de l'équation (13.) se trouvent, si dans (12.)

$$x=\frac{y_n\, x_{n+1}+y_{n-1}}{z_n\, x_{n+1}+z_{n-1}}$$

on substitue à x_{n+1} successivement les deux racines de (10.), qui suivant le résultat du 1[er] §. sont celles-ci:

$$(a_{n+1},\, a_{n+2},\, a_{n+3},\, \ldots\, a_{n+t}), \qquad -0\,(a_{n+t},\, a_{n+t-1},\, a_{n+t-2},\, \ldots\, a_{n+1}).$$

La première de ces substitutions donne immédiatement la racine x de la forme (1.). L'autre au contraire exige une transformation comme suit:

$$a_n+\frac{1}{-0\,(a_{n+t},\, a_{n+t-1},\, a_{n+t-2},\, \ldots\, a_{n+1})}=a_n-(a_{n+t},\, a_{n+t-1},\, a_{n+t-2},\, \ldots\, a_{n+1})$$

$$=a_n-a_{n+t}-\frac{1}{(a_{n+t-1},\, a_{n+t-2},\, \ldots\, a_{n+1},\, a_{n+t})},$$

ce qui d'après cette formule évidente

$$\mu-\frac{1}{\nu+\text{etc.}}=\mu-1+\frac{1}{1+\frac{1}{\nu-1+\text{etc.}}}$$

équivaut à

$$a_n - a_{n+t} - 1,\ 1,\ a_{n+t-1} - 1\ (a_{n+t-2},\ a_{n+t-3},\ \ldots.\ a_{n+1},\ a_{n+t},\ a_{n+t-1}).$$

On aura donc:

$$31. \quad x' =$$

$$a_0, a_1, a_2, \ldots. a_{n-1}, a_n - a_{n+t} - 1, 1, a_{n+t-1} - 1\ (a_{n+t-2}, a_{n+t-3}, \ldots. a_{n+1}, a_{n+t}, a_{n+t-1}).$$

Cette formule est immédiatement applicable au cas où les deux termes $a_n - a_{n+t} - 1$ et $a_{n+t-1} - 1$ sont positifs; mais ces termes peuvent être zéro l'un et l'autre, et le premier peut être négatif. Dans ces cas il nous faut des transformations nouvelles, qui s'obtiennent en observant: 1°. qu'un terme $= 0$ a cet effet, que les deux termes, entre lesquels il est placé, s'ajoutent en ne formant qu'un seul terme, ce qui s'exprime ainsi

$$\mu,\ 0,\ \nu,\ \ldots. = \ldots.\ \mu + \nu,$$

$$\ldots.\ \mu,\ 0,\ \nu,\ 0,\ \varpi,\ \ldots. = \ldots.\ \mu + \nu + \varpi,\ \ldots.$$

etc.,

2°. qu'un terme négatif se fait chasser de la manière suivante,

$$\mu + \cfrac{1}{-\nu + \cfrac{1}{\varpi + \text{etc.}}} = \mu - \cfrac{1}{\nu - \cfrac{1}{\varpi + \text{etc.}}} = \mu + \cfrac{1}{\nu - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varpi - 1 + \text{etc.}}}}$$

$$= \mu - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\nu - 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varpi - 1 + \text{etc.}}}}}$$

partant

$$(a.) \qquad \ldots.\ \mu,\ -\nu,\ \varpi,\ \ldots. = \ldots.\ \mu - 1,\ 1,\ \nu - 2,\ 1,\ \varpi - 1,\ \ldots.$$

Cette transformation, étant combinée avec celle qui précède, suffira à tous les cas, excepté celui où $\nu = 1$, où il faut procéder ainsi qu'il suit:

$$\mu + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{\varpi + \text{etc.}}} = \mu - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varpi - 1 + \text{etc.}}}}} = \mu - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{\varpi - 1\ \text{etc.}}{\varpi\ \text{etc.}}}}$$

$$= \mu - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{-\cfrac{1}{\varpi\ \text{etc.}}}} = \mu - 1 - \frac{1}{\varpi - 1\ \text{etc.}}$$

partant

$$(b.) \qquad \ldots.\ \mu,\ -1,\ \varpi,\ \ldots. = \ldots.\ \mu - 2,\ 1,\ \varpi - 2,\ \ldots.,$$

ce qui ne suffit pas encore dans les cas $\mu = 1$ et $\varpi = 1$, mais on a suivant (a.)

$$\ldots.\ \lambda, 1, -1, \varpi, \ldots. = \ldots.\ \lambda, 0, 1, -1, 1, \varpi - 1, \ldots. = \ldots.\ \lambda + 1, -1, 1, \varpi - 1, \ldots.$$

et suivant ($b.$)

$$\dots\ \lambda+1,\ -1,\ 1,\ \varpi-1,\ \dots = \dots\ \lambda-1,\ 1,\ -1,\ \varpi-1,\ \dots,$$

partant

$$\dots\ \lambda,\ 1,\ -1,\ \varpi,\ \dots = \dots\ \lambda-m,\ 1,\ -1,\ \varpi-m,\ \dots,$$

m étant un entier quelconque, ce qui donne pour $\lambda > \varpi$

$$\dots\ \lambda,\ 1,\ -1,\ \varpi,\ \varrho,\ \dots = \dots\ \lambda-\varpi,\ 1,\ -1,\ 0,\ \varrho,\ \dots$$

ou

$$(c.)\quad \dots\ \lambda,\ 1,\ -1,\ \varpi,\ \varrho,\ \dots = \dots\ \lambda-\varpi,\ 1,\ \varrho-1,\ \dots,$$

et pour $\lambda < \varpi$

$$\dots k, \lambda, 1, -1, \varpi, \dots = \dots k, 0, 1, -1, \varpi-\lambda, \dots = \dots k+1, -1, \varpi-\lambda, \dots,$$

ou suivant ($b.$)

$$(d.)\quad \dots\ k,\ \lambda,\ 1,\ -1,\ \varpi,\ \dots = \dots\ k-1,\ 1,\ \varpi-\lambda-2,\ \dots$$

Lorsque $\lambda = \varpi$, on aura seulement

$$\dots\ k,\ \lambda,\ 1,\ -1,\ \lambda,\ \varrho,\ \dots = \dots\ k+1,\ \varrho-1,\ \dots$$

Enfin le cas $\varpi = 1$ se réduit au cas $\mu = 1$, en observant que d'après ($b.$)

$$\dots\ \mu,\ -1,\ 1,\ \dots = \dots\ \mu-2,\ 1,\ -1,\ \dots$$

Toutefois il faut excepter le cas où en même temps $\mu = 1$; mais on a suivant ($a.$)

$$\dots\ \mu,\ -1,\ \varpi,\ \dots = \dots\ \mu-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \varpi-1,\ \dots$$

conséquemment

$$\dots\ \lambda,\ 1,\ -1,\ 1,\ \varrho,\ \dots = \dots\ \lambda+1,\ -1,\ \varrho+1,\ \dots$$

et d'après ($b.$)

$$(e.)\quad \dots\ \lambda,\ 1,\ -1,\ 1,\ \varrho,\ \dots = \dots\ \lambda-1,\ 1,\ \varrho-1,\ \dots$$

Ces formules ($a.$), ($b.$), ($c.$), ($d.$), ($e.$) suffiront à tous les cas sans exception.

Au reste le cas d'un terme $= -1$ ne se présentera jamais dans la forme (31.), a_n et a_{n+k} étant toujours inégaux: dont il ne peut y en avoir que ceux qui suivent.

1°. Les termes $a_n - a_{n+k} - 1$ et $a_{n+k-1} - 1$ peuvent être positifs tous les deux, ce qui rend la forme (3.) immédiatement applicable, comme il a été remarqué plus haut.

2°. $a_n - a_{n+k} - 1$ étant positif, on peut avoir $a_{n+k-1} - 1 = 0$, ce qui donne au lieu de (1.) et (31.):

$$(31\,a.)\ \begin{cases} x = a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n\ (a_{n+1},\ a_{n+2},\ \dots\ a_{n+k-2},\ 1,\ a_{n+k}), \\ x = a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots\ a_{n-1},\ a_n-a_{n+k}-1,\ a_{n+1}+1,\ a_{n+2},\ a_{n+3},\ \dots \\ \qquad \dots\ a_{n+k-2},\ a_{n+k}\ :\ a_{n+k-2}, \end{cases}$$

3°. $a_n - a_{n+t} - 1 = 0$, $a_{n+t-1} - 1 > 0$; on aura

$$31\,\beta.\quad \begin{cases} x = a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n\,(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\ldots a_{n+t-1}, a_n - 1), \\ x' = a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_{n-2}, a_{n-1} + 1, a_{n+t-1} - 1\,(a_{n+t-2}, a_{n+t-3}, \ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots a_{n+1}, a_n - 1, a_{n+t-1}). \end{cases}$$

4°. $a_n - a_{n+t} - 1 = 0$, $a_{n+t-1} - 1 = 0$; on aura

$$31\,\gamma.\quad \begin{cases} x = a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n\,(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\ldots a_{n+t-2}, 1, a_n - 1), \\ x' = a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_{n-2}, a_{n-1} + a_{n+t-2} + 1\,(a_{n+t-3}, a_{n+t-4}, \ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots a_{n+1}, a_n - 1, a_{n+t-2}). \end{cases}$$

5°. $a_n - a_{n+t} - 1$ négatif; on aura

pour $a_{n-1} > 1$:

$$32.\text{*)}\quad \begin{cases} x = a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n\,(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\ldots a_{n+t}), \\ x' = a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_{n-2}, a_{n-1} - 1, 1, a_{n+t} - a_n - 1\,(a_{n+t-1}, a_{n+t-2}, \ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots a_{n+1}, a_{n+t}), \end{cases}$$

pour $a_{n-1} = 1$:

$$32\,\alpha.\quad \begin{cases} x = a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_{n-2}, 1, a_n\,(a_{n+1}, a_{n-2}, \ldots\ldots a_{n+t}), \\ x' = a_0, a_1, \ldots\ldots a_{n-3}, a_{n-2} + 1, a_{n+t} - a_n - 1\,(a_{n+t-1}, a_{n+t-2}, \ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots a_{n+1}, a_{n+t}). \end{cases}$$

Ces deux dernières formules supposent encore $a_{1+t} - a_n - 1 > 0$, mais $a_n - a_{n+t} - 1$ étant positif ou $a_{n+t} > a_n - 1$, on peut avoir $a_{n+t} = a_n + 1$, ce qui donne

pour $a_{n-1} > 1$:

$$32\,\beta.\quad \begin{cases} x = a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n\,(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\ldots a_{n+t-1}, a_n + 1), \\ x' = a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_{n-2}, a_{n-1} - 1, a_{n+t-1} + 1\,(a_{n+t-2}, a_{n+t-3}, \ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots a_{n+1}, a_n + 1, a_{n+t-1}), \end{cases}$$

pour $a_{n-1} = 1$:

$$32\,\gamma.\quad \begin{cases} x = a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_{n-2}, 1, a_n\,(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\ldots a_{n+t-1}, a_n + 1), \\ x' = a_0, a_1, \ldots\ldots a_{n-3}, a_{n-2} + a_{n+t-1} + 1\,(a_{n+t-2}, a_{n+t-3}, \ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots a_{n+1}, a_n + 1, a_{n+t-1}). \end{cases}$$

Dans le cas $n = 0$ la série $a_0, a_1, \ldots\ldots a_{n-1}$, n'ayant plus de sens, disparait des formes (31.), (31 α.), (31 β.), (31 γ.), (32.), (32 β.) quoique en général elle doive en faire partie. De même dans le cas $n = 1$ la série $a_0, a_1, \ldots\ldots a_{n-2}$ disparait des formes (32 α.), (32 γ.).

Ceci étant observé, ces mêmes formules font voir clairement, que quand il y a un nombre entier compris entre les deux racines x et x',

*) Les deux expressions très remarquables de x' (31.) et (32.), ont été données sans démonstration par Mr. *le Besgue* dans l'endroit cité au commencement du 1er §.

on ne peut avoir $n > 2$ (ce qui résulte aussi de la théorie de *Lagrange*), mais qu'on a $n = 2$ à cause de (32 α.) et (32 γ.) dans le seul cas où $a_{n-1} = 1$ et $a_{n+1} > a_n - 1$, et dans les autres cas $n = 1$ ou $n = 0$ ou même $n = -1$, savoir $n = 0$ si (31.) ou (31 α.) ait lieu, et $n = -1$ dans le cas présenté par (2.), (3.), (6.).

Le développement (31.) de x' ayant la forme de celui de x présenté dans (32 γ.), on peut chercher le développement, qui provient de celui-là (31.) de la même manière que par la transformation (32 γ.) le développement de x' est produit de celui de x, et il est facile de voir qu'on retombera sur le développement (1.) de x d'où l'on est parti. Réciproquement le développement de x' présenté dans (32 γ.) étant soumis à la transformation (31.), reproduira celui de x donné par la première formule (32 γ.). En général, on peut distribuer comme suit les huit transformations (31.), (31 α.), (31 β.), (31 γ.), (32.), (32 α.), (32 β.), (32 γ.) en quatre classes, contenant chacune deux transformations qui sont les réciproques l'une de l'autre:

1re classe: (31.), (32 γ.); 2me (31 α.), (31 γ.); 3me (31 β.), (32 β.);
4me (32.), (32 α.).

Il en résulte que, quelle que soit la racine dont le développement en fraction continue est proposé, on peut toujours en tirer immédiatement celui de l'autre.

Copenhague le 23 Mars 1838.

Addition aux Rémarques du mémoire précédent.

Les nombres appelés P formant une suite, dont les premiers termes sont positifs, savoir

$$P_0, P_1, P_2, \ldots P_n,$$

et tous ceux qui suivent alternativement positifs et négatifs (P_n positif, P_{n+1} négatif etc.), on a pour $r > n+1$:

$$(\alpha.) \quad a_r < \frac{Q_{r+1} + (-1)^r \tfrac{1}{2} \sqrt{B}}{P_r}$$

($a_r <$ désignant que a_r est l'entier inférieur le plus approché), et les

quatre périodes, qui appartiennent à x, commencent par x_{n+4}, a_{n+2}, Q_{n+2}, P_{n+1}, et même par x_{n+1}, a_{n+1}, Q_{n+1}, P_n lorsque $(\alpha.)$ a lieu pour $r = n+1$ (ce qui arrive par exemple dans les cas où $-\frac{P_n}{P_{n+1}} = 1$ ou < 1). C'est ce qui a été démontré par *Lagrange* (voy. les Additions à l'algèbre d'*Euler*). Maintenant, pour trouver le développement en fraction continue de l'expression $(\alpha.)$, faisons

$$u = \frac{-Q_{r+1} + (-1)^{r-1} \frac{1}{2}\sqrt{E}}{-P_r} = a_r + \frac{1}{u_1}, \quad u_1 = \frac{-Q + (-1)^r \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P}$$

et nous aurons, suivant la première des équations (17.), $Q = -a_r P_r + Q_{r+1}$, partant $Q = Q_r$, et suivant la troisième (17.)

$$P = \frac{Q^2 - \frac{1}{4}E}{-P_r} = \frac{Q_r^2 - \frac{1}{4}E}{-P_r} = -P_{r-1}.$$

Ainsi il vient

$$u_1 = \frac{-Q_r + (-1)^r \frac{1}{2}\sqrt{E}}{-P_{r-1}} = \frac{Q_r + (-1)^{r-1} \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P_{r-1}},$$

d'où il suit, $r-1$ étant substitué à r dans $(\alpha.)$, $u_1 = a_{r-1} + \frac{1}{u_2}$. En continuant de cette manière on voit: 1°. que le développement cherché donne une fraction continue parfaitement périodique, la période étant $= a_r, a_{r-1}, a_{r-2}, \ldots$ c'est à dire l'inverse de la période proposée; 2°. que les quotients complèts, qui y appartiennent, suivent cette loi:

$$(\beta.) \quad \frac{Q_{r+1} + (-1)^r \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P_r}, \quad \frac{Q_r + (-1)^{r-1} \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P_{r-1}}, \quad \frac{Q_{r-1} + (-1)^{r-2} \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P_{r-2}}, \ldots$$

Ce théorème remarquable est déjà connu, mais peut-être la démonstration que nous venons de donner ici, sera préférable à quelques égards à celle de Mr. *Legendre* (Théorie des nombres, T. I. pag. 95). Au reste les expressions $(\beta.)$ étant combinées avec les développements (31.), (32.), que nous avons donnés dans nos Remarques, il est facile d'en tirer les quotients complèts de la racine x'. En effet, comme la partie périodique de cette racine se forme par le renversement de la période du développement de x, il est évident, que les expressions $(\beta.)$ équivalent elles mêmes aux quotients complèts en question.

4.

Theorema geometricum ad trianguli rectilinei theoriam pertinens.

(Scripsit *C. Ramus*, professor matheseos in universitate Hafniensi.)

E datis trianguli rectilinei area $= T$, circulorum inscripti et circumscripti radiis r et R, inveniuntur tria latera a, b, c tanquam radices aequationis cubicae

$$z^3 - \frac{2T}{r}z^2 + \left(\frac{T^2}{r^2} + 4Rr + r^2\right)z - 4RT = 0,$$

quantitates autem $b+c-a$, $a+c-b$, $a+b-c$ tanquam radices aequationis

$$u^3 - \frac{2T}{r}u^2 + 4r(4R+r)u - 8rT = 0.$$

Theorematis ill. *Sturmii* ad has duas aequationes applicatione facta inveniuntur conditiones, sine quibus e datis illis trianguli partibus ceterae determinari nequeunt. Debet scilicet:

1°. radius R non minor esse quam $2r$,

2°. area T non extra hos limites esse posita

$$r\sqrt{[2R^2 + 10Rr - r^2 \pm 2\sqrt{(R(R-2r)^3)}]}.$$

Si cum horum altero congruit T, existente $R > 2r$, triangulum est isoscelum; si vero $R = 2r$, limites ipsi confunduntur, adeo ut T debeat cum iisdem congruere, id quod triangulum facit aequilatus.

Hafniae 1 dec. 1838.

5.

Démonstration élémentaire du théorème de Wilson généralisé.

(Par l'éditeur.)

Théorème.

Soit s un nombre entier quelconque. Désignons par $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots. \sigma_\varphi$ les nombres premiers avec s et moindres que s, on a

$$1. \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots. \sigma_\varphi = Ns - 1$$

dans les trois cas

$$2. \quad s = p^m,$$
$$3. \quad s = 2p^m \text{ et}$$
$$4. \quad s = 4,$$

p désignant un nombre premier impair et m un nombre entier quelconque > 0, et

$$5. \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots. \sigma_\varphi = Ns + 1$$

dans tous les autres cas.

N signifie un nombre entier indéfini.

Démonstration.

I. Si l'on divise par s le produit de deux quelconques des nombres σ premiers avec s, par ex. σ_ε et $\sigma_\varkappa$, le reste sera un troisième des nombres premiers avec s, par ex. σ_μ, c'est à dire on aura

$$6. \quad \sigma_\varepsilon \sigma_\varkappa = Ns + \sigma_\mu.$$

Car, si s et σ_μ avoient quelque nombre premier >1 pour diviseur commun, ce diviseur devroit diviser aussi σ_ε ou $\sigma_\varkappa$ et par conséquent s et σ_ε ou $\sigma_\varkappa$ en même temps, ce qui n'est pas, σ_ε et $\sigma_\varkappa$ étant premiers entre eux suivant l'hypothèse. Donc σ_μ et s sont nécessairement premiers entre eux. Mais σ_μ ne peut aussi être $= \sigma_\varepsilon$ ou $= \sigma_\varkappa$ car si cela étoit, on auroit $\sigma_\varepsilon \sigma_\varkappa = Ns + \sigma_\varepsilon$ ou $\sigma_\varepsilon \sigma_\varkappa = Ns + \sigma_\varkappa$ c'est à dire $\sigma_\varepsilon(\sigma_\varkappa - 1) = Ns$ ou $\sigma_\varkappa(\sigma_\varepsilon - 1) = Ns$ et s n'ayant pas de diviseur commun avec σ_ε ou $\sigma_\varkappa$ devroit diviser $\sigma_\varkappa - 1$ ou $\sigma_\varepsilon - 1$, ce qui est impossible, $\sigma_\varkappa$ et σ_ε étant $< s$ par hypothèse. Donc σ_μ est un *troisième* des nombres σ premiers avec s.

II. Deux nombres σ premiers avec s, par ex. σ_x et σ_μ, étant déterminés, il se trouvera toujours un troisième σ_ε parmi les nombres σ premiers avec s qui donne

$$7. \quad \sigma_\varepsilon \sigma_x = Ns + \sigma_\mu.$$

Car, soient d'abord σ_λ et σ_ν deux quelconques des nombres σ et supposons

$$8. \quad \sigma_\lambda \sigma_x = Ns + r,$$

$$9. \quad \sigma_\nu \sigma_x = Ns + \varrho$$

les restes r et ϱ qui, suivant ce qui a été démontré sous (I.), se trouveront toujours parmi les nombres σ, ne pourront pas être égaux entre eux, parceque, si cela étoit, on auroit

$$10. \quad (\sigma_\lambda - \sigma_\nu)\sigma_x = Ns$$

et σ_x n'ayant pas de diviseur commun avec s, $\sigma_\lambda - \sigma_\nu$ devroit être divisible par s, ce qui est impossible, σ_λ et σ_ν étant $< s$ tous les deux, $\sigma_\lambda - \sigma_\nu$ l'est également et à plus forte raison.

Donc, si dans l'équation

$$11. \quad \sigma . \sigma_x = Ns + r$$

on fait parcourir à la valeur de σ toutes celles de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots. \sigma_\varphi$, tous les restes $r_1, r_2, r_3, \ldots. r_\varphi$ seront différents entre eux. Mais tous ces restes doivent se trouver parmi les nombres σ: donc ils seront *tous* ces nombres mêmes, peut-être dans un ordre différent de celui des multiplicateurs σ à gauche. Par cette raison il existera toujours pour une valeur déterminée de r savoir $r = \sigma_\mu$ (8.) quelque σ, par ex. σ_ε qui satisfait l'équation (8.).

III. Il y aura toujours un nombre σ_ε parmi les nombres σ premiers avec s qui satisfait l'équation

$$12. \quad \sigma_\varepsilon \sigma_x = Ns + 1,$$

σ_x étant un nombre *déterminé*, pris également et à volonté parmi les nombres σ.

Car en vertu de ce qui a été démontré sous (II.) il existe toujours un tel nombre σ_ε pour les deux nombres déterminés σ_x et σ_μ sous (8.) et $1 = \sigma_\mu$ est toujours un des nombres σ.

IV. Si dans l'équation (12.) on fait parcourir à σ_x *toutes* les valeurs des nombres σ premiers avec s, σ_ε parcourra également *toutes* ces valeurs.

Car si pour deux valeurs différentes de σ_x, par ex. σ_λ et σ_ν, une même valeur de σ_ε pourroit satisfaire l'équation (12.) on aurait

$$13. \quad \sigma_\varepsilon(\sigma_\lambda - \sigma_\nu) = Ns$$

et σ_z n'ayant pas de diviseur commun avec s, $\sigma_\lambda - \sigma_\nu$ devroit être divisible par s, ce qui ne se peut pas, σ_λ et σ_ν et à plus forte raison $\sigma_\lambda - \sigma_\nu$ étant $< s$. Donc pour des valeurs différentes de σ_x, celles de σ_z sous (12.) seront également différentes et il suit de là que, si σ_x parcourt toutes les valeurs de σ, σ_z les parcourra également.

V. Dans la série des équations

$$14. \quad \begin{cases} \sigma_a \sigma_1 = Ns + 1, \\ \sigma_b \sigma_2 = Ns + 1, \\ \sigma_c \sigma_3 = Ns + 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_x \sigma_\varphi = Ns + 1, \end{cases}$$

où en vertu de ce qui a été démontré sous (IV.) les facteurs σ_a, σ_b, σ_c, ... σ_x ne sont autre chose que les φ nombres σ et par conséquent inégaux entre eux, il peut y en avoir d'équations où les deux facteurs à gauche sont *égaux* entre eux. Le nombre de ces équations sera toujours *pair* et à chaque équation à facteurs égaux correspondera une autre, dont le facteur, multiplié par le facteur de la première équation donne pour produit $Ns - 1$, de sorte que, si par ex. on a

$$15. \quad \sigma_e^2 = Ns + 1 \quad \text{et}$$

$$16. \quad \sigma_k^2 = Ns + 1,$$

on aura en même temps

$$17. \quad \sigma_e \sigma_k = Ns - 1.$$

Car *en premier lieu* on aura

$$18. \quad \sigma_e^2 = Ns + 1$$

ou bien

$$19. \quad (\sigma_e + 1)(\sigma_e - 1) = Ns$$

aussitôt que $\sigma_e + 1$ est divisible par un des facteurs de s et $\sigma_e - 1$ l'est en même temps par l'autre, et cela peut visiblement avoir lieu, $\sigma_e + 1$ ou $\sigma_e - 1$ n'étant pas nécessairement premier avec s comme s l'est. En effet $\sigma_e - 1$ sera déjà *toujours* co-divisible avec s, si $\sigma = 1$; car alors $\sigma_e - 1$ est $= 0$ et 0 est divisible par s même. Mais cette co-divisibilité peut avoir lieu aussi pour des valeurs de σ autre que l'unité. Elle aura nécessairement lieu par ex. si s est le produit de deux nombres premiers absolus p et q, différents de 2 l'un de l'autre. Le nombre $p + 1 = q - 1$, moyen entre ces deux facteurs, sera alors nécessairement un des nombres σ premiers avec s, puisque $\sigma_e = p + 1 = q - 1$ n'est divisible ni par p, ni par

$\varsigma = p+2$. Et ce nombre moyen donne $\sigma_\varepsilon^2 - 1 = (p+1)^2 - 1 = p(p+2)$, produit divisible par p et par $q = p+2$. Donc en premier lieu l'équation $\sigma_\varepsilon^2 = Ns+1$ est toujours possible, et cela, suivant les circonstances, même pour d'autres valeurs de σ_ε que l'unité.

En second lieu, si σ_ε, premier avec s, donne $\sigma_\varepsilon^2 = Ns+1$, $s-\sigma_\varepsilon$, également premier avec s, donnera aussi $Ns+1$, car

20. $(s-\sigma_\varepsilon)^2 = s^2 - 2s\sigma_\varepsilon + \sigma_\varepsilon^2 = Ns + \sigma_\varepsilon^2 = Ns+1.$

Donc parmi les nombres premiers avec s ceux qui, multipliés par eux-mêmes, donnent $Ns+1$, existent toujours *par couples*. Si σ_ε est l'un de ces nombres, $s-\sigma_\varepsilon$ sera l'autre. Par conséquent le nombre des équations à facteurs égaux parmi celles (14.) est toujours *pair*.

En troisième lieu tout nombre σ_ε premier avec s, qui donne $\sigma_\varepsilon^2 = Ns+1$, ayant pour correspondant $\sigma_\lambda = s-\sigma_\varepsilon$, le produit de ces deux nombres est

20. $\sigma_\varepsilon \sigma_\lambda = \sigma_\varepsilon(s-\sigma_\varepsilon) = \sigma_\varepsilon s - \sigma_\varepsilon^2 = Ns - \sigma_\varepsilon^2 = Ns-1.$

Donc $\sigma_\varepsilon \sigma_\lambda$ est toujours $Ns-1$.

VI. Parmi les équations (14.) il n'existe pas plusieurs, ni même deux, dans lesquelles un seul des deux facteurs à gauche soit le même. Ou les facteurs sont les mêmes tous les deux, ou aucun ne l'est.

Car si par ex. on pouvait avoir

21. $\sigma_m \sigma_\varepsilon = Ns+1$ et

22. $\sigma_m \sigma_\lambda = Ns+1$,

on auroit

23. $\sigma_m(\sigma_\varepsilon - \sigma_\lambda) = Ns$,

et cela ne se peut pas, puisque σ_m est premier avec s et $\sigma_\varepsilon - \sigma_\lambda$ n'est pas divisible pour lui seul par s, σ_ε et σ_λ, et à plus forte raison $\sigma_\varepsilon - \sigma_\lambda$ étant $< s$. Donc des deux facteurs d'une des équations (14.) l'un ne peut pas *seul* se présenter de nouveau dans une autre équation. Ou les deux facteurs reviennent en même temps tous les deux, ou aucun ne revient.

VII. Le cas où aucun des deux facteurs ne revient, est celui où les deux facteurs sont *égaux* entre eux. L'autre cas où les facteurs reviennent tous les deux, est celui des facteurs *inégaux* entre eux, et toutes les fois où il existe des équations à facteur *inégaux*, chacune de ces équation revient nécessairement *une fois* identiquement, mais non pas plus d'une fois. Le nombre des équations à facteurs inégaux est donc *pair*, de même que l'est celui des équations à facteurs égaux.

Car dans la série des *seconds* facteurs $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots. \sigma_\varphi$ (14.) *aucun* ne revient. Donc si dans l'une ou l'autre équation les deux facteurs sont *égaux, aucun* de ces deux facteurs ne reviendra. Si au contraire les facteurs dans une équation, par ex. dans l'équation

$$24. \quad \sigma_\varepsilon \sigma_x = Ns + 1$$

sont *inégaux,* de sorte que, ou $\sigma_\varepsilon > \sigma_x$ ou $\sigma_\varepsilon < \sigma_x$: qu'on aille en avant dans le premier de ces deux cas et en arrière dans le second, et l'on retrouvera *nécessairement,* les facteurs parcourant *tous* les nombres σ dans la série des *seconds* facteurs $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots. \sigma_\varphi$, le facteur σ_ε lui même, mais on ne le retrouvera pas plus d'une fois. Maintenant si l'un des deux facteurs revient, l'autre reviendra également en même temps (VI.). Donc chaque équation à facteurs inégaux revient identiquement, mais non pas plus d'une fois. Le nombre de ces équations est donc toujours *pair.*

VIII. Aucun des facteurs relatifs aux équations à facteurs égaux ne peut se présenter dans aucune équation à facteurs inégaux; et reciproquement.

Car si, *en premier lieu,* le facteur d'une équation à facteurs *égaux* revenoit dans quelque autre équation, le second facteur de la première équation reviendroit également dans la seconde (VI.): donc celle-ci ne seroit pas une équation à facteurs inégaux, mais à facteurs égaux, et deux équation aux *mêmes* facteurs égaux n'existent pas; donc aucun facteur, qui entre dans les équations à facteurs égaux, ne peut revenir nulle part. Et si, en second lieu, l'un des facteurs d'une équation à facteurs *inégaux* revenoit dans une autre équation, cette équation ne seroit pas une des équations à facteurs égaux, parceque l'autre facteur reviendroit en même temps (VI.): donc aucun des facteurs relatifs aux équations à facteurs inégaux ne peut se présenter non plus dans les équations à facteurs égaux.

IX. Si l'on désigne dans (14.) par $2m$ *le nombre des équations à facteurs inégaux,* nombre toujours *pair* (VII.), celles parmi ces équations, dans lesquelles les facteurs sont *différents,* contiendront *tous* les nombres σ premiers avec s excepté ceux qu'offrent les équations à facteurs égaux, et chacun de ces nombres ne se présentera pas plus d'une seule fois.

Car les φ équations (14.) contiennent *tous* les φ nombres σ *sans exception,* et chacun de ces nombres *deux fois,* ni plus ni moins, parceque la série des *seconds* facteurs $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots. \sigma_\varphi$ est la série complète et ordonnée des φ nombres σ, pendant que la série des *premiers* facteurs

$\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c, \ldots \sigma_x$ est la même série, peut-être dans un ordre différent (IV.). Mais les équations à facteurs *égaux* présentent leurs facteurs *deux fois chacun,* et aucun de ces facteurs ne revient dans les équations à facteurs inégaux. Donc les $2m$ équations à facteurs *inégaux* présenteront tous les nombres σ non-contenus dans les équations à facteurs égaux, et chacun de ces nombres deux fois. Mais ces $2m$ équations sont identiques par couples (VII.); donc m de ces équations contiendront déjà tous les nombres σ non-contenus dans les équations à facteurs égaux et aucun de ces nombres plus d'une fois.

X. Le produit de *tous les nombres* σ premiers avec s divisé par s laissera pour reste $+1$ ou -1 selon que le nombre des couples des équations à facteurs *égaux* est *pair* ou *impair*. Cela veut dire que si l'on désigne par $2n$ le nombre des équations à facteurs égaux, nombre toujours pair (V.), on a

25. $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots \sigma_\varphi = Ns + 1$ si n est *pair* et

26. $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots \sigma_\varphi = Ns - 1$ si n est *impair.*

Car le produit des m équations à facteurs *inégaux* et différents, lesquelles présentent tous les nombres σ, exceptés les $2n$ nombres qu'offrent les $2n$ équation à facteurs *égaux* (IX.), donne $(Ns+1)^m = Ns+1$; donc le produit des dits nombres est $= Ns+1$. De l'autre côté le produit des $2n$ nombres σ *inégaux,* contenus dans les $2n$ équations à facteurs *égaux,* donne $(Ns-1)^n$, celui des deux nombres σ contenus dans chaque *couple* d'équations correspondantes à facteurs égaux étant $Ns-1$ (V.). Donc le produit de la totalité des nombres σ est

$$27. \quad (Ns+1)(Ns-1)^n;$$

et ce produit est $= Ns+1$ ou $Ns-1$ selon que n est pair ou impair.

XI. Jusqu'ici il a été démontré que le produit de *tous* les nombres σ, premiers avec s, est toujours $= Ns \pm 1$, quel que soit s. Il s'agit maintenant de distinguer les cas où l'unité dans $Ns \pm 1$ doit être prise avec le signe $-$ de ceux auxquels convient le signe $+$. Comme cela dépend du nombre n de couples d'équations à facteurs égaux dans (14.), c'est à dire du nombre des valeurs de σ dont les carrés divisés par s donnent $+1$ pour reste, il s'agit de savoir quel est le nombre des valeurs $< s$ que σ peut avoir dans l'équation

$$28. \quad \sigma^2 = Ns + 1,$$

N désignant un nombre indéfini.

XII. De cette équation on tire

$$29. \quad (\sigma+1)(\sigma-1) = Ns,$$

et pour satisfaire cette nouvelle équation il faut, qu'en décomposant Ns en deux facteurs de toutes les manières possibles, l'un de ces facteurs soit égal à $\sigma-1$, l'autre à $\sigma+1$.

D'abord il se présente les deux facteurs s et N; mais leur produit Ns pourra encore être décomposé de beaucoup d'autres manières. On embrassera toutes ces décompositions en supposant

$$30. \quad s = uv \text{ et}$$

$$31. \quad N = u_1 v_1,$$

de sorte que

$$32. \quad (\sigma+1)(\sigma-1) = uv\, u_1 v_1,$$

et puis

$$33. \quad \sigma+1 = uv_1 \text{ et}$$

$$34. \quad \sigma-1 = vu_1.$$

De là on tire

$$35. \quad \sigma = uv_1 - 1,$$

$$36. \quad \sigma = vu_1 + 1,$$

$$37. \quad 2\sigma = uv_1 + vu_1 \text{ et}$$

$$38. \quad 2 = uv_1 - vu_1,$$

où toutes les valeurs possibles des facteurs de s, y compris 1 et s et s et 1, pourront prendre la place de u et v, et il s'agit maintenant de savoir si une ou si aucune ou plusieurs valeurs de $\sigma < s$ conviennent à un couple déterminé de facteurs u et v.

XIII. Nous remarquerons d'abord que deux facteurs u et v, qui conviennent à quelque valeur de s, ne pourront jamais avoir en commun un facteur plus grand que 2. Car un tel facteur ne diviseroit pas le nombre 2 à gauche dans l'équation (38.).

Donc il faut que les valeurs de tout couple de facteurs u et v, pour lesquelles il pourra exister des valeurs de σ, soient ou premières entre elles ou ne soient divisibles en même temps par quelque autre nombre que 2. Tous les facteurs u et v conjugués, divisibles par un nombre plus grand que 2, doivent être rejetés; car il n'existe aucune valeur de σ qui puisse leur convenir.

XIV. Dans le cas ou les deux facteurs conjugués u et v sont *premiers entre eux*, il existera toujours *une* valeur de $u_1 < u$ et *une* valeur

de $v_1 < v$ convenables à l'équation (38.) ou bien à l'équation

$$39. \quad uv_1 = vu_1 + 2,$$

mais non *pas plus d'une seule* valeur.

Car puisque les facteurs u et v doivent être premiers entre eux, le nombre 2 n'en est pas facteur commun. Donc ou des deux nombres u et v aucun n'aura 2 pour facteur, ou l'un d'eux seulement l'aura. Soit celui qui n'est pas divisible par 2, le nombre 2 sera un des nombres premiers avec v, que nous désignerons par $z_1, z_2, z_2, z_3, \ldots$. De son côté le facteur u, qui a été supposé premier avec v, pourra être regardé également comme un des nombres z premiers avec v, même lorsque u seroit plus grand que v, cas où l'on auroit $u - Nv = z_x$.

Soit $z_x = u$ ou bien $z_x = u - Nv$. En multipliant z_x par tous les $z < v$ et divisant les produits par v, tous les restes r seront différents entre eux, car si par ex. on avait

$$40. \quad z_x . z_\lambda = Nv + r \quad \text{et} \quad z_x . z_\nu = Nv + r,$$

on auroit $z_x(z_\lambda - z_\nu) = Nv$, ce qui ne se peut pas, z_x étant premier avec v et $z_\lambda - z_\nu < v$. Donc les restes r parcourront nécessairement *toutes* les valeurs de z moindres que v, et cela en ne touchant chaque valeur de z plus d'une fois. Donc aussi la valeur 2 de z sera touché par ces restes, mais non pas plus d'une fois, et par suite il existera toujours une valeur v_1 de $z < v$, mais non pas plus d'une qui donne

$$40'. \quad u.v_1 = Nv + 2$$

ou bien $uv_1 = vu_1 + 2$, comme (39.), en écrivant u_1 au lieu de N. Et puisque $v_1 < v$, on a $uv_1 - 2 = vu_1 < uv$; donc aussi $u_1 < u$, et il n'existera qu'une seule valeur de $u_1 < u$, de même qu'il n'existe qu'une seule valeur de $v_1 < v$.

XV. Si les deux facteurs conjugués u et v *ont le nombre* 2 *pour facteur commun*, cas qui peut se présenter dans notre problême (XIII.), il existera toujours *deux* valeurs de $u < u_1$ et *deux* valeurs de $v < v_1$ propres à satisfaire l'équation (38.) ou (39.), mais *non pas plus de deux* valeurs.

Puisque les nombres u et v ne peuvent pas avoir en commun de facteur *plus grand* que 2, si on les divise par 2 et qu'on suppose

$$41. \quad u = 2\overset{1}{u}, \quad v = 2\overset{1}{v},$$

les quotients $\overset{1}{u}$ et $\overset{1}{v}$ seront nécessairement *premiers* entre eux.

Mais en substituant les expressions de u et v (41.) dans l'équa-

tion (39.), cette équation, ayant été divisée par 2, se réduit à

$$42.\quad \overset{1}{u} v_1 = \overset{1}{v} u_1 + 1.$$

Cette nouvelle équation est précisement dans le cas de la précédente (39.), $\overset{1}{u}$ et $\overset{1}{v}$ étant premiers entre eux et 1 étant toujours un des nombres premiers avec u et v. Donc il existera toujours une unique valeur de $u_1 < \overset{1}{u}$ et une unique valeur de $v_1 < \overset{1}{v}$ propres à satisfaire l'équation (42.) et par suite en même temps l'équation (39.), celle-ci n'étant autre chose que l'équation (42.) multiplié par 2.

Mais pendant qu'il n'existe qu'une seule valeur de u_1 et de v_1 *moindres* que $\overset{1}{u} = \frac{1}{2}u$ et $\overset{1}{v} = \frac{1}{2}v$ (41.), toutes les valeurs de u_1 et v_1 exprimées par

$$43.\quad n\overset{1}{u} + u_1 \quad \text{et} \quad n\overset{1}{v} + v_1,$$

où n est un n'ombre entier arbitraire, conviendront également à l'équation (42.). Car elles donnent

$$44.\quad u(n\overset{1}{v} + v_1) = \overset{1}{v}(nu + u_1) + 1,$$

ce qui n'est autre chose que $\overset{1}{u} v_1 = \overset{1}{v} u_1 + 1$, comme (42.). Si n dans (43.) est plus grand que 1, la valeur $n\overset{1}{u} + u_1 = \frac{1}{2}nu + u_1$ (41.) de u_1 est plus grande que u et la valeur $n\overset{1}{v} + v_1 = \frac{1}{2}nv + v_1$ (41.) de v_1 est plus grande que v, et les valeurs de u_1 et v_1 plus grandes que u et v n'importent guère, car elles donnent dans (37.) $2\sigma > 2uv > 2s$ et $\sigma > s$, valeurs de σ dont il ne s'agit pas. Mais il en est autrement si $n = 1$. Dans ce cas (43.) donne

$$45.\quad n\overset{1}{u} + u_1 = \tfrac{1}{2}u + u_1 \quad \text{et} \quad n\overset{1}{v} + v_1 = \tfrac{1}{2}v + v_1,$$

et $\frac{1}{2}u + u_1$ est toujours plus petit que u, u_1 étant $< \frac{1}{2}u$, et $\frac{1}{2}v + v_1$ est toujours plus petit que v, v_1 étant $< \frac{1}{2}v$. Donc, outre u_1 et v_1, aussi $\frac{1}{2}u + u_1$ et $\frac{1}{2}v + v_1$, en même temps qu'ils conviennent à l'équation (39.) remplissent la condition d'être moindres que u et v.

Donc si u et v ont 2 pour facteur commun, il existe toujours deux valeurs de u_1 et v_1 *moindres* que u et v, savoir

$$46.\quad \begin{cases} u_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}u + u_1 \quad \text{et} \\ v_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}v + v_1, \end{cases}$$

mais non pas plus que ces deux valeurs, propres à satisfaire l'équation (39.) ou celle (38.).

XVI. Si les deux facteurs conjugués u et v de $uv = s$ sont *premiers entre eux*, il existera toujours *une* valeur de $\sigma < s$ propre à satisfaire l'équation (29.), mais *non pas plus d'une seule* valeur.

Car dans ce cas il existe toujours suivant (XIV.) une valeur de $u_1 < u$ et une valeur de $v_1 < v$ propres à satisfaire l'équation de condition (38.), mais non pas plus de cette seule *valeur*; donc σ suivant son expression

$$46. \quad \sigma = \tfrac{1}{2}(uv_1 + vu_1) \quad (37.)$$

n'a qu'une seule valeur, et cette valeur est plus petite que $\frac{1}{2}(uv+vu) = \frac{1}{2}.2s = s$, comme cela doit être.

XVII. Si les deux facteurs conjugués u et v *ont le nombre* 2 *pour facteur commun*, il existe toujours *deux* valeurs de σ moindres que s et différentes l'une de l'autre de $\frac{1}{2}s$ propres à satisfaire l'équation (29.), mais il n'existe par plus de ces deux valeurs.

Car dans ce cas il existe toujours suivant (XV.) deux valeurs de $u_1 < u$, savoir u_1 et $\frac{1}{2}u + u_1$ où $u_1 < \frac{1}{2}u$, et deux valeurs de $v_1 < v$, savoir v_1 et $\frac{1}{2}v + v_1$ où $v_1 < \frac{1}{2}v$ propres à satisfaire l'équation de condition (38.), mais non pas plus de ces deux valeurs; donc σ suivant son expression (46.) a les deux valeurs

$$47. \quad \begin{cases} \overset{1}{\sigma} = \frac{1}{2}(uv_1 + vu_1) \quad \text{et} \\ \overset{2}{\sigma} = \frac{1}{2}(u(\frac{1}{2}v + v_1) + v(\frac{1}{2}u + u_1)) = \frac{1}{2}uv + \frac{1}{2}(uv_1 + vu_1), \end{cases}$$

ou bien

$$48. \quad \overset{2}{\sigma} = \tfrac{1}{2}s + \overset{1}{\sigma};$$

mais il n'a pas plus de ces deux valeurs différentes l'une de l'autre de $\frac{1}{2}s$ et plus petits que s toutes les deux, u_1 étant $< \frac{1}{2}u$ et $v_1 < \frac{1}{2}v$ et par suite $\overset{1}{\sigma} < \frac{1}{2}s$ (47.) et $\overset{2}{\sigma} < \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s < s$ (48.).

XVIII. Si la valeur σ_1 de σ convient aux facteurs u et v de $s = uv$, la valeur

$$49. \quad \sigma_2 = s - \sigma_1 \quad \text{de} \quad \sigma$$

conviendra toujours aux facteurs $v = \frac{s}{u}$ et $u = \frac{s}{v}$ de $s = vu$ et jamais les valeurs σ_1 et σ_2 de σ seront égales entre elles.

Car si d'abord les mêmes valeurs de u_1 et v_1 qui, en satisfaisant l'équation de condition $2 = uv_1 - vu_1$ (38.), donnent la valeur σ_1 de σ (35., 36.) donnaient la même valeur de σ_1 en mettant v et u à la place

de u et v, on auroit en vertu des équations (33. et 34.)

$$50. \quad \text{ou} \quad \sigma_1+1 = vu_1 \quad \text{et} \quad \sigma_1-1 = uu_1,$$

$$51. \quad \text{ou} \quad \sigma_1+1 = vu_1 \quad \text{et} \quad \sigma_1-1 = uv_1,$$

en même temps que l'on a (33. et 34.)

$$52. \quad \sigma_1+1 = uv_1 \quad \text{et} \quad \sigma_1-1 = vu_1.$$

Mais (50. et 52.) donnent $\sigma_1+1 = vv_1 = uv_1$ et $\sigma_1-1 = uu_1 = vu_1$, de sorte que σ_1+1 et σ_1-1 tous les deux seroient divisibles par u et par v en même temps et par suite par $uv = s$; ce qui est impossible. Puis (51. et 52.) donnent $\sigma_1+1-(\sigma_1-1)$ ou $2 = vu_1 - vu_1 = uv_1 - uv_1 = 0$, ce qui est absurde. Donc il est impossible que les mêmes valeurs de u_1 et v_1 ne cessent pas de satisfaire l'équation de condition (38.) si l'on y met v et u à la place de u et v, ce qui réduit cette équation à $2 = vv_1 - uu_1$ ou à $2 = vu_1 - uv_1$. Il faut nécessairement qu'il y ait *d'autres* valeurs u_2 et v_2 de u_1 et v_1 propres à satisfaire la nouvelle équation de condition

$$53. \quad 2 = vu_2 - uv_2.$$

Cela posé, puisqu'on à déjà

$$54. \quad 2 = uv_1 - vu_1 \quad (38.),$$

on tire de ces deux équations

$$55. \quad 2-2 = 0 = v(u_2+u_1) - u(v_2+v_1)$$

et de là

$$56. \quad u(v_1+v_2) = v(u_1+u_2).$$

Maintenant il n'y a que *deux cas.* Ou u et v sont premiers entre eux, ou ils ont le nombre 2 pour facteur commun, mais aucun autre nombre.

A. Dans le *premier* cas u_1+u_2 en vertu de l'équation (56.) doit être divisible par u et v_1+v_2 par v, u et v étant premiers entre eux. Mais quelles que soient les valeurs de u_2 et v_2, elles ne seront jamais ni zéro ni $> u$ et v, de la même sorte que u_1 et v_1 ne le sont pas; donc u_1+u_2 ne pourra être que $= u$ même, et v_1+v_2 ne pourra être que v même, de sorte que

$$57. \quad u_2 = u-u_1 \quad \text{et} \quad v_2 = v-v_1.$$

Cela donne, en ayant actuellement en vertu de l'équation (37.),

$$58. \quad \begin{cases} 2\sigma_2 = vu_2 + uv_2: \\ 2\sigma_2 = v(u-u_1) + u(v-v_1) = 2uv - (uv_1 + vu_1), \end{cases}$$

c'est à dire

$$2\sigma_2 = 2s - 2\sigma_1,$$

ou bien

$$59.\quad \sigma_2 = s - \sigma_1,$$

comme nous l'avons avancé.

B. Dans le *second* cas l'équation (56.) étant divisé par 2 se réduit à

$$60.\quad \tfrac{1}{2}u(v_1+v_2) = \tfrac{1}{2}v(u_1+u_2).$$

Puisque ici $\frac{1}{2}u$ et $\frac{1}{2}v$ sont premier entre eux, il faut que u_1+u_2 soit divisible par $\frac{1}{2}u$ et v_1+v_2 par $\frac{1}{2}v$, de sorte que

$$61.\quad u_1+u_2 = N.\tfrac{1}{2}u \quad \text{et}$$

$$62.\quad v_1+v_2 = N.\tfrac{1}{2}v.$$

Mais dans le cas actuel l'équation de condition (53.) se réduit de son côté à

$$61.\quad 1 = \tfrac{1}{2}vu_2 - \tfrac{1}{2}uv_2;$$

où u_2 et v_2 ne sont ni zéro ni $> \frac{1}{2}u$ et $\frac{1}{2}v$, de la même manière que u_1 et v_1 ne le sont pas.

En même temps les autres valeurs $\frac{1}{2}u+u_2$ et $\frac{1}{2}v+v_2$ de u_2 et v_2 satisfont encore l'équation (53.), ces valeurs étant plus petites que u et v; de même que les autres valeurs $\frac{1}{2}u+u_1$ et $\frac{1}{2}v+v_1$ satisfont encore l'équation de condition $2 = uv_1 - vu_1$ (38.), ces valeurs étant plus petites que u et v. Donc si l'on écrit les différentes valeurs de v_1 et u_1, v_2 et u_2 comme suit:

$$63.\quad u_1 = \overset{1}{u}_1,\quad \tfrac{1}{2}u+u_1 = \overset{2}{u}_1,\quad v_1 = \overset{1}{v}_1,\quad \tfrac{1}{2}v+v_1 = \overset{2}{v}_1,$$

$$64.\quad u_2 = \overset{1}{u}_2,\quad \tfrac{1}{2}u+u_2 = \overset{2}{u}_2,\quad v_2 = \overset{1}{v}_2,\quad \tfrac{1}{2}v+v_2 = \overset{2}{v}_2,$$

on aura

$$65.\quad \overset{1}{u}_1+\overset{1}{u}_2 = \tfrac{1}{2}u,\quad \overset{1}{u}_1+\overset{2}{u}_2 = u,\quad \overset{2}{u}_1+\overset{1}{u}_1 = u,\quad \overset{2}{u}_1+\overset{2}{u}_2 = \tfrac{3}{2}u,$$

$$66.\quad \overset{1}{v}_1+\overset{1}{v}_2 = \tfrac{1}{2}v,\quad \overset{1}{v}_1+\overset{2}{v}_2 = v,\quad \overset{2}{v}_1+\overset{1}{v}_1 = v,\quad \overset{2}{v}_1+\overset{2}{v}_2 = \tfrac{3}{2}v$$

et

$$67.\quad \overset{1}{u}_2 = \tfrac{1}{2}\overset{1}{u}-u_1 = u-\overset{2}{u}_1,\quad \overset{2}{u}_2 = u-\overset{1}{u}_1 = \tfrac{3}{2}u-\overset{2}{u}_1,$$

$$68.\quad \overset{1}{v}_2 = \tfrac{1}{2}\overset{1}{v}-v_1 = v-\overset{2}{v}_1,\quad \overset{2}{v}_2 = v-\overset{1}{v}_1 = \tfrac{3}{2}v-\overset{2}{v}_1.$$

Donc en désignant également par les accents 1 et 2 les deux valeurs de σ_1 et σ_2, savoir

$$69.\quad \overset{1}{\sigma}_1 = \tfrac{1}{2}(u\overset{1}{v}_1+v\overset{1}{u}_1) \quad \text{et} \quad \overset{2}{\sigma}_1 = \tfrac{1}{2}(u\overset{2}{v}_1+v\overset{2}{u}_1)\ (37.) \quad \text{et}$$

$$70.\quad \overset{1}{\sigma}_2 = \tfrac{1}{2}(u\overset{1}{v}_2+v\overset{1}{u}_2) \quad \text{et} \quad \overset{2}{\sigma}_2 = \tfrac{1}{2}(u\overset{2}{v}_2+v\overset{2}{u}_2)\ (58.),$$

on aura

$$71.\quad \overset{1}{\sigma}_1 = \tfrac{1}{2}(u\overset{1}{v}_1+vu_1) \quad \text{et} \quad \overset{2}{\sigma}_1 = \tfrac{1}{2}(u(\tfrac{1}{2}v+\overset{1}{v}_1)+v(\tfrac{1}{2}u+\overset{1}{u}_1)) = \tfrac{1}{2}s+\overset{1}{\sigma}_1,$$

$$72. \quad \begin{cases} \overset{1}{\sigma}_2 = \frac{1}{2}(u(\frac{1}{2}v - \overset{1}{v}_1) + v(\frac{1}{2}u - \overset{1}{u}_1)) = \frac{1}{2}s - \overset{1}{\sigma}_1, \\ \overset{2}{\sigma}_2 = \frac{1}{2}(u(v - \overset{1}{v}_1) + v(u - \overset{1}{u}_1)) = s - \overset{1}{\sigma}_1, \end{cases}$$

donc

$$73. \quad \overset{1}{\sigma}_1 + \overset{2}{\sigma}_2 = s \quad \text{et} \quad \overset{2}{\sigma}_1 + \overset{1}{\sigma}_2 = s$$

et par conséquent

$$74. \quad \overset{1}{\sigma}_2 = s - \overset{2}{\sigma}_1 \quad \text{et}$$

$$75. \quad \overset{2}{\sigma}_2 = s - \overset{1}{\sigma}_1,$$

c'est à dire: les deux valeurs $\overset{1}{\sigma}_2$ et $\overset{2}{\sigma}_2$ de σ_2, convenables aux facteurs v et u de $s = vu$, se trouvent, en retranchant de s celles $\overset{2}{\sigma}_1$ et $\overset{1}{\sigma}_1$ de σ_1; comme il a été avancé.

XIX. Si les facteurs u et v de $s = uv$ sont *impairs* tous les deux, de sorte que s est impair soi-même, la valeur de σ, qui convient à ces facteurs, ne conviendra à aucun autre couple de facteurs x et y de $s = xy$, également impairs.

Car soit λ le plus grand diviseur commun de u et x et

$$76. \quad u = \lambda u_0, \quad x = \lambda x_0,$$

de sorte que u_0 et x_0 sont *premiers entre eux*, on aura

$$77. \quad \frac{u}{x} = \frac{u_0}{x_0}.$$

Dans le cas où u et x sont premiers entre eux, on aura $\lambda = 1$, $u_0 = u$ et $x_0 = x$.

Si u est un multiple de x, on aura $\lambda = x$ et $x_0 = 1$.

Si x est un multiple de u, on aura $\lambda = u$ et $u_0 = 1$.

De (77.) on tire

$$78. \quad x = u\frac{x_0}{u_0}$$

et y étant $= \frac{s}{x} = \frac{uv}{x}$, on a

$$79. \quad y = \frac{uv}{u\frac{x_0}{u_0}} = v\frac{u_0}{x_0}.$$

Maintenant soient x_1 et y_1 les nombres qui satisfont l'équation de condition

$$80. \quad 2 = xy_1 - yx_1 \text{ (38.)}$$

propre aux facteurs x et y, et soient σ_u et σ_x les valeurs de σ qui conviennent aux deux couples des facteurs u et v et x et y de s, de sorte qu'on ait

$$\left.\begin{aligned} 81. \quad \sigma_u &= uv_1 + 1 = vu_1 - 1, \\ 82. \quad \sigma_x &= xy_1 + 1 = yx_1 - 1, \end{aligned}\right\} \text{(35. et 36.)}$$

on auroit

$$83.\quad uv_1 = xy_1 \quad \text{et}$$
$$84.\quad vu_1 = yx_1$$

si σ_u étoit $= \sigma_x$.

Mais les équations (83.) et (84.), en y substituant les expressions de x et y (78.) et (79.), donnent la première $uv_1 = u\frac{x_0}{u_0}y_1$, c'est à dire

$$85.\quad \frac{v_1 u_0}{x_0} = y_1$$

et la seconde $vu_1 = v\frac{u_0}{x_0}x_1$, c'est à dire

$$86.\quad \frac{u_1 x_0}{u_0} = x_1.$$

Maintenant u_0 et x_0 étant premiers entre eux, et x et y, ainsi que x_1 et y_1 étant des nombres entiers, les équations (78. et 86.) font voir que u et u_1 doivent être divisibles par u_0 tous les deux, et les équations (79. et 85.) font voir *qu'en même temps* v et v_1 doivent être divisibles par x_0 tous les deux.

Mais en vertu de l'équation de condition

$$87.\quad uv_1 - vu_1 = 2 \quad (38.)$$

ni u et u_1 ni v et v_1 ne peuvent généralement être divisibles que par les nombres 1 et 2 puisque 2 n'est divisible par aucun autre nombre, et si u et u_1 sont divisibles par 2, v et v_1 ne sont plus divisibles que par 1 et réciproquement; car si u et u_1 et v et v_1 étoient divisibles en même temps par 2, le nombre 2 à droite dans (87.) devrait être divisible par $2.2 = 4$, ce qui n'est pas.

Donc les diviseurs communs u_0 et x_0 de u et u_1 et de v et v_1 ne peuvent être que les nombres 1 ou 2, et nommément, si u_0 est $=2$, v_0 ne peut être que 1, et réciproquement.

Dans le cas actuel ni u_0 ni x_0, diviseurs de u et x, ne peuvent être $=2$, u et x étant *impairs*, suivant l'hypothèse. Donc ici u_0 et x_0 ne peuvent être que 1 tous les deux en même temps, ce qui donne $\frac{u}{x} = \frac{1}{1} = 1$ (77.) et par suite

$$88.\quad u = x \quad \text{et} \quad v = y \quad (79.).$$

Donc dans le cas de u et x *impairs*, il n'existe aucun autre couple de facteurs x et y de s auquel conviendroit la même valeur de σ qui convient aux facteurs u et v.

XX. Si des deux facteurs u et v de $s = uv$

A. u est *impair*, l'autre v *pair*, la valeur de σ qui convient aux facteurs u et v, conviendra en même temps aux facteurs

89. $x = 2u$ et $y = \frac{1}{2}v$ de $s = xy$,

mais à aucun autre couple de facteurs.

B. Si u est *pair* et v *impair*, la valeur de σ qui convient aux facteurs u et v, conviendra en même temps aux facteurs

90. $x = \frac{1}{2}u$ et $y = 2v$ de $s = xy$,

mais à aucun autre couple de facteurs.

Pour trouver d'autres facteurs x et y auxquels pourroit convenir la même valeur de σ, qui convient aux facteurs u et v, supposons

91. $u = \lambda u_0$ et $x = \lambda x_0$,

comme (76.). Nous avons vu dans (XIX.) que u_0 et x_0 ne peuvent jamais avoir d'autres valeurs que 1 et 2 et que u_0 est $= 2$ si x_0 est 1 et que u_0 est $= 1$ si x_0 est 2.

Mais $u_0 = 1$ et $x_0 = 2$ donnent en vertu de (76.)

92. $u = \lambda$, $x = 2\lambda$, donc $x = 2u$ et $u = \frac{1}{2}x$,

et $u_0 = 2$ et $x_0 = 1$ donnent

93. $u = 2\lambda$ et $x = \lambda$, donc $u = 2x$ et $x = \frac{1}{2}u$.

Premier cas de u impair et v pair.

Dans ce cas $x = \frac{1}{2}u$ (93.) n'a pas lieu. Donc il n'existe ici que l'unique valeur $2u$ de x (91.) et par suite l'unique valeur $\frac{1}{2}v$ de y, auxquelles pourra convenir la même valeur de σ qui convient aux facteurs u et v.

Pour voir si cela a lieu effectivement, écrivons $2u$ et $\frac{1}{2}v$ au lieu de x et y dans l'équation de condition

94. $xy_1 - yx_1 = 2$ (38.)

qui doit être satisfaite par les nouveaux facteurs x et y, nous aurons

95. $2uy_1 - \frac{1}{2}vx_1 = 2$.

Quelles que soient ici les valeurs de x_1 et y_1, il n'y en a *qu'un seul* couple $< 2u$ et $\frac{1}{2}v$ si $2u$ et $\frac{1}{2}v$ sont premiers entre eux, c'est à dire si $\frac{1}{2}v$ est *impair*, comme u l'est, et il n'y en a *que deux* couples de valeurs de x_1 et $y_1 < 2u$ et $\frac{1}{2}v$, savoir les deux valeurs x_1 et $x_1 + \frac{1}{2}(2u) = x_1 + u$ de x_1 et les deux valeurs y_1 et $y_1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}v) = y_1 + \frac{1}{4}v$ de y_1, x_1 étant $< u$ et $y_1 < \frac{1}{4}v$ dans le cas où $2u$ et $\frac{1}{2}v$ sont divisibles toutes les deux par 2, c'est à dire si $\frac{1}{2}v$ est pair comme $2u$ l'est.

Mais l'un des couples de valeurs de x_1 et y_1 qui satisfont l'équation (95.) est évidemment celui-ci:

$$96.\quad x_1 = 2u_1 \quad \text{et} \quad y_1 = \tfrac{1}{2}v_1,$$

car ces valeurs de x_1 et y_1 substituées dans (95.) donnent

$$97.\quad 2u.\tfrac{1}{2}v_1 - \tfrac{1}{2}v.2u_1 = 2 = uv_1 - vu_1,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation de condition (38.) elle même, qui doit être satisfaite par les facteurs u et v. D'ailleurs les valeurs $2u_1$ et $\frac{1}{2}v_1$ de x_1 et y_1 (96.) ont toujours lieu en nombres *entiers*. Car v a été supposé *pair*, donc vu_1 est pair et $uv = 2 + vu$, l'est également, et aussi v_1, u étant *impair*; donc $\frac{1}{2}v_1 = y_1$ est entier. Donc $2u_1$ et $\frac{1}{2}v_1$ constituent effectivement le seul couple de valeurs de x_1 et y_1 qui ont lieu en (96.) dans le cas de $\frac{1}{2}v$ *impair* et l'un des deux couples de valeurs que peuvent avoir x_1 et y_1 dans les cas où $\frac{1}{2}v$ est *pair*.

Mais les valeurs de σ qui puissent convenir aux facteurs x et y de $s = xy$ s'expriment par

$$98.\quad \sigma_x = xy_1 + 1 = yx_1 - 1 \quad (35.\ \text{et}\ 36.),$$

pendant que celles qui conviennent aux facteurs u et v sont

$$99.\quad \sigma_u = uv_1 + 1 = vu_1 - 1 \quad (35.\ \text{et}\ 36.).$$

Donc, faisant dans (99.) $x = 2u$, $y = \frac{1}{2}v$ (92.) et $x_1 = 2u$, $y_1 = \frac{1}{2}v_1$ (96.), on a

$$100.\quad \sigma_x = 2u.\tfrac{1}{2}v_1 + 1 = \tfrac{1}{2}v.2u_1 - 1 = uv_1 + 1 = vu_1 - 1$$

et suivant (99.)

$$101.\quad \sigma_x = \sigma_u.$$

Donc la même valeur σ_u de σ, qui convient aux facteurs u et v de $s = uv$, convient aussi aux facteurs $2u$ et $\frac{1}{2}v$ dans le cas où u est impair et v pair, mais à aucun autre couple de facteurs.

Second cas de u pair et v impair.

Dans ce cas $u = \frac{1}{2}x$ (92.) n'a pas lieu; car à cause de $uv = xy = s$, cela donneroit $uv = 2uy$ et par suite $y = \frac{1}{2}v$, ce qui ne se peut pas. Donc il n'y a qu'à supposer $x = \frac{1}{2}u$ suivant (93.) et par conséquent $y = 2v$. Cela étant substitué dans (94.) on a

$$102.\quad \tfrac{1}{2}uy_1 - 2vx_1 = 2.$$

A cette équation conviennent les valeurs

$$103.\quad \tfrac{1}{2}u_1 \text{ de } x_1 \quad \text{et} \quad 2v_1 \text{ de } y_1.$$

Il faut donc que ces valeurs de x_1 et y_1 soient ou le seul ou l'un des deux couples de valeurs que peuvent avoir x_1 et y_1 dans (102.).

Mais ces valeurs de x_1 et y_1 et celles $\frac{1}{2}u$ et $2v$ de x et y, étant substituées dans l'expression (98.) de σ_x, donnent

104. $\sigma_x = \frac{1}{2}u.2v_1 + 1 = 2v.\frac{1}{2}u_1 - 1 = uv_1 + 1 = vu_1 - 1$,

donc on trouve comme ci-dessus

$$105. \quad \sigma_x = \sigma_u \quad (99.).$$

Par conséquent la même valeur σ_u de σ qui convient aux facteurs u et v de $s = uv$ convient aussi aux facteurs $\frac{1}{2}u$ et $2v$ dans le cas de u pair et v impair, mais à aucun autre couple de facteurs.

XXI. Si les deux facteurs u et v de $s = uv$ sont divisibles par 2 tous les deux, mais étant divisés par 2 donnent des quotiens tous deux *impairs,* les deux valeurs $\overset{1}{\sigma}$ et $\overset{2}{\sigma}$ de σ qui, dans le cas supposé de u et v pairs, ont toujours lieu suivant (XVII.) conviendront en même temps l'une aux facteurs

$$106. \quad \overset{1}{x} = \tfrac{1}{2}u, \quad \overset{1}{y} = 2v,$$

l'autre aux facteurs

$$107. \quad \overset{2}{x} = 2u, \quad \overset{2}{y} = \tfrac{1}{2}v.$$

A. Car dans le cas supposé le facteur $\overset{1}{x} = \frac{1}{2}u$ est *impair* pendant que l'autre $\overset{1}{y} = 2v$ est *pair*. Mais suivant ce qui a été démontré (XX. *A.*) la valeur de σ qui convient à ces facteurs $\overset{1}{x}$ et $\overset{1}{y}$, qui existe toujours et qui suivant (XVI.) est unique, $\overset{1}{x}$ et $\overset{1}{y}$ étant premiers entre eux, conviendra en même temps aux facteurs $2\overset{1}{x}$ et $\frac{1}{2}\overset{1}{y}$, c'est à dire aux facteurs u et v, $2\overset{1}{x}$ étant u et $\frac{1}{2}\overset{1}{y} = v$ (106.). Donc la valeur σ qui convient aux facteurs $\overset{1}{x}$ et $\overset{1}{y}$ (106.) sera nécessairement une de celles qui conviennent aux facteurs u et v.

B. En second lieu $\frac{1}{2}v$ est *impair* pendant que $2u$ est *pair;* donc des deux facteurs $\overset{2}{x}$ et $\overset{2}{y}$ le premier est *pair* et le second *impair,* et suivant ce qui a été démontré (XX. *B.*) la valeur de σ qui convient à ces facteurs, qui existe toujours et qui suivant (XVI.) est unique, $\overset{1}{x}$ et $\overset{1}{y}$ étant premiers entre eux, conviendra en même temps aux facteurs $\frac{1}{2}\overset{2}{x}$ et $2\overset{2}{y}$, c'est à dire aux facteurs u et v, $2\overset{2}{x}$ étant $= u$ et $2\overset{2}{y} = v$ (107.). Donc la valeur de σ qui convient aux facteurs $\overset{2}{x}$ et $\overset{2}{y}$, sera également une de celles qui conviennent aux facteurs u et v.

C. Mais la valeur de σ qui convient aux facteurs $\overset{1}{x} = \frac{1}{2}u$ et $\overset{1}{y} = 2v$ et en même temps aux facteurs u et v (*A.*) ne peut pas *coïncider* avec la valeur de σ qui convient aux facteurs $\overset{2}{x} = 2u$ et $\overset{2}{y} = \frac{1}{2}v$ et en même temps aux facteurs u et v (*B.*). Car si cela étoit, la même valeur de σ qui convient aux facteurs $\overset{1}{x}$ et $\overset{1}{y}$ conviendroit aussi aux facteurs $\overset{2}{x} = 4\overset{1}{x}$ $\overset{2}{y} = \frac{1}{4}\overset{1}{y}$, et cela ne se peut pas, puisque suivant (XX. *A.* et *B.*) la valeur de σ qui convient par ex. aux facteurs $\overset{1}{x}$ et $\overset{1}{y}$ ne peut jamais convenir en même temps à d'autres facteurs que $2\overset{1}{x}$ et $\frac{1}{2}y$ ou $\frac{1}{2}x$ et $2y$, et non pas aux facteurs $4\overset{1}{x}$ et $\frac{1}{4}\overset{1}{y}$. Donc les valeurs de σ qui conviennent aux facteurs $\overset{1}{x} = \frac{1}{2}u$, $\overset{1}{y} = 2v$ et $\overset{2}{x} = 2u$, $\overset{2}{y} = \frac{1}{2}v$ et en même temps aux facteurs u et v, sont nécessairement les deux valeurs *différentes* $\overset{1}{\sigma}$ et $\overset{2}{\sigma}$ de σ correspondant aux facteurs u et v.

XXII. Si des deux facteurs u et v de $s = uv$

A. u est impair, v pair, la valeur de σ qui leur convient, ne peut pas convenir à un autre couple de facteurs x et y dont l'un est pair l'autre impair, si ce n'est que $\frac{1}{2}v$ soit impair, et

B. Si u est pair, v impair, la valeur de σ qui convient à ces deux facteurs, ne conviendra à un second couple de facteurs x et y dont l'un est pair l'autre impair, si ce n'est que $\frac{1}{2}u$ soit impair.

Car suivant (XX. *A.* et *B.*) la valeur de σ qui convient aux facteurs u et v, ne convient jamais en même temps à d'autres couples de facteurs qu'à ceux-ci: $x = 2u$, $y = \frac{1}{2}v$ et $x = \frac{1}{2}u$, $y = 2v$. Donc si dans le cas de v pair (*A.*) $\frac{1}{2}v = y$ n'étoit pas impair, $x = 2u$ et $y = \frac{1}{2}v$ ne seroient pas l'un pair, l'autre impair, mais au contraire pairs tous les deux, et si dans le cas de u pair (*B.*), $\frac{1}{2}u = x$ n'étoit pas impair, $x = \frac{1}{2}u$ et $y = 2v$ ne seroient pas non plus l'un pair l'autre impair, comme cela doit être, mais pairs tous les deux.

XXIII. Si les deux facteurs u et v de $s = uv$ sont *pairs tous les deux*, cas où leur conviennent deux valeurs $\overset{1}{\sigma}_u$ et $\overset{2}{\sigma}_u$ de σ (XVII.), aucune de ces deux valeurs de σ peut coïncider avec l'une ou l'autre des deux valeurs $\overset{1}{\sigma}_x$ et $\overset{2}{\sigma}_x$ de σ appartenantes à deux autres facteurs quelconques x et y de $s = xy$ également *pair tous les deux.*

Car d'abord quels que soient les facteurs u et v ou x et y, supposés pairs tous les deux: il faut toujours qu'au moins un d'eux divisé par 2 donne pour quotient un nombre *impair:* car si ces facteurs tous les deux divisés par 2 donnoient pour quotients des nombres pairs, ils auroient pour facteur commun un nombre plus grand que 2, et aux facteurs de ce genre il ne convient pas suivant (XIII.) aucun σ.

Cela posé, soient

A. en premier lieu $\frac{1}{2}u$ et $\frac{1}{2}x$ *impairs* en même temps, la valeur de σ qui convient aux facteurs $\frac{1}{2}u$ et $2v$, valeur qui suivant (XIV.) est unique, $\frac{1}{2}u$ et $2v$ étant premiers entre eux et que nous désignerons par $\sigma_{\frac{1}{2}u}$, conviendra aussi suivant (XX. *A.*) en même temps aux facteurs u et v; donc on aura ou $\sigma_{\frac{1}{2}u}=\overset{1}{\sigma}_u$, ou $\sigma_{\frac{1}{2}u}=\overset{2}{\sigma}_u$. Par la même raison on aura ou $\sigma_{\frac{1}{2}x}=\overset{1}{\sigma}_x$, ou $\sigma_{\frac{1}{2}x}=\overset{2}{\sigma}_x$. Mais $\sigma_{\frac{1}{2}u}$ et $\sigma_{\frac{1}{2}x}$ ne peuvent être égaux. Car les deux couples de facteurs $\frac{1}{2}u$ et $2v$ et $\frac{1}{2}x$ et $2y$, auxquels conviennent les valeurs $\sigma_{\frac{1}{2}u}$ et $\sigma_{\frac{1}{2}x}$ de σ, sont du nombre de ceux dont le premier est impair, le second pair, et suivant (XXII. *A.*) la valeur de $\sigma_{\frac{1}{2}u}$, qui convient aux facteurs $\frac{1}{2}u$ et $2v$ par exemple, ne pourra convenir à aucun autre couples de facteurs dont l'un est pair l'autre impair, si ce n'est que $\frac{1}{2}(2v)=v$ soit impair, ce qui n'est pas, v étant *pair* par hypothèse.

Donc $\sigma_{\frac{1}{2}u}$ étant égal à l'une des deux valeurs de σ_u, par ex. à $\overset{1}{\sigma}_u$ et $\sigma_{\frac{1}{2}x}$ à l'une des deux valeurs de σ_x, par ex. à $\overset{1}{\sigma}_x$, on ne peut avoir $\overset{1}{\sigma}_u=\overset{1}{\sigma}_x$. Mais les deux valeurs de σ_u et celles de σ_x sont toujours différentes l'une de l'autre de $\frac{1}{2}s$ (XVII.): donc, si peut-être, bien que $\overset{1}{\sigma}_u$ ne soit pas $\overset{1}{\sigma}_x$, $\overset{1}{\sigma}_u$ était $=\overset{2}{\sigma}_x$, on auroit $\overset{1}{\sigma}_u=\overset{2}{\sigma}_x=\overset{1}{\sigma}_x\pm\frac{1}{2}s$ et par suite, $\overset{2}{\sigma}_u$ étant $=\overset{1}{\sigma}_u\pm\frac{1}{2}s$, $\overset{1}{\sigma}_u\pm s=\overset{1}{\sigma}_x\pm\frac{1}{2}s\pm\frac{1}{2}s$, c'est à dire ou $\overset{1}{\sigma}_u\pm s=\overset{1}{\sigma}_x\pm s$ ou $\overset{1}{\sigma}_u\pm s=\overset{1}{\sigma}_x\pm 0=\overset{1}{\sigma}_x$. De ces deux équations on tire ou $\overset{1}{\sigma}_u=\overset{1}{\sigma}_x\pm 2s$ ou $\overset{1}{\sigma}_u=\overset{1}{\sigma}_x\pm s$ ou $\overset{1}{\sigma}_u=\overset{1}{\sigma}_x$; mais aucune de ces égalités ne peut avoir lieu, $\overset{1}{\sigma}_u$ étant $<s$, positif et non pas $=\overset{1}{\sigma}_x$.

Donc dans notre cas aucune des deux valeurs de σ_u ne peut être égale à aucune des deux valeurs de σ_x.

D'ailleurs il est ici évidemment indifférent que $\frac{1}{2}v$ et $\frac{1}{2}y$ soient pairs ou impairs.

Et si au lieu de $\frac{1}{2}u$ et $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}v$ et $\frac{1}{2}y$ étoient impairs en même temps, le raisonnement à faire seroit semblable à celui ci-dessus et le résultat seroit le même.

B. Soient en second lieu $\frac{1}{2}u$ et $\frac{1}{2}y$ impairs en même temps, on aura comme ci-dessus ou $\sigma_{\frac{1}{2}u} = \overset{1}{\sigma}_u$ ou $\sigma_{\frac{1}{2}u} = \overset{2}{\sigma}_u$. Et comme la valeur de σ, qui convient aux facteurs $2x$ et y, valeur qui suivant (XIV.) est unique, $2x$ et y étant premiers entre eux, et que nous désignerons par σ_{2x}, conviendra aussi suivant (XX. *B.*) en même temps aux facteurs u et v, on aura ou $\sigma_{2x} = \overset{1}{\sigma}_x$ ou $\sigma_{2x} = \overset{2}{\sigma}_x$. Mais $\sigma_{\frac{1}{2}u}$ et σ_{2x} ne peuvent être égaux. Car les deux couples de facteurs $\frac{1}{2}u$ et $2v$ et $2x$ et $\frac{1}{2}y$, auxquels conviennent les valeurs $\sigma_{\frac{1}{2}u}$ et σ_{2x} de σ, sont du nombre de ceux dont l'un des deux facteurs est pair, l'autre impair, et suivant (XXII. *A.*) la valeur de $\sigma_{\frac{1}{2}u}$ qui convient aux facteurs $\frac{1}{2}u$ et $2v$ par ex., ne pourra convenir à aucun autre couple de facteurs dont l'un est pair l'autre impair, si ce n'est que $\frac{1}{2}(2v) = v$ soit impair, ce qui n'est pas, v étant pair par hypothèse.

Donc $\sigma_{\frac{1}{2}u}$ étant égal à l'une des deux valeurs de σ_u, par ex. à $\overset{1}{\sigma}_u$, et σ_{2x} à l'une des deux valeurs de σ_x, à $\overset{1}{\sigma}_1 x$ par ex.: on ne peut avoir $\overset{1}{\sigma}_u = \overset{1}{\sigma}_x$. De là on conclut par les mêmes raisonnements que ci-dessus, qu'aucune valeur de σ_u ne peut être égale à aucune des valeurs de σ_x, et cela indépendamment de ce que $\frac{1}{2}v$ et $\frac{1}{2}x$ soient pairs ou impairs. La même chose aura lieu dans le cas ou au lieu de $\frac{1}{2}u$ et $\frac{1}{2}y$, $\frac{1}{2}v$ et $\frac{1}{2}x$ étoient impairs en même temps.

Donc dans aucun cas aucune des deux valeurs de σ, qui conviennent aux facteurs u et v *pair tous les deux*, ne peut coïncider avec aucune des deux valeurs de σ, qui conviennent aux facteurs x et y, également *pairs tous les deux*.

XXIV. Maintenant à l'aide de ces différentes lois d'existence et de correspondance des valeurs de σ, propres à satisfaire l'équation (28) ou celle (29.) pour les différentes valeurs des facteurs u et v de s, il sera facile de juger *le nombre* $2n$ *des valeurs* existantes de σ et par là, suivant les expressions (25. et 26. X.), *le signe* de l'unité dans l'expression $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots . \sigma_\varphi = Ns \pm 1$. Pour cela il ne s'agit plus que de la décomposition de s en facteurs u et v, pour connoître le nombre des couples de

ces facteurs tant de ceux qui sont impairs tous les deux, que de ceux dont l'un est pair, l'autre impair, et de ceux qui sont pairs tous les deux.

XXV. L'expression générale de s est

$$108.\quad s = 2^m p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \dots p_k^{m_k},$$

$p_1, p_2, p_3, \dots p_k$ étant des nombres premiers impairs et $m, m_1, m_2, m_3, \dots m_k$ des nombres entiers et positifs quelconques. Evidemment cette expression embrasse tous les cas possibles.

D'abord nous remarquerons qu'en décomposant s en deux facteurs u et v propres à admettre des valeurs de σ, les facteurs égaux dans les puissances de $p_1, p_2, p_3, \dots p_k$ ne doivent jamais être separés pour entrer les uns dans u et les autres dans v; car si par ex. un ou plusieurs des facteurs égaux p_1 de $p_1^{m_1}$ se présentoient dans u et les autres dans v, les deux facteurs u et v auroient p_1 ou une puissance de p_1, c'est à dire des nombres plus grands que 2 pour *facteurs communs;* et aux facteurs de ce genre ne convient aucune valeur de σ (XIII.). Donc, pour ce qui regarde la décomposition de s, dont il s'agit ici, les *puissances* $p_1^{m_1}$, $p_2^{m_2}$, $p_3^{m_3}$, $\dots p_k^{m_k}$ n'y figurent que comme des nombres indivisibles. Elles pourront donc être désignés par de simples lettres, par ex. par P_1, P_2, $P_3, \dots P_k$. L'expression générale de s (108.) se réduit par là à la suivante plus simple:

$$109.\quad s = 2^m P_1 P_2 P_3 \dots P_k.$$

En second lieu les facteurs égaux 2 de la puissance 2^m pourront à la vérité être séparés pour entrer en u et en v en même temps, parceque u et v peuvent avoir le nombre 2 pour facteur commun (XIII.). Mais à cause de cette circonstance même, il ne sera permis que de détacher 2 seul de 2^m, mais non pas une puissance plus élevée de 2. Car si l'on introduisoit par ex. 2^μ (μ étant >1) dans u et $2^{m-\mu}$ ($m-\mu$ étant encore >1) dans v, u et v auroient pour facteur commun un nombre plus grand que 2; ce qui ne doit pas être (XIII.). Donc généralement les deux facteurs 2 et 2^{m-1} de 2^m, de leur coté, figurent ici comme des nombres indivisibles. L'expression générale de s (109.), mise sous la forme propre à la décomposition dont il s'agit, est donc

$$110.\quad s = 2 . 2^{m-1} P_1 P_2 P_3 \dots P_k.$$

XXVI. Maintenant pour trouver tous les couples de facteurs u et v qui peuvent avoir lieu, il n'y aura qu'à donner à l'un des facteurs seul,

par ex. à u, toutes les valeurs possibles. *Les réciproques* $s = vu$ de $s = uv$, auxquelles il faut avoir égard également, seront déjà touchées par là en même temps: car en donnant à u *toutes* les valeurs *possibles*, on touchera nécessairement la valeur correspondante de $v = \frac{s}{u}$ pour chaque valeur de u.

Cela posé, la totalité des valeurs possibles de u pourra être ordonnée en quatre séries.

La *première série* contiendra toutes les valeurs *impaires* de u, savoir les nombres

$$111. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1,\ P_1,\ P_2,\ P_3 \ldots . P_k \\ P_1 P_2,\ P_1 P_3 \ldots . P_1 P_k,\ P_2 P_3,\ P_2 P_4 \ldots . P_2 P_k,\ P_3 P_4 \text{ etc.} \\ P_1 P_2 P_3,\ P_1 P_2 P_4 \ldots . P_1 P_2 P_k,\ P_1 P_3 P_4 \text{ etc.} \\ P_1 P_2 P_3 P_4 \ldots . P_1 P_2 P_3 P_5 \text{ etc.} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_1 P_2 P_3 \ldots . P_k, \end{array} \right.$$

c'est à dire: tous les facteurs impairs P_1, P_2, P_3, ... P_k eux mêmes, en y ajoutant le facteur 1, tous les produits des facteurs P_1, P_2, P_3, ... P_k deux à deux, trois à trois, quatre à quatre etc. jusqu'au produit $P_1 P_2 P_3 \ldots . P_k$.

La *seconde série* contiendra toutes ces mêmes valeurs de u, multipliées par le facteur 2 de s.

La *troisième série* contiendra également toutes les valeurs de u de la première série, multipliées par le facteur 2^{m-1} de s.

La *quatrième série* enfin contiendra encore toutes les valeurs de u de la première série, multipliées par le facteur 2^m de s.

On épuisera évidemment par là toutes les valeurs possibles de u.

Le nombre des termes des séries sera le même dans toutes les quatre séries; car chaque terme de la première série revient dans les trois autres, multiplié seulement par 2, 2^{m-1} et 2^m.

Ce nombre sera 2^k. Car en désignant les coëfficients binomiaux relatifs à l'exposant k, par k_1, k_2, k_3, ... k_{k-1}, $k_k = 1$, le nombre des termes de la première ligne (111.) est $1 + k_1$; celui des termes de la seconde ligne, c'est à dire le nombre des produits des k facteurs P_1, P_2, P_3, ... P_k, pris deux à deux, est k_2; celui des termes de la troisième ligne, c'est à dire le nombre des produits de k facteurs P_1, P_2, P_3, ... P_k pris trois à trois, est k_3 et ainsi de suite: donc le nombre de tous les ter-

mes (111.) de la première série est

$$112. \quad 1+k_1+k_2+k_3\ldots\ldots+k_k = (1+1)^k = 2^k.$$

Dans la *première* série le premier des deux facteurs u et v est toujours *impair*, le second *pair*.

Dans la *seconde* et la *troisième* série les facteurs u et v sont *pairs* tous les deux.

Dans la *quatrième* série le premier des deux facteurs u et v est *pair*, le second *impair*.

XXVII. A chaque couple de facteurs u et v, dans le cas où l'un est *pair* l'autre *impair*, c'est à dire où les facteurs sont *premiers entre eux*, ne correspondra qu'une seule valeur de σ (XVI.). Donc la *première* série ainsi, que la *quatrième*, fourniront chacune 2^k valeurs de σ.

Dans le cas où les facteurs u et v sont *pairs* tous les deux, il correspondra *deux* valeurs différentes de σ à chaque couple (XVII.). Donc la *deuxième*, ainsi que la *troisième* série, fourniront chacune $2.2^k = 2^{k+1}$ valeurs de σ.

Toutes les $2.2^{k+1} = 2^{k+2}$ valeurs de σ qu'offrent la *seconde* et la *troisième* série, seront différentes entre elles, les facteurs u et v étant pairs tous les deux (XXIII.).

Enfin toutes les $2.2^k = 2^{k+1}$ valeurs de σ qu'offrent la *première* et la *quatrième* série, se retrouveront parmi celles de la *seconde* et *troisième* série, les facteurs u et v étant l'un pair l'autre impair (XX.).

Donc le *maximum* du nombre des valeurs différentes que peut avoir σ, est 2^{k+2}.

XXVIII. Maintenant pour arriver aux résultats finaux, il n'y a plus qu'à appliquer ce qui a été dit (XXVII.) aux différents cas qui peuvent se présenter.

Premier cas $m>2$, $k>0$, c'est à dire

$$113. \quad s = 2.2^{m-1}P_1P_2P_3\ldots\ldots P_k.$$

Dans ce cas les séries (XXVI.) ont lieu toutes les quatre; donc le nombre $2n$ des valeurs différentes de σ sera, comme il a été déjà trouvé dans (XXVII.), $= 2^{k+2}$. Cela donne

$$114. \quad n = 2^{k+1},$$

nombre toujours *pair*. Donc suivant (25. X.) on a dans ce cas

$$115. \quad \sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\ldots\sigma_\nu = Ns+1.$$

Second cas $m > 2$, $k = 0$, c'est à dire

$$115'. \quad s = 2.2^{m-1}, \quad \text{où} \quad m-1 > 1.$$

Dans ce cas les séries (XXVI.) ont lieu encore toutes les quatre; car bien qu'il n'existe plus aucun facteur impair $P > 1$, il reste néanmoins toujours le facteur impair 1. On trouvera donc la valeur de n pour le cas actuel en mettant seulement $k = 0$ dans (114.). Cela donne

$$116. \quad n = 2,$$

nombre pair. Donc suivant (25. X.) on a dans ce cas

$$117. \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots\ldots \sigma_\varphi = Ns + 1.$$

Troisième cas $m = 2$, $k > 0$, c'est à dire

$$118. \quad s = 2.2 P_1 P_2 P_3 \ldots\ldots P_k.$$

Dans ce cas à la vérité les séries (XXVI.) ont lieu encore toutes les quatre; mais les termes de la troisième série seront *identiquement* les mêmes que ceux de la seconde, le facteur 2^{m-1} de s étant ici *égal* au facteur 2. Donc la seconde et la troisième série n'offrent plus ensemble que 2^{k+1} valeurs différentes de σ, avec lesquelles les 2^{k+1} valeurs de la première et quatrième coïncident. Donc le nombre $2n$ des valeurs *différentes* de σ n'est ici que 2^{k+1} et cela donne

$$119. \quad n = 2^k,$$

nombre toujours *pair*, k ayant été supposé > 0. Donc en vertu de (25. X.) on a dans le cas actuel

$$120. \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots\ldots \sigma_\varphi = Ns + 1.$$

Quatrième cas $m = 2$, $k = 0$, c'est à dire

$$121. \quad s = 2.2 = 4.$$

Dans ce cas les quatre séries existent toujours; mais comme dans le troisième cas, les termes de la troisième série coïncident avec ceux de la seconde. Donc pour avoir la valeur de n dans ce cas, il n'y a qu'à faire $k = 0$ dans (119.). Cela donne

$$122. \quad n = 2^0 = 1,$$

nombre *impair*. Donc en vertu de (26. X.) on a ici

$$123. \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots\ldots \sigma_\varphi = Ns - 1.$$

Cinquième cas $m = 1$, $k > 1$, c'est à dire

$$124. \quad s = 2 P_1 P_2 P_3 \ldots\ldots P_k.$$

Dans ce cas la *seconde* et la *troisième* séries (XXVI.) n'ont pas lieu du tout, parcequ'il n'existe pas ici de couples de facteurs u et v *pairs tous les deux*. Il ne reste que la *première* et la *quatrième* série qui offrent

chacune 2^k valeurs de σ. Puis tous les couples des valeurs de u et v dans les deux séries sont ici dans le cas de (XXII.), parceque tout facteur *pair*, divisé par 2, donne pour quotient un nombre *impair*. Donc les 2^k valeurs de σ qu'offre la *première* série, coïncident avec celles qu'offre la *quatrième*, et le nombre *total* des valeurs *différentes* de σ n'est pas 2.2^k, mais seulement 2^k. Donc on a $2n = 2^k$ et

$$125. \quad n = 2^{k-1},$$

nombre toujours *pair*, k ayant été supposé >1. Donc en vertu de (25. X.) on a ici

$$126. \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_\varphi = Ns + 1.$$

Sixième cas $m = 1$, $k = 1$, c'est à dire

$$127. \quad s = 2P_1.$$

Dans ce cas les circonstances, quant aux séries, sont les mêmes que dans le cas précédent. Donc pour avoir la valeur de n, il n'y a qu'à faire $k = 1$ dans (125.). Cela donne

$$128. \quad n = 2^0 = 1,$$

nombre *impair*. Donc on a ici en vertu de (26. X.)

$$129. \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_\varphi = Ns - 1.$$

Septième cas $m = 1$, $k = 0$, c'est à dire

$$130. \quad s = 2.$$

Dans ce cas les circonstances, quant aux séries, sont encore les mêmes que dans le *cinquième* cas. Mais ici le nombre 2^k des valeurs de σ, qu'offre la première série, est $2^0 = 1$, et cette seule valeur de σ coïncide avec le $2^k = 2^0 = 1$ valeur que donne la quatrième série. Donc il n'existe en total qu'une seule et unique valeur de σ, laquelle ne peut être que 1, σ devant être >0 et <2. Donc on a dans le cas actuel

$$131. \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_\varphi = Ns + 1.$$

Huitième cas $m = 0$, $k > 1$, c'est à dire

$$132. \quad s = P_1 P_2 P_3 \dots P_k.$$

Dans ce cas la *première* série *seule* a lieu dans (XXVI.), car il n'existe pas des facteurs *pairs*. Cette série offre 2^k valeurs différentes de σ. Donc on a ici $2n = 2^k$ et

$$133. \quad n = 2^{k-1},$$

nombre toujours *pair*, k ayant été supposé >1. Donc en vertu de (25. X.) on a ici

$$134. \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_\varphi = Ns + 1.$$

Neuvième cas $m=0$, $k=1$, c'est à dire

$$135. \quad s = P_1.$$

Dans ce cas les circonstances, quant aux séries, sont les mêmes que dans le cas précédent. Il n'y a donc qu'à mettre $k=1$ dans (133.) pour trouver la valeur de n. Cela donne

$$136. \quad n = 2^0 = 1,$$

nombre *impair*. Donc en vertu de (26. X.) on a ici

$$137. \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_\varphi = Ns - 1.$$

Dixième cas $m=0$, $k=0$, c'est à dire

$$138. \quad s = 1.$$

Dans ce cas, σ devant être >0 et $<s$, il n'en existe aucune valeur.

XXIX. Par cette énumération des cas, qui épuise tous les cas possibles, on voit que seulement dans le *quatrième*, *sixième* et *neuvième* cas, c'est à dire si

$$139. \quad s = 4,$$
$$140. \quad s = 2P_1 = 2p^m \text{ et}$$
$$141. \quad s = P_1 = p^m,$$

on a

$$142. \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_\varphi = Ns - 1.$$

Dans *tous* les autres cas, où il existe de nombres $\sigma < s$ premiers à s, on a

$$143. \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_\varphi = Ns + 1,$$

et c'est ce qu'énonce le théorème, qui par conséquent se trouve démontré par ce qui précède.

XXX. Nous ajouterons un exemple en nombres relatif au *premier* cas (XXVIII.), avec les valeurs calculées de σ, pour mettre en évidence ce qui a été trouvé, et nous discuterons cet exemple. Mais pour abréger, nous laisserons au lecteur à calculer et à discuter des exemples relatifs aux autres cas.

Premier cas. $m>2$, $k>0$. Soit $m=3$, $k=2$ et

$$144. \quad s = 2.2^2.3.5 = 120.$$

145.

Série I.			Série II.			Série III.			Série IV.		
u	v	σ	u	v	σ	u	v	σ	u	v	σ
1	120	1	2	60	1, 61	4	30	31, 91	8	15	31
3	40	41	6	20	41, 101	12	10	11, 71	24	5	71
5	24	49	10	12	49, 109	20	6	19, 79	40	3	79
15	8	89	30	4	29, 89	60	2	59, 119	120	1	119

On voit par ce tableau

A. Qu'ici toutes les valeurs de σ de la seconde et de la troisième série, c'est à dire les valeurs de σ correspondant aux facteurs u et v de s *pairs tous les deux*, sont différentes entre elles (XXIII.).

B. Qu'à chaque couple des facteurs u et v *pairs tous les deux* il correspond *deux* valeurs de σ différentes de $\frac{1}{2}s = 60$ l'une de l'autre (XVII.).

C. Qu'à chaque couple de facteurs u et v premiers entre eux, il correspond une *seule* valeur de σ (XVI.).

D. Que toute valeur de σ correspondante à un couple de facteurs u et v *premiers entre eux*, convient en même temps ou au couple $2u$ et $\frac{1}{2}v$ ou au couple $\frac{1}{2}u$ et $2v$, suivant que v ou u est pair (XX.).

E. Que si la valeur σ_1 de σ correspond au couple u et v des facteurs, la valeur $s-\sigma_1$ de σ correspond au couple $\frac{s}{u}$ et $\frac{s}{v}$ (XVIII.).

F. Le nombres des termes $2k$ de chaque série est ici $2^2 = 4$ (112.). Donc le nombre *total* $2n$ des valeurs *différentes* de σ, c'est à dire de celles qu'offrent les séries (II.) et (III.), celles des séries (I.) et (IV.) y étant comprises, est ici $2.2.2^k = 2^{k+2}$; donc on a $n = 2^{k+1}$ (114.).

G. Chaque valeur de σ dans les séries (II.) et (III.) (et celles des séries (I.) et (IV.) ne nous importent ici, puisqu'elles ne diffèrent pas des précédentes) trouvant son *complément* $s-\sigma$ parmi les σ des mêmes séries, on a, en faisant les produits des σ par couples, $\sigma(s-\sigma) = s\sigma - \sigma^2$ *pour chaque couple*, et cela, σ^2 étant toujours $= Ns+1$, donne $s\sigma - (Ns+1) = Ns-1$. Donc le produit des *toutes* les valeurs de σ qui, multipliées par elles mêmes et ces produits divisés par s, laissent $+1$ pour restes, est égal à $Ns-1$ élevé à une puissance dont l'exposant est le nombre n des *couples* des valeurs de σ, c'est à dire le nombre $n = 2^{k+1}$. Ce nombre étant *pair*, on a ici

$$146. \quad (Ns-1)^{2^{k+1}} = Ns+1,$$

c'est à dire, le produit des tous les nombres σ premiers avec s, qui donnent $\sigma^2 = Ns+1$, est ici $= Ns+1$.

H. Maintenant la *totalité* des nombres σ premiers avec 1 est ici

147. { 1*, 7, 11*, 13, 17, 19*, 23, 29*, 31*, 37, 41*, 43, 47, 49*, 53, 59*, 61*, 67, 71*, 73, 77, 79*, 83, 89*, 91*, 97, 101*, 103, 107, 109*, 113, 119*.

Dans cette liste des nombres σ premiers avec s on a sur le champ marqué d'un astérisque ceux qui donnent $\sigma^2 = Ns + 1$, tels qu'ils ont été trouvés dans (145.). Les autres, multipliés par couples, *mais non pas par eux-mêmes,* en donnant également $Ns + 1$ par couple, doivent parcourir tous les nombres σ *non-marqués* d'un astérisque (IX.). C'est ce qui a lieu en effet, car on trouve

$$148.\quad \begin{cases} 7.103 = 6.120 + 1 \\ 13.\ 37 = 4.120 + 1 \\ 17.113 = 16.120 + 1 \\ 23.\ 47 = 9.120 + 1 \\ 43.\ 67 = 14.120 + 1 \\ 53.\ 77 = 34.120 + 1 \\ 73.\ 97 = 59.120 + 1 \\ 83.107 = 74.120 + 1 \end{cases}$$

où, comme on voit, les facteurs à gauche parcourent tous les nombres

149. 7, 13, 17, 23, 37, 43, 47, 53, 67, 73, 77, 83, 97, 103, 107, 113

premiers avec $s = 120$ et non-marqués d'un astérisque dans (147.). Donc aussi le produit de ces nombres est $Ns + 1$. Mais le produit des nombres σ qui donnent $\sigma^2 = Ns + 1$, étoit de son côté $= Ns + 1$ (147.). Donc le produit de *tous* les nombres σ (147.) premiers avec $s = 120$ est $= Ns + 1$, comme il a été trouvé (115.).

XXXI. Le theorème de *Wilson* proprement dit se rapporte aux nombres *premiers absolus.* C'est un des cas très spéciaux compris dans le *neuvième* cas (XXIX.), savoir celui où $m = 0$, $k = 1$ et $P_1 = p$, c'est à dire $m_1 = 1$. Pour ce neuvième cas il a été trouvé généralement

$$150.\quad \sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_\varphi = Ns - 1,$$

et c'est ce qu'apprend aussi le théorème de *Wilson* proprement dit.

XXXII. Qu'il nous soit permis de remarquer que la démonstration que nous venons d'écrire n'est pas au fond aussi longue qu'elle le paroît être. Car nous n'avons ici *rien* supposé de connu. Nous avons présenté en même temps, comme lemmes, des théorèmes, qui de leur côté trouvent leur application encore en d'autres cas. Si l'on ne compte pas ces lemmes, l'étendue de la démonstration en elle-même ne se trouvera pas être très grande.

Berlin en Juin 1839.

6.

Bemerkungen über eine Stelle in Lagrange's Traité de la résolution des équations numériques, article IV. No. 79.

(Von dem Herrn Prof. *Raabe* zu Zürich.)

In den zwei ersten Nummern dieser Abtheilung IV. wird die Schwierigkeit bemerklich gemacht, aus den nach der Methode der Kettenbrüche erhaltenen transformirten Gleichungen jedesmal die zunächst liegenden ganzen Zahlen der Wurzeln derselben herauszufinden: namentlich, wenn die Wurzeln um weniger als Eins von einander abstehen. Es scheint (führt der Verfasser fort) als müfste in diesem Falle auf jede der transformirten Gleichungen das allgemeine Verfahren (das Herstellen der Gleichung mit den Quadraten der Unterschiede der Wurzeln) besonders angewendet werden, um die einer jeden Wurzel zunächst liegende ganze Zahl herauszufinden. Diesem Uebelstande abzuhelfen, wird das in No. 79. enthaltene Verfahren vorgeschlagen, welches ich dem Inhalte nach hier folgen lasse.

Es seien λ und Λ Grenzwerthe der gesuchten Wurzel der vorgelegten Gleichung in x, und durch successives Anwenden der Methode der Kettenbrüche zur nähern Bestimmung dieser Wurzel sei man auf die Gleichung

$$(a.)\qquad x = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho' t + \pi'}$$

geführt worden, wo $\frac{\pi}{\pi'}$ und $\frac{\varrho}{\varrho'}$ zwei auf einander folgende Näherungswerthe von x sind und t die Unbekannte der letzten transformirten Gleichung vorstellt: dann kann man zu Grenzwerthen für t auf folgendem Wege gelangen. Man hat aus Gleichung $(a.)$

$$(b.)\qquad t = \frac{\pi' x - \pi}{\varrho - \varrho' x}.$$

Da nun λ und Λ Grenzwerthe von x sind, so müssen die Ausdrücke

$$\frac{\pi'\lambda - \pi}{\varrho - \varrho'\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{\pi'\Lambda - \pi}{\varrho - \varrho'\Lambda}$$

Grenzwerthe von t abgeben. Beträgt daher der Unterschied dieser Grenzwerthe weniger als Eins, so hat man auch sogleich den verlangten ganzen Zahlenwerth von t; u. s. w.

Eine Folgerung, wie die hier von *Lagrange*, scheint unserer ganzen Art zu denken völlig gemäſs zu sein. Man wird kaum ein Bedenken tragen, in dem viel allgemeinern Falle, wenn aus der Gleichung

$$x = \varphi(t)$$

die Gleichung

$$t = \psi(x)$$

abgeleitet wäre, wo φ und ψ bekannte Functionen bezeichnen, eine der obigen analoge Folgerung zu machen. Gleichwohl ist diese Folgerung nur unter der Beschränkung zulässig, daſs aus beiden Functionsformen φ und ψ ein gleicher Genauigkeitsgrad für die abhängigen Variabeln erzielt werden kann.

Daſs die Gleichungen (*a.*) und (*b.*) dieser Anforderung nicht entsprechen, soll in Folgendem dargethan werden.

Die ganzen Zahlen ϱ, ϱ', π, π' haben gleiche Zeichen. Man kann daher dieselben, wie die Gröſsen t und x, mit positiven Zeichen voraussetzen. Ferner hat man, wenn

$$\frac{\varrho}{\varrho'} > x \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{\pi'} > x$$

vorausgesetzt wird, die Gleichung

$$\varrho\pi' - \pi\varrho' = 1.$$

Wird daher durch Δt der mögliche Fehler in t, und durch Δx der hieraus entspringende Fehler in x vorgestellt, so hat man, wenn in einer der Gleichungen (*a.*) oder (*b.*) t in $t + \Delta t$ und x in $x + \Delta x$ verwandelt wird, folgende Gleichung:

$$(c.) \qquad \Delta x = \frac{\Delta t}{(\varrho' t + \pi')^2 - \varrho'(\varrho' t + \pi')\Delta t}.$$

Aus dieser Gleichung sieht man, daſs ein Fehler in der Annahme des Werthes von t einen viel kleinern Fehler in der Bestimmung von x erzeugt. Ja sogar, wenn der Fehler in t, also $\Delta t > 1$ ist, wird man dennoch, nach dem was über die Beschaffenheit der Gröſsen ϱ, ϱ', π, π', t festgesetzt ist, jedesmal $\Delta x < 1$ haben.

Hieraus folgt aber auch umgekehrt: ein in x begangener Fehler, der sogar kleiner als die Einheit ist, kann einen Fehler in t hervorbringen, der die Einheit übertrifft.

Es bieten daher die oben gefolgerten zwei Grenzwerthe für t, im Allgemeinen, keinen Anhaltspunct zur Bestimmung von t dar, und, wie aus dem eben Mitgetheilten erhellet, auch dann nicht, wenn gleich ihr Unter-

schied kleiner als die Einheit ist. Nur in dem Falle, wenn eine fehlerhafte Annahme für x einen Fehler in t erzeugt, der numerisch kleiner als die Einheit ist, wird diese Folgerung statthaft sein.

Um diesen Fall herzustellen, suche man aus der Gleichung (*c.*) den Werth von Δt. Man findet

$$\Delta t = \frac{(\varrho' t + \pi')^2 \Delta x}{1 - \varrho'(\varrho' t + \pi') \Delta x}.$$

Damit nun $\Delta t < 1$ sei, mufs man die Ungleichheit haben:

$$(\varrho t' + \pi')^2 \Delta x < 1 - \varrho'(\varrho' t + \pi') \Delta x$$

oder

$$(d.) \qquad \Delta x < \frac{1}{(\varrho' t + \pi')^2 + \varrho'(\varrho' t + \pi')}.$$

Ist man mit der Bestimmung einer Wurzel x nach der Methode der Kettenbrüche zur Gleichung (*a.*) gelangt, so ist der genaueste Werth von x der Bruch $\frac{\varrho}{\varrho'}$. Wenn daher

$$\frac{\varrho}{\varrho'} - x = \Delta x$$

angenommen wird, so hat man mit Zuziehung der Gleichung (*a.*)

$$\Delta x = \frac{1}{\varrho'(\varrho' t + \pi')}.$$

Die von *Lagrange* durch λ und Λ angedeuteten Grenzwerthe von x liegen im Allgemeinen dem wahren Werthe von x nicht so nahe als der Bruch $\frac{\varrho}{\varrho'}$. Die aus denselben für x entspringenden Fehler sind daher gröfser, als der eben gefundene Bruch $\frac{1}{\varrho'(\varrho' t + \pi')}$; und dieser Bruch ist wieder gröfser als der Bruch in der Ungleichheit (*d.*). Daher kann vom Statthaben der Ungleichheit (*d.*), bei der Annahme $x = \lambda$ oder $x = \Delta$, um so weniger die Rede sein.

7.

Ueber die Sonderung der Wurzeln einer Gleichung.

(Von Herrn Dr. *Umpfenbach* zu Giefsen.)

Die Aufgabe, die Wurzeln einer Gleichung zu sondern, hat schon vielfach die Mathematiker beschäftigt. Bekannt sind die Auflösungen von *Lagrange*, *Fourier*, *Sturm* etc. Diese Auflösungen beruhen jedoch zum Theil auf sehr verwickelten Grundlagen: zum Theil führen sie auch zu sehr combinirten Rechnungen, und es hat daher noch keine derselben so recht Eingang in die Lehrbücher finden wollen. Ich will versuchen, hier ein Verfahren zu entwickeln, welches mir einfacher als die angeführten scheint.

Es sei X ein nach absteigenden ganzen und positiven Potenzen von x geordnetes Polynom von der $n$ten Ordnung. Ich setze voraus, dafs in demselben keine gleichen Factoren von dem ersten Grade in Bezug auf x enthalten sind; wären dergleichen in X enthalten, so liefsen sie sich leicht entdecken und sodann durch Division wegschaffen. Es sei weiter $\frac{dX}{dx} = X'$, $\frac{d^2X}{dx^2} = X''$, ... $\frac{d^{n-1}X}{dx^{n-1}} = X^{(n-1)}$, so wird $X^{(n-1)}$ von dem ersten, $X^{(n-2)}$ von dem zweiten, u. s. w. Grade in Beziehung auf X sein.

Es seien nun an die aus $X^{(n-1)} = 0$ gezogene Wurzel von x; $a(n-1)$, $b(n-1)$ die beiden Wurzeln von $X^{(n-2)} = 0$, geordnet nach ihrer Gröfse; $a(n-2)$, $b(n-2)$, $c(n-2)$ die drei Wurzeln von $X^{(n-3)} = 0$, gleichfalls geordnet nach ihrer Gröfse ....; und endlich a, b, c, d, e, ... die Wurzeln von $X = 0$, auf die nämliche Weise geordnet: so ist an begriffen zwischen $a(n-1)$ und $b(n-1)$; $a(n-1)$ ist begriffen zwischen $a(n-2)$ und $b(n-2)$, $b(n-1)$ ist begriffen zwischen $b(n-2)$ und $c(n-2)$, u. s. w.

Um also die Wurzeln von $X = 0$ zu finden, bestimmen wir vorerst die Wurzel an von $X^{(n-1)} = 0$, substituiren in $X^{(n-2)}$ nach und nach die obere Grenze der Wurzel an, und die untere Grenze; sind diese drei Resultate mit dem nämlichen Zeichen behaftet, so hat $X^{(n-2)}$ keine reellen Wurzeln; ist das Zeichen des Resultates der mittlern Substitution das entgegengesetzte von dem der beiden äufsern, so bestimmen wir die beiden Wurzeln von $X^{(n-2)} = 0$; zu welchem Behufe in der Regel die successive Substitution von ganzen Zahlen hinreicht, um die Wurzeln genau bis auf $\frac{1}{10}$ zu bestimmen. Z. B. wenn zwei successive Resultate der Substitution von 3 und 4 $+6$ und -8 wären, so würde man in der Regel sagen können, dafs die Wurzel, genau bis auf $\frac{1}{10}$ ausgedrückt, $3 + \frac{4}{10}$, also 3,4 sei.

Auf die nämliche Weise fahren wir fort, bis zu der Gleichung $X=0$; von welcher wir dann die Wurzeln genau bis auf $\frac{1}{10}$ bestimmt und uns so überzeugt haben werden, dafs sie aufser diesen keine reelle Wurzeln mehr haben kann.

Beweis. Es stelle (Fig. 1.) die Curve vor, deren Gleichung $y=X$ ist, so ist klar, dafs in sämmtlichen Puncten, wo sie die Axe der X schneidet, der zugehörige Werth von x eine Wurzel der Gleichung $X=0$ ist. Es seien F und E zwei solche aufeinander folgende Puncte, so ist weiter klar, dafs es zwischen F und E einen Punct der krummen Linie geben mufs, in welchem die Tangente der Axe X parallel ist. Einen solchen Punct bestimmen wir aber, indem wir $\frac{dy}{dx}=0$ setzen. Wenn also $x=OF=c$, $x=OE=d$ Wurzeln von $X=0$ sind, so ist $x=ON=c' <$ als die eine jener Wurzeln und $>$ als die andere. *Zwischen zwei Wurzeln von* $\mathrm{X}=0$ *ist also immer eine Wurzel von* $\mathrm{X}'=0$ *enthalten.*

Zwischen zwei Wurzeln $x=OP=d'$ und $x=OS=e'$ von $X'=0$ ist nur dann eine Wurzel $x=OG=e$ von $X=0$ begriffen, wenn die Resultate PQ und RS von $x=d'$ und $x=e'$ in X mit entgegengesetzten Zeichen behaftet sind. Wenn aber $x=OS=e'$ und $x=OT=f'$ zwei aufeinander folgende Wurzeln von $X'=0$ sind, und wenn die Resultate RS und UT der Substitution dieser Werthe in X mit den nämlichen Zeichen behaftet sind, so findet zwischen R und U kein Durchschnittspunct mit der Axe Statt; es deutet also dieses eine imaginäre Wurzel von $X=0$ an.

Die Gleichung $X''=0$ steht aber zu $X=0$ in der nämlichen Beziehung, wie $X'=0$ zu $X=0$; eben so $X'''=0$ zu $X''=0$, ... Wenn wir also auf diese Weise von $X^{(n-1)}$ ausgehen, so wird hierdurch das Verfahren geboten, welches oben angedeutet worden ist.

Beispiele. Es sei $X=x^4-8x^3+12x^2+16x-39=0$, so ist $X'=4x^3-24x^2+24x+16$, $X''=12x^2-48x+24$, $X'''=24x-48$. Die Wurzel von $X'''=0$ ist hier 2; die Wurzeln von $X''=0$ sind 3,4; 0,6; die von $X'=0$ sind 4,4; 2; —0,4; die von $X=0$ sind 5,4 und —1,4. Die beiden Wurzeln von $X=0$, welche zwischen den Wurzeln von $X'=0$, 4,4 und 2; 2 und — 0,4 fallen sollten, sind also hier imaginär.

Es sei $X=x^4-5x^3+3x^2+7x-4=0$, so ist
$X'=4x^3-15x^2+6x+7$, $X''=12x^2-30x+6$, $X'''=24x-30$, so ist die Wurzel von $X'''=0$, 1,25; die von $X''=0$ sind 2,2 und 2; die von $X'=0$ sind 3,0; 1,2; —0,5; die von $X=0$ sind 3,6; 1,7; 0,5; —1,1.

Giefsen den 26. Februar 1838.

8.

Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale.

(Von Herrn Dr. *Gudermann* zu Münster.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 1. im 1sten, No. 10. im 2ten, No. 15. im 3ten, No. 21. im 4ten Hefte des achtzehnten und No. 2. im 1sten, No. 8. im 2ten, No. 12. im 3ten Hefte des neunzehnten Bandes.)

Vierzehnter Abschnitt.

§. 165.

Die Modular-Functionen, dargestellt als Producte unendlich vieler Factoren.

Setzt man in der Formel (7.) §. 157. $\frac{u}{n}$ statt u, so kann sie, wenn man auf das Schema der Specialisirung der beiden in ihr vorkommenden Regulatoren $\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ und $\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$ sieht, als ein Product von Producten dargestellt werden. Wir können setzen

$$\operatorname{sn}(u) = n\operatorname{sn}\left(\frac{u}{n}\right).\frac{\mathfrak{A}.\mathfrak{B}.\mathfrak{C}.\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}.\mathfrak{F}.\mathfrak{G}.\mathfrak{H}},$$

wenn die gewählten Zeichen die folgenden Bedeutungen haben

$$\mathfrak{A} = \mathrm{P}\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{2\alpha K}{n}\right)}\right) \text{ für } 2\alpha = +2, +4, +6, \ldots, +(n-1),$$

$$\mathfrak{B} = \mathrm{P}\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{2\beta i K'}{n}\right)}\right) \text{ für } 2\beta = +2, +4, +6, \ldots +(n-1),$$

$$\mathfrak{C} = \mathrm{P}\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{2\alpha K+2\beta i K'}{n}\right)}\right) \text{ für die Verbindungen der vorigen Werthe von } 2\alpha \text{ und } 2\beta;$$

$$\mathfrak{D} = \mathrm{P}\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{2\alpha K-2\beta i K'}{n}\right)}\right) \text{ für dieselben Verbindungen der Werthe von } 2\alpha \text{ und } 2\beta;$$

$$\mathfrak{E} = \mathrm{P}\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{2\alpha}{n}.K+iK'\right)}\right) \text{ für } 2\alpha = 2, 4, 6, \ldots (n-1);$$

$$\mathfrak{F} = \mathrm{P}\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{(2\beta+1)iK'}{n}\right)}\right) \text{ für } 2\beta+1 = 1, 3, 5, \ldots (n-2);$$

$$\mathfrak{G} = \mathrm{P}\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha K+(2\beta+1)iK'}{n}\right)}\right) \text{ für die vorigen Werthe von } 2\alpha \text{ und } 2\beta+1;$$

$$\mathfrak{H} = \mathrm{P}\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha K-(2\beta+1)iK'}{n}\right)}\right) \text{ für dieselben Werthe von } 2\alpha \text{ und } 2\beta+1.$$

Die Zahl der Factoren jedes der acht angegebenen Producte vergröfsert sich gleichzeitig mit n und wird unendlich, wenn n unendlich genommen wird. Nehmen wir aber n unendlich, so erhalten die vorigen Formeln sehr merkwürdige Gestalten; sie werden einfacher, obgleich die Menge der Factoren unendlich grofs ist. Um die Grenzen zu finden, erinnern wir uns, dafs die Reihe für $\mathrm{sn}\, u$ die Gestalt

$$\mathrm{sn}\, u = u + au^3 + bu^5 + \text{etc.}$$

hat. Daher ist

$$n\, \mathrm{sn}\left(\frac{u}{n}\right) = u + \frac{au^3}{n^2} + \frac{bu^5}{n^4} \ldots.$$

Wird also n unendlich genommen, so wird $n\,\mathrm{sn}\left(\frac{u}{n}\right) = u$. Ferner wird

$$\frac{\mathrm{sn}\,\frac{u}{n}}{\mathrm{sn}\,\frac{mv}{n}} = \frac{u + \frac{au^3}{n^2} + \frac{bu^5}{n^4} \ldots}{mv + \frac{am^3v^3}{n^2} + \frac{bm^5v^5}{u^4} \ldots};$$

Daher wird für ein unendliches n das Verhältnifs $\frac{\mathrm{sn}\,\frac{u}{n}}{\mathrm{sn}\,\frac{mv}{n}} = \frac{u}{mv}$. Hiernach verwandelt sich das erste Product in

$\mathfrak{A} = \mathrm{P}\left(1 - \frac{u^2}{(2\alpha K)^2}\right)$. Ferner ist $\mathfrak{B} = \mathrm{P}\left(1 + \frac{u^2}{(2\beta K')^2}\right)$,

$\mathfrak{C} = \mathrm{P}\left(1 - \frac{u^2}{(2\alpha K + 2\beta iK')^2}\right)$ und $\mathfrak{D} = \mathrm{P}\left(1 - \frac{u^2}{(2\alpha K - 2\beta iK')^2}\right)$,

und die kleinsten für α und β zu nehmenden Werthe sind nun $\alpha = 1$ und $\beta = 1$. Uebrigens wachsen die positiven ganzen Zahlen α und β ohne Ende. Da $\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha K}{n} + iK'\right) = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha K}{n}\right)}$ ist, so wird das Verhältnifs

$$\frac{\operatorname{sn}\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}\left(\frac{2\alpha K}{n}+iK'\right)} = k\operatorname{sn}\left(\frac{2\alpha K}{n}\right)\operatorname{sn}\left(\frac{u}{n}\right) = 0, \text{ und also } \mathfrak{E}=1.$$

Ferner wird $\mathfrak{F} = \mathrm{P}\left(1+\frac{u^2}{(2\beta+1)^2 K'^2}\right)$; $\mathfrak{G} = \mathrm{P}\left(1-\frac{u^2}{(2\alpha K+(2\beta+1)iK')^2}\right)$ und $\mathfrak{H} = \mathrm{P}\left(1-\frac{u^2}{(2\alpha K-(2\beta+1)iK')^2}\right)$.

Setzt man auch in den Formeln (8.) und (9.) §. 157. jetzt $\frac{u}{n}$ für u, so erhält man

$$\operatorname{cn} u = \operatorname{cn}\left(\frac{u}{n}\right)\cdot\frac{\mathfrak{I}.\mathfrak{K}.\mathfrak{L}.\mathfrak{M}}{\mathfrak{E}.\mathfrak{F}.\mathfrak{G}.\mathfrak{H}} \quad\text{und}\quad \operatorname{dn} u = \operatorname{dn}\left(\frac{u}{n}\right)\cdot\frac{\mathfrak{N}.\mathfrak{O}.\mathfrak{P}.\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}.\mathfrak{F}.\mathfrak{G}.\mathfrak{H}},$$

wenn man der Kürze wegen setzt:

$$\mathfrak{I} = \mathrm{P}\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{(2\alpha+1)K}{n}\right)}\right) \text{ für } 2\alpha+1 = 1, 3, 5, \ldots (n-2);$$

$$\mathfrak{K} = \mathrm{P}\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(K+\frac{2\beta iK'}{n}\right)}\right) \text{ für } 2\beta = 2, 4, 6, \ldots (n-1);$$

$$\mathfrak{L} = \mathrm{P}\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{(2\alpha+1)K+2\beta iK'}{n}\right)}\right) \text{ für die vorigen Werthe von } 2\alpha+1 \text{ und } 2\beta;$$

$$\mathfrak{M} = \mathrm{P}\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{(2\alpha+1)K-2\beta iK'}{n}\right)}\right) \text{ für dieselben Werthe von } 2\alpha+1 \text{ und } 2\beta;$$

$$\mathfrak{N} = \mathrm{P}\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{(2\alpha+1)K}{n}+iK'\right)}\right) \text{ für } 2\alpha+1 = 1, 3, 5, \ldots (n-2);$$

$$\mathfrak{O} = \mathrm{P}\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(K+\frac{(2\beta+1)iK'}{n}\right)}\right) \text{ für } 2\beta+1 = 1, 3, 5, \ldots (n-2);$$

$$\mathfrak{P} = \mathrm{P}\left(\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{(2\alpha+1)K+(2\beta+1)iK'}{n}\right)}\right) \text{ für die vorigen Werthe von } 2\alpha+1 \text{ und } 2\beta+1;$$

$$\mathfrak{Q} = \mathrm{P}\left(\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{(2\alpha+1)K-(2\beta+1)iK'}{n}\right)}\right) \text{ für dieselben Werthe von } 2\alpha+1 \text{ und } 2\beta+1.$$

Setzen wir auch in diesen Formeln n unendlich grofs, so wird

$$\mathfrak{J} = \mathrm{P}\left(1-\frac{u^2}{((2\alpha+1)K)^2}\right).$$

Ferner ist $\mathrm{sn}\left(K+\frac{2\beta iK'}{n}\right) = \frac{\mathrm{cn}\left(\frac{2\beta iK'}{n}\right)}{\mathrm{dn}\left(\frac{2\beta iK'}{n}\right)}$; also

$$\frac{\mathrm{sn}\left(\frac{u}{n}\right)}{\mathrm{sn}\left(K+\frac{2\beta iK'}{n}\right)} = \frac{\mathrm{dn}\left(\frac{2\beta iK'}{n}\right)}{\mathrm{cn}\left(\frac{2\beta iK'}{n}\right)}.\mathrm{sn}\left(\frac{u}{n}\right) = 0 \text{ für ein unendliches } n:$$

folglich wird $\mathfrak{K}=1$. Das Product $\mathfrak{L}$ wird

$$\mathfrak{L} = \mathrm{P}\left(1-\frac{u^2}{((2\alpha+1)K+2\beta iK')^2}\right) \text{ und } \mathfrak{M} = \mathrm{P}\left(1-\frac{u^2}{((2\alpha+1)K-2\beta iK')^2}\right);$$

weiter wird $\mathfrak{N}=1$, $\mathfrak{O}=1$, $\mathfrak{P} = \mathrm{P}\left(1-\frac{u^2}{((2\alpha+1)K+(2\beta+1)iK')^2}\right)$ und

$$\mathfrak{Q} = \mathrm{P}\left(1-\frac{u^2}{((2\alpha+1)K-(2\beta+1)iK')^2}\right).$$

In allen diesen Formeln sind α und β positive ganze Zahlen, welche, von den kleinsten Werthen an, ohne Ende wachsen; nur darf nicht $2\alpha=0$ und $2\beta=0$ sein, wo 2α als Factor von K und 2β als Factor von iK' vorkommt.

§. 166.

Ausdruck der cyklischen Modular-Functionen des Argumentes u durch hyperbolische Potenzial-Functionen des Arcus $\eta' u$, in der Form von Producten unendlich vieler Factoren.

Aehnliche Ausdrücke durch gewöhnliche cyklische Functionen des Arcus ηu.

Die im vorigen §. gefundenen unendlichen Producte gestatten noch eine namhafte Zusammenziehung, durch welche ihre Anwendbarkeit sehr vergröfsert wird. Dazu dienen die in §. 61. und §. 62. des ersten Theiles gefundenen Formeln

$$\sin\left(\frac{v\pi}{2}\right) = \frac{v\pi}{2}.\mathop{\mathrm{P}}_{1}\left(1-\frac{v^2}{(2\alpha)^2}\right); \qquad \mathfrak{Sin}\left(\frac{v\pi}{2}\right) = \frac{v\pi}{2}.\mathop{\mathrm{P}}_{1}\left(1+\frac{v^2}{(2\alpha)^2}\right);$$

$$\cos\left(\frac{v\pi}{2}\right) = \mathop{\mathrm{P}}_{1}\left(1-\frac{v^2}{(2\alpha-1)^2}\right) \text{ und } \mathfrak{Cos}\left(\frac{v\pi}{2}\right) = \mathop{\mathrm{P}}_{1}\left(\frac{v^2}{(2\alpha-1)^2}\right),$$

in welchen das den unendlichen Producten vorgesetzte $\mathop{\mathrm{P}}_{1}$ andeutet, dafs $\alpha=1$ der kleinste für α zu nehmende Werth sei. Durch Anwendung dieser Formeln findet man für einige unendliche Producte des §. 165. sogleich die folgenden einfacheren Ausdrücke:

$$\mathfrak{A} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{1 - \frac{u^2}{(2\alpha K)^2}\right\} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{1 - \frac{\left(\frac{u}{K}\right)^2}{(2\alpha)^2}\right\} = \frac{2K}{\pi u}.\sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right);$$

$$\mathfrak{B} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{1 + \frac{\left(\frac{u}{K'}\right)^2}{(2\beta)^2}\right\} = \frac{2K'}{\pi u}.\mathfrak{Sin}\left(\frac{\pi u}{2K'}\right);$$

$$\mathfrak{F} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{1 + \frac{\left(\frac{u}{K'}\right)^2}{(2\alpha-1)^2}\right\} = \mathfrak{Cos}\left(\frac{\pi u}{2K'}\right);$$

$$\mathfrak{J} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{1 - \frac{\left(\frac{u}{K}\right)^2}{(2\alpha-1)^2}\right\} = \cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right).$$

In den vier noch übrigen Producten

$$\mathfrak{C}.\mathfrak{D} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\left(1 - \frac{u^2}{(2\alpha K + 2\beta i K')^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{(2\alpha K - 2\beta i K')^2}\right)\right\},$$

$$\mathfrak{G}.\mathfrak{H} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\left(1 - \frac{u^2}{(2\alpha K + (2\beta-1)iK')^2}\right)\left(1 - \left(\frac{u^2}{(2\alpha K - (2\beta-1)iK')^2}\right)\right\},$$

$$\mathfrak{L}.\mathfrak{M} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\left(1 - \frac{u^2}{((2\alpha-1)K + 2\beta i K')^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{((2\alpha-1)K - 2\beta i K')^2}\right)\right\},$$

$$\mathfrak{P}.\mathfrak{Q} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\left(1 - \frac{u^2}{((2\alpha-1)K + (2\beta-1)iK')^2}\right)\left(1 - \frac{2}{((2\alpha-1)K - (2\beta-1)iK')^2}\right)\right\}$$

können die allgemeinen Factoren nicht nur in einer reellen Form dargestellt werden, sondern es können auch diese Producte zugleich so umgeformt werden, dafs die obigen Formeln, durch welche $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{J}$ einfacher dargestellt wurden, auch auf diese vier Producte angewandt werden können. Es ist überhaupt $\left(1 - \frac{u^2}{(a+bi)^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{(a-bi)^2}\right)$

$$= \left(1 - \frac{u}{a+bi}\right)\left(1 + \frac{u}{a+bi}\right)\left(1 - \frac{u}{a-bi}\right)\left(1 - \frac{a}{a-bi}\right)$$

$$= \frac{(a+bi-u)(a+bi+u)(a-bi-u)(a-bi+u)}{(a^2+b^2)^2} = \frac{((a+u)^2+b^2)(a-u)^2+b^2))}{(a^2+b^2)^2},$$

und also

$$\left(1 - \frac{u^2}{(a+bi)^2}\right)\left(1 - \frac{u}{(a-bi)^2}\right) = \frac{\left(1 + \left(\frac{a+u}{b}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{a-u}{b}\right)^2\right)}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2}.$$

Hiernach können die allgemeinen Factoren der vorigen vier unendlichen Producte auch also dargestellt werden:

$$\mathfrak{C}.\mathfrak{D} = \frac{\underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\left(1 + \left(\frac{2\alpha K + u}{2\beta K'}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{2\alpha K - u}{2\beta K'}\right)^2\right)\right\}}{\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1 + \left(\frac{2\alpha K}{2\beta K'}\right)^2\right)^2},$$

$$\mathfrak{G}.\mathfrak{H} = \frac{\underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\left(1+\left(\frac{2\alpha K+u}{(2\beta-1)K'}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{2\alpha K-u}{(2\beta-1)K'}\right)^2\right)\right\}}{\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1+\left(\frac{2\alpha K}{(2\beta-1)K'}\right)^2\right)},$$

$$\mathfrak{L}.\mathfrak{M} = \frac{\underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\left(1+\left(\frac{(2\alpha-1)K+u}{2\beta K'}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{(2\alpha-1)K-u}{2\beta K'}\right)^2\right)\right\}}{\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1+\left(\frac{(2\alpha-1)K}{2\beta K'}\right)^2\right)^2},$$

$$\mathfrak{P}.\mathfrak{Q} = \frac{\underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\left(1+\left(\frac{(2\alpha-1)K+u}{(2\beta-1)K'}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{(2\alpha-1)K-u}{(2\beta-1)K'}\right)^2\right)\right\}}{\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1+\left(\frac{(2\alpha-1)K}{(2\beta-1)K'}\right)^2\right)^2}.$$

Setzen wir nun, wie in §. 10., wieder $\eta' = \frac{\pi}{2K'}$, (wir werden uns im Nachfolgenden immer dieser Bezeichnung bedienen), und sehen wir vorläufig α als unveränderlich, hingegen β als veränderlich an, so ist

$$\underset{1}{\mathrm{P}}\left\{1+\left(\frac{2\alpha K\pm u}{2\beta K'}\right)^2\right\} = \frac{\mathfrak{Sin}(2\alpha\eta'K\pm\eta'u)}{2\alpha\eta'K\pm\eta'u};$$

also

$$\frac{\underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\left(1+\left(\frac{2\alpha K+u}{2\beta K'}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{2\alpha K-u}{2\beta K'}\right)^2\right)\right\}}{\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1+\left(\frac{2\alpha K}{2\beta K'}\right)^2\right)^2}$$

$$= \frac{(2\alpha\eta'K}{(2\alpha\eta'K)^2-(\eta'u)^2}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}(2\alpha\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Sin}(2\alpha\eta'K-\eta'u)}{\mathfrak{Sin}^2(2\alpha\eta'K)},$$

und da $\mathfrak{Sin}(a+b)\,\mathfrak{Sin}(a-b) = \mathfrak{Sin}^2 a - \mathfrak{Sin}^2 b$ nach §. 13. des ersten Theiles ist, so erhalten wir den Ausdruck

$$\mathfrak{C}.\mathfrak{D} = \frac{\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1-\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta'u}{\mathfrak{Sin}^2(2\alpha\eta'K)}\right)}{\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1-\left(\frac{u}{2\alpha K}\right)^2\right)} = \frac{1}{\mathfrak{X}}.\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1-\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta'u}{\mathfrak{Sin}^2 2\alpha\eta'K}\right).$$

Ganz eben so findet man

$$\mathfrak{L}.\mathfrak{M} = \frac{\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1-\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta'u}{\mathfrak{Sin}^2(2\alpha-1)\eta'K}\right)}{\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1-\left(\frac{u}{(2\alpha-1)K}\right)^2\right)} = \frac{1}{\mathfrak{Z}}.\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1-\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta'u}{\mathfrak{Sin}^2(2\alpha-1)\eta'K}\right).$$

Ferner ist, wenn wieder α als unveränderlich angesehen wird,

$$\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1+\left(\frac{2\alpha K\pm u}{(2\beta-1)K'}\right)^2\right) = \mathfrak{Cos}(2\alpha\eta'K\pm\eta'u);$$

daher ist $\mathfrak{G}.\mathfrak{H} = \underset{1}{\mathrm{P}}\frac{\mathfrak{Cos}(2\alpha\eta'K+\eta'u).\,\mathfrak{Cos}(2\alpha\eta'K-\eta'u)}{\mathfrak{Cos}^2(2\alpha\eta'K)}$, und da $\mathfrak{Cos}(a+b).\,\mathfrak{Cos}(a-b) = \mathfrak{Cos}^2 a\,\mathfrak{Cos}^2 b - \mathfrak{Sin}^2 a\,\mathfrak{Sin}^2 b = \mathfrak{Cos}^2 a + \mathfrak{Sin}^2 b$ ist,

so kann die vorige Formel auch also dargestellt werden:

$$\mathfrak{G}.\mathfrak{H} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{1+\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Cos}^2 2\alpha\eta' K}\right\}.$$

Ganz eben so findet man das Product

$$\mathfrak{P}.\mathfrak{Q} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{1+\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Cos}^2 (2\alpha-1)\eta' K}\right\}.$$

Werden die gefundenen Ausdrücke in den Ausdrücken $\mathrm{sn}\,u = \frac{u.\mathfrak{A}.\mathfrak{B}.\mathfrak{C}.\mathfrak{D}}{\mathfrak{F}.\mathfrak{G}.\mathfrak{H}}$, $\mathrm{cn}\,u = \frac{\mathfrak{J}.\mathfrak{L}.\mathfrak{M}}{\mathfrak{F}.\mathfrak{G}.\mathfrak{H}}$ **und** $\mathrm{dn}\,u = \frac{\mathfrak{P}.\mathfrak{Q}}{\mathfrak{F}.\mathfrak{G}.\mathfrak{H}}$ **substituirt, so hat man die folgenden Formeln:**

$$1.\quad \mathrm{sn}\,u = \frac{1}{\eta}\,\mathfrak{Tang}\,\eta' u.\underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\frac{1-\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Sin}^2 2\alpha\eta' K}}{1+\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Cos}^2 2\alpha\eta' K}}\right\},$$

$$2.\quad \mathrm{cn}\,u = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}.\underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\frac{1-\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 (2\alpha-1)\eta' K}}{1+\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Cos}^2 2\alpha\eta' K}}\right\},$$

$$3.\quad \mathrm{dn}\,u = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}.\underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\frac{1+\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Cos}^2 (2\alpha-1)\eta' K}}{1+\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Cos}^2 2\alpha\eta' K}}\right\},$$

$$4.\quad \mathrm{tn}\,u = \frac{1}{\eta'}\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u.\underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\frac{1-\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Sin}^2 2\alpha\eta' K}}{1-\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Sin}^2 (2\alpha-1)\eta' K}}\right\};$$

nach welchen man für jeden beliebigen Werth des Argumentes u **die Werthe der vier cyklischen Modular-Functionen dieses Argumentes berechnen kann, sobald nur die den Moduln** k **und** k' **zugehörigen Modular-Quadranten** K **und** K' **bekannt sind. Diese Quadranten können aber auf mehr als eine Weise nach den früher entwickelten Formeln berechnet werden. Die Formeln setzen den Gebrauch der Tafeln der gewöhnlichen hyperbolischen Functionen voraus, und convergiren immer. Die Convergenz ist desto rascher, je gröfser** $\eta' K = \frac{\pi K}{2K'}$, **d. h.** ***je gröfser der Modul k ist.*** **Wir fügen, da** $\mathrm{sno}\,u = \frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$ **ist, zu diesen Formeln noch die folgende:**

$$5.\quad \mathrm{sno}\,u = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\frac{1-\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Sin}^2 (2\alpha-1)\eta' K}}{1+\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Cos}^2 (2\alpha-1)\eta' K}}\right\}.$$

Zusatz. Vertauscht man in den vorigen Formeln den Modul k mit k', so verwandelt sich dadurch $\eta' = \frac{\pi}{2K'}$ in $\eta = \frac{\pi}{2K}$. Setzt man außerdem ui statt u, so verwandeln sich die vorigen fünf Formeln in

$$6.\quad \mathrm{sn}\,u = \frac{1}{\eta}\sin\eta u . \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\frac{1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 2\alpha\eta K'}}{1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2(2\alpha-1)\eta K'}}\right\},$$

$$7.\quad \mathrm{cn}\,u = \cos\eta u . \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\frac{1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 2\alpha\eta K'}}{1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2(2\alpha-1)\eta K'}}\right\},$$

$$8.\quad \mathrm{dn}\,u = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\frac{1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2(2\alpha-1)\eta K'}}{1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2(2\alpha-1)\eta K'}}\right\},$$

$$9.\quad \mathrm{tn}\,u = \frac{1}{\eta}\mathrm{tang}\,\eta u . \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\frac{1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 2\alpha\eta K'}}{1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 2\alpha\eta K'}}\right\},$$

$$10.\quad \mathrm{snc}\,u = \cos\eta u . \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\frac{1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 2\alpha\eta K'}}{1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2(2\alpha-1)\eta K'}}\right\}.$$

In diesen Formeln kommen theils cyklische Functionen des Arcus ηu, theils hyperbolische Functionen des vervielfachten Arcus $\eta K' = \frac{\pi K'}{2K}$ vor, und die Convergenz der Formeln ist um desto größer, je größer das Verhältniß $\frac{K'}{K}$, d. h. *je kleiner der Modul k ist.* In allen diesen Formeln sind für α die mit Eins anfangenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe zu setzen.

§. 167.

Aenderungen von η' und der hyperbolischen Functionen von $n\eta' K$, wenn der Modul k mit $\frac{1}{k}$ vertauscht wird; und Aenderungen von η und der hyperbolischen Functionen von $n\eta K'$, wenn der Modul k mit $\frac{ik}{k'}$ vertauscht wird.

Setzt man $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, so verwandelt sich nach Zusatz 1. zu §. 31. der Quadrant K in $k(K-iK')$ und K' in kK, also $\frac{K}{K'}$ in $\frac{K}{K'}-i$. Da nun $\eta' = \frac{\pi}{2K'}$ ist, so verwandelt sich

$$\eta' \text{ in } \frac{\eta'}{k}.$$

Wird daher gleichzeitig ku für u gesetzt, so bleibt $\eta' u$ ungeändert. Setzt man ferner $p = e^{-\frac{\pi K}{2K'}} = e^{-\eta' K}$, so verwandelt sich p in $e^{-\eta' K + \frac{1}{2}\pi i} = p.e^{\frac{1}{2}\pi i}$, und da $e^{\frac{1}{2}\pi i} = \cos\frac{1}{2}\pi + i\sin\frac{1}{2}\pi = i$ ist, so verwandelt sich, wenn $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k gesetzt wird,

$$p \text{ in } pi \quad \text{und} \quad p^{-1} \text{ in } -p^{-1}i, \quad \text{also}$$
$$p^2 \text{ in } -p^2 \quad \text{und} \quad p^{-2} \text{ in } -p^{-2}.$$

Es ist

$$p^n = e^{-n\eta' K} = \text{Cos}(n\eta' K) - \text{Sin}(n\eta' K) \quad \text{und}$$
$$p^{-n} = e^{n\eta' K} = \text{Cos}(n\eta' K) + \text{Sin}(n\eta' K) = \frac{1}{p^n}:$$

also ist

$$\text{Cos}(n\eta' K) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p^n} + p^n\right) = \frac{1+p^{2n}}{2p^n} \quad \text{und}$$
$$\text{Sin}(n\eta' K) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p^n} - p^n\right) = \frac{1-p^{2n}}{2p^n}.$$

Da sich nun p^{2n} in $(-1)^n p^{2n}$, also p^{4n} in p^{4n} verwandelt, so verwandelt sich

$$\text{Cos}(2n\eta' K) \text{ in } \frac{1+p^{4n}}{(-1)^n 2p^{2n}} \qquad \text{und } \text{Sin}(2n\eta' K) \text{ in } \frac{1-p^{4n}}{(-1)^n 2p^{2n}},$$

oder auch

$$\text{Cos}(2n\eta' K) \text{ in } (-1)^n.\text{Cos}(2n\eta' K) \text{ und } \text{Sin}(2n\eta' K) \text{ in } (-1)^n.\text{Sin}(2n\eta' K).$$

Da sich p^{2n+1} in $(-1)^n p^{2n+1} i$, also p^{4n+2} in $-p^{4n+2}$ verwandelt, so verwandelt sich

$$\text{Cos}((2n+1)\eta' K) \text{ in } \frac{1-p^{4n+2}}{(-1)^n 2p^{2n+1}.i} \text{ und } \text{Sin}((2n+1)\eta' K) \text{ in } \frac{1+p^{4n+2}}{(-1)^n 2p^{2n+1}.i}:$$

also verwandelt sich

$$\text{Cos}((2n+1)\eta' K) \quad \text{in} \quad \frac{\text{Sin}((2n+1)\eta' K)}{i^{2n+1}} \quad \text{und}$$
$$\text{Sin}((2n+1)\eta' K) \quad \text{in} \quad \frac{\text{Cos}((2n+1)\eta' K)}{i^{2n+1}}.$$

Fassen wir die gefundenen Resultate zusammen, so haben wir den folgenden Lehrsatz:

Setzt man $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, und ku statt u, so verwandelt sich η' in $\frac{\eta'}{k}$ und $\eta' u$ bleibt ungeändert. Ferner verwandelt sich

$$1.\quad\begin{cases} p \text{ in } pi, \text{ also } p^2 \text{ in } -p^2. \\ \mathfrak{Cos}(2n\eta'K) \text{ verwandelt sich in } (-1)^n.\mathfrak{Cos}(2n\eta'K); \\ \mathfrak{Sin}(2n\eta'K) \text{ verwandelt sich in } (-1)^n.\mathfrak{Sin}(2n\eta'K); \\ \mathfrak{Cos}((2n-1)\eta'K) \text{ verwandelt sich in } (-1)^n.i.\mathfrak{Sin}((2n-1)\eta'K) \text{ und} \\ \mathfrak{Sin}((2n-1)\eta'K) \text{ verwandelt sich in } (-1)^n.i.\mathfrak{Cos}((2n-1)\eta'K). \end{cases}$$

Setzen wir $q = e^{-\eta K'}$, so können wir aus dem Zusatze 2. §. 31., oder auch aus dem vorigen Satze, durch eine bloſse Vertauschung des Moduls mit dem conjugirten, den folgenden Lehrsatz herleiten:

Setzt man $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k, und $k'u$ statt u, so bleibt ηu ungeändert und es verwandelt sich η in $\frac{\eta}{k'}$. Ferner verwandelt sich

$$2.\quad\begin{cases} q \text{ in } qi, \text{ also } q^2 \text{ in } -q^2. \\ \mathfrak{Cos}(2n\eta K') \text{ in } (-1)^n.\mathfrak{Cos}(2n\eta K'); \\ \mathfrak{Sin}(2n\eta K') \text{ in } (-1)^n.\mathfrak{Sin}(2n\eta K'); \\ \mathfrak{Cos}((2n-1)\eta K') \text{ in } (-1)^n i.\mathfrak{Sin}((2n-1)\eta K') \text{ und} \\ \mathfrak{Sin}((2n-1)\eta K') \text{ in } (-1)^n i.\mathfrak{Cos}((2n-1)\eta K'). \end{cases}$$

Zusatz. Ist $k > \sin\frac{1}{4}\pi$, also $K > K'$, so ist $\eta' K > \frac{1}{2}\pi$: also ist $\eta' K > 1\frac{1}{2}$ oder $p^2 < \frac{1}{e^3}$. Eben so ist $q < \frac{1}{e^3}$, wenn $k < \sin\frac{1}{4}\pi$ ist. Da $\log\frac{1}{p} = \frac{1}{2}\pi.\frac{K}{K'}$ und $\log\frac{1}{q} = \frac{1}{2}\pi.\frac{K'}{K}$ ist, so ist

$$\log\frac{1}{p}.\log\frac{1}{q} = (\tfrac{1}{2}\pi)^2, \quad \text{oder} \quad \log\left(\frac{1}{p^2}\right).\log\left(\frac{1}{q^2}\right) = \pi^2;$$

und dieser Gleichung gemäſs läſst sich p aus q oder q aus p berechnen, selbst ohne den Modul zu kennen. Sind p und q gleich, so findet man $p^2 = q^2 = \frac{1}{23{,}24\ldots}$. Die kleinste der Zahlen p^2 und q^2 ist also immer $< \frac{1}{23}$.

Die Zahl p ist desto kleiner, je gröſser der Modul k ist, und q ist desto kleiner, je kleiner der Modul k ist; beide Zahlen hängen nur vom Modul ab und sind immer ächte Brüche. Wir werden im Nachfolgenden die Zeichen p und q immer in den Bedeutungen $p = e^{-\eta' K}$ und $q = e^{-\eta K'}$ beibehalten.

§. 168.

Aenderungen von p und q, wenn statt des Moduls k der kleinere $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$ gesetzt wird.

Wird statt des Moduls k der kleinere Modul $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$ gesetzt, so verwandelt sich nach §. 54. der Quadrant K' in $L' = (1+k')K'$, also η'

in $\frac{\eta'}{1+k'}$. Setzt man also gleichzeitig $v=\frac{(1+k')u}{2}$ für u, so verwandelt sich $\eta' u$ in $\frac{\eta' u}{2}$.

Da nun $\frac{L}{L'}=\frac{1}{2}.\frac{K}{K'}$ ist, so ist $\frac{1}{2}\pi.\frac{L}{L'}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\pi.\frac{K}{K'}$, daher verwandelt sich p in $p^{\frac{1}{2}}$, wenn $\frac{1-k'}{1+k'}$ statt des Moduls k gesetzt wird; also auch p^n in $p^{\frac{1}{2}n}$, folglich $\mathfrak{Cos}(n\eta' K)$ in $\mathfrak{Cos}\left(\frac{n\eta' K}{2}\right)$ und $\mathfrak{Sin}(n\eta' K)$ in $\mathfrak{Sin}\left(\frac{n\eta' K}{2}\right)$.

Wird wieder statt des Moduls k der kleinere $\lambda=\frac{1-k'}{1+k'}$ gesetzt, so verwandelt sich K in $\frac{1+k'}{2}.K$, also η in $\frac{2}{1+k'}.\eta$. Wird gleichzeitig $v=\frac{1+k'}{2}.u$ statt u gesetzt, so bleibt ηu ungeändert. Da ferner $\frac{L'}{L}=2.\frac{K'}{K}$, also auch $\frac{1}{2}\pi.\frac{L'}{L}=2.\frac{1}{2}\pi.\frac{K'}{K}$ ist, so verwandelt sich q in q^2, wenn $\lambda=\frac{1-k'}{1+k'}$ statt k gesetzt wird.

Hiernach verwandelt sich also $\mathfrak{Cos}(n\eta K')$ in $\mathfrak{Cos}(2n\eta K')$ und $\mathfrak{Sin}(n\eta K')$ in $\mathfrak{Sin}(2n\eta K')$.

Die so eben entwickelten Sätze dienen, in Verbindung mit den im §. 51. bis §. 54. entwickelten Formeln, theils zur Herleitung einer Menge neuer Formeln, theils auch zur Prüfung der bereits hergeleiteten. Zu denselben Zwecken dienen auch die in §. 166. hergeleiteten Formeln.

§. 169.

Ausdruck der cyklischen Modular-Functionen durch reelle Exponential-Größen.

Setzt man in den Formeln (1.) bis (4.) §. 166. der Kürze wegen $x=e^{\eta' u}$ und, wie vorhin, $p=e^{-\eta' K}$, so ist $\mathfrak{Sin}\,\eta' u=\frac{x-x^{-1}}{2}$, also $\mathfrak{Sin}^2\eta' u=\frac{x^2-2+x^{-2}}{4}$ und $\mathfrak{Sin}\,\eta' K=\frac{1-p^2}{2p}$, also $\mathfrak{Sin}^2\eta K=\frac{1-2p^2+p^4}{4p^2}$. Hiernach ist

$$1-\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Sin}^2\eta' K}=1-\frac{x^2-2+x^{-2}}{1-2p^2+p^4}.p^2=\frac{1-2p^2+p^4-p^2x^2+2p^2-p^2x^{-2}}{(1-p^2)^2},$$

oder $1-\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Sin}^2\eta' K}=\frac{(1-p^2x^2)(1-p^2x^{-2})}{(1-p^2)^2}$. Eben so findet man

$$1+\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Cos}^2\eta' K}=\frac{(1+p^2x^2)(1+p^2x^{-2})}{(1+p^2)^2}.$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$1.\quad\begin{cases}\mathfrak{A} = (1-p^4x^2)(1-p^8x^2)(1-p^{12}x^2)\ldots,\\ \mathfrak{B} = (1-p^2x^2)(1-p^6x^2)(1-p^{10}x^2)\ldots,\\ \mathfrak{C} = (1+p^2x^2)(1+p^6x^2)(1+p^{10}x^2)\ldots.\\ \mathfrak{D} = (1+p^4x^2)(1+p^8x^2)(1+p^{12}x^2)\ldots.\\ \mathfrak{A}' = (1-p^4x^{-2})(1-p^8x^{-2})(1-p^{12}x^{-2})\ldots.\\ \mathfrak{B}' = (1-p^2x^{-2})(1-p^6x^{-2})(1-p^{10}x^{-2})\ldots.\\ \mathfrak{C}' = (1+p^2x^{-2})(1+p^6x^{-2})(1+p^{10}x^{-2})\ldots.\\ \mathfrak{D}' = (1+p^4x^{-2})(1+p^8x^{-2})(1+p^{12}x^{-2})\ldots,\end{cases}$$

und ferner

$$2.\quad\begin{cases}a = (1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})(1-p^{16})\ldots.\\ b = (1-p^2)(1-p^6)(1-p^{10})(1-p^{14})\ldots,\\ c = (1+p^2)(1+p^6)(1+p^{10})(1+p^{14})\ldots.\\ p = (1+p^4)(1+p^8)(1+p^{12})(1+p^{16})\ldots.\end{cases}$$

so erhalten wir für die cyklischen Modular-Functionen des Argumentes u die folgenden Ausdrücke:

$$3.\quad\begin{cases}\operatorname{sn} u = \frac{1}{\eta'}\cdot\frac{d^2}{a^2}\cdot\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'}{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'},\\ \operatorname{cn} u = \frac{d^2}{b^2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}\cdot\frac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'},\\ \operatorname{dn} u = \frac{d^2}{c^2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}\cdot\frac{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'}{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'},\\ \operatorname{snc} u = \frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'},\\ \operatorname{tn} u = \frac{1}{\eta'}\cdot\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^2-1}{2x}\cdot\frac{\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'},\end{cases}$$

und es handelt sich nun nur noch darum, die einfacheren Bedeutungen der durch a, b, c, d bezeichneten Producte und ihrer Verhältnisse zu einander zu finden. Eine Relation unter drei von diesen vier Gröfsen findet sich leicht. Es ist

$$a.b = (1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)(1-p^8)(1-p^{10})\ldots.$$
$$c.d = (1+p^2)(1+p^4)(1+p^6)(1+p^8)(1+p^{10})\ldots.$$

Daher ist $ab.cd = (1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})(1-p^{16})\ldots$, oder $ab.cd = a$, und also

$$4.\quad bcd = 1.$$

Setzen wir $u+iK'$ statt u, also $\eta'u+\frac{1}{2}\pi i$ statt $\eta'u$, so verwandelt sich $x = e^{\eta'u}$ in $x.e^{\frac{1}{2}\pi i}$ also x in xi; also verwandelt sich dann $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{A}$; ferner $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{D}'$ in $\mathfrak{A}'$; aufserdem verwandelt sich $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ in $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}'$ in $\mathfrak{B}'$. Der Ausdruck

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\eta'}\cdot\frac{d^2}{a^2}\cdot\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{\mathfrak{X}.\mathfrak{X}'}{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}$$

verwandelt sich also, da $\operatorname{sn}(u+iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} u}$ ist, in

$$\frac{1}{k \operatorname{sn} u} = \frac{1}{\eta'}\cdot\frac{d^2}{a^2}\cdot\frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot\frac{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}{\mathfrak{X}.\mathfrak{X}'};$$

und wird diese Gleichung mit der vorigen multiplicirt, so erhält man $\left(\frac{1}{\eta'}\cdot\frac{d^2}{a^2}\right)^2 = \frac{1}{k}$, also

$$5.\quad \frac{1}{\eta'}\cdot\frac{d^2}{a^2} = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Die Gleichung $\operatorname{snc} u = \frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}}$ verwandelt sich, da $\operatorname{snc}(u+iK') = \frac{1}{k \operatorname{snc} u}$ ist, in $\frac{1}{k \operatorname{snc} u} = \frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}$, und die Multiplication beider giebt also $\left(\frac{c^2}{b^2}\right)^2 = \frac{1}{k}$ oder

$$6.\quad \frac{c^2}{b^2} = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Die übrigen Verhältnisse, wovon aber nur noch eines fehlt, um a, b, c, d einzeln bestimmen zu können, lassen sich nicht dadurch finden, daſs man $u+iK'$ statt u setzt; man muſs vielmehr $K-u$ statt u setzen; also $\eta'K-\eta'u$ statt $\eta'u$. Dadurch verwandelt sich x in $e^{\eta'K}.e^{-\eta'u}$, also x in $\frac{1}{px} = \frac{x^{-1}}{p}$ oder x^2 in $\frac{x^{-2}}{p^2}$ und x^{-2} in p^2x^2.

Macht man hiervon Gebrauch, so verwandelt sich $\mathfrak{A}$ in $(1-p^2x^{-2})(1-p^6x^{-2})(1-p^{10}x^{-2})\ldots.$, oder $\mathfrak{A}$ verwandelt sich in $\mathfrak{B}'$; ferner $\mathfrak{A}'$ in $(1-p^6x^2)(1-p^{10}x^2)(1-p^{14}x^2)\ldots.$ oder $\mathfrak{A}'$ in $\frac{\mathfrak{B}}{1-p^2x^2}$, also $\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'$ in $\frac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}{1-p^2x^2}$. Da sich nun auch $\frac{x^2-1}{2x} = \frac{x-x^{-1}}{2}$ verwandelt in $\frac{\frac{1}{px}-px}{2} = \frac{1-p^2x^2}{2px}$, so verwandelt sich

$$\frac{x^2-1}{2x}\mathfrak{A}.\mathfrak{A}' \text{ in } \frac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}{2px}.$$

Es verwandelt sich ferner $\mathfrak{B}$ in $(1-x^{-2})(1-p^4x^{-2})(1-p^8x^{-2})\ldots.$ oder $\mathfrak{B}$ in $\frac{x^2-1}{x^2}.\mathfrak{A}'$, und $\mathfrak{B}'$ in $(1-p^4x^2)(1-p^8x^2)(1-p^{12}x^2)\ldots.$ oder $\mathfrak{B}'$ in $\mathfrak{A}$: also verwandelt sich $\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'$ in $\frac{x^2-1}{x^2}\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'$ und

$$\frac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}{2} \text{ in } \frac{x^2-1}{2x}.\frac{\mathfrak{X}.\mathfrak{X}'}{x}.$$

Es verwandelt sich $\mathfrak{C}$ in $(1+x^{-2})(1+p^4x^{-2})(1+p^8x^{-2})(1+p^{12}x^{-2})\ldots.$ oder $\mathfrak{C}$ in $\frac{x^2+1}{x^2}.\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{C}'$ in $(1+p^4x^2)(1+p^8x^2)(1+p^{12}x^2)\ldots.$ oder $\mathfrak{C}'$ in $\mathfrak{D}$, also auch

$$\frac{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'}{2} \text{ in } \frac{x^2+1}{2x}.\frac{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}{x}.$$

Endlich ändert sich $\mathfrak{D}$ in $(1+p^2x^{-2})(1+p^6x^{-2})(1+p^{10}x^{-2})\ldots.$ oder $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{C}'$; ferner $\mathfrak{D}'$ in $(1+p^6x^2)(1+p^{10}x^2)(1+p^{14}x^2)\ldots.$ oder $\mathfrak{D}'$ in $\frac{\mathfrak{C}}{1+p^2x^2}$. Da sich nun

$\frac{x^2+1}{2x}=\frac{x+x^{-1}}{2}$ verwandelt in $\frac{\frac{1}{px}+px}{2}=\frac{1+p^2x^2}{2px}$, so verwandelt sich

$$\frac{x^2+1}{2x}.\mathfrak{D}.\mathfrak{D}' \text{ in } \frac{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}}{2px}.$$

Nun hält es nicht schwer, auch die übrigen Verhältnisse zu finden. Setzt man in der Gleichung $\operatorname{tn} u=\frac{1}{\eta'}.\frac{b^2}{a^2}.\frac{x^2-1}{2x}.\frac{\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}$, $K-u$ statt u, so verwandelt sie sich in

$$\operatorname{tnc} u=\frac{1}{\eta}.\frac{b^2}{a^2}.\frac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}{2px}.\frac{x^2}{(x^2-1)\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'} \text{ oder } 4p\operatorname{tnc} u=\frac{1}{\eta'}.\frac{b^2}{a^2}.\frac{2x}{x^2-1}.\frac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}{\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'},$$

und da $\operatorname{tn} u.\operatorname{tnc} u=\frac{1}{k}$ ist, so ist $\frac{4p}{k'}=\left(\frac{1}{\eta'}.\frac{b^2}{a^2}\right)^2$ oder

$$7.\quad \frac{1}{\eta}.\frac{b^2}{a^2}=2\sqrt{\frac{p}{k'}}.$$

Da ferner $\operatorname{dn} u=\frac{d^2}{c^2}.\frac{2x}{x^2+1}.\frac{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'}{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}$ ist, so erhält man

$$\operatorname{dnc} u=\frac{d^2}{c^2}.\frac{x^2+1}{x^2}.\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'.\frac{2px}{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'} \text{ oder } \frac{\operatorname{dnc} u}{4p}=\frac{d^2}{c^2}.\frac{x^2+1}{2x}.\frac{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'},$$

und da $\operatorname{dn} u\operatorname{dnc} u=k'$ ist, so ist $\frac{k'}{4p}=\left(\frac{d^2}{c^2}\right)^2$ oder

$$8.\quad \frac{d^2}{c^2}=\frac{\sqrt{k'}}{2\sqrt{p}}.$$

Dividirt man (5.) durch (4.), so erhält man

$$9.\quad \frac{d^2}{b^2}=\frac{\sqrt{\frac{k'}{k}}}{2\sqrt{p}}.$$

Werden diese Verhältnisse in den Formeln (3.) substituirt, so erhält man

$$10.\quad \begin{cases} \operatorname{sn} u = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\cdot\dfrac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}}\cdot\dfrac{\mathfrak{X}.\mathfrak{X}'}{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}, \\ \operatorname{cn} u = \dfrac{\sqrt{\frac{k'}{k}}}{2\sqrt{p}}\cdot\dfrac{2}{x+x^{-1}}\cdot\dfrac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}, \\ \operatorname{dn} u = \dfrac{\sqrt{k'}}{2\sqrt{p}}\cdot\dfrac{2}{x+x^{-1}}\cdot\dfrac{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'}{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}, \\ \operatorname{sno} u = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\cdot\dfrac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'}, \\ \operatorname{tn} u = \dfrac{2\sqrt{p}}{\sqrt{k'}}\cdot\dfrac{x-x^{-1}}{2}\cdot\dfrac{\mathfrak{X}.\mathfrak{X}}{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}. \end{cases}$$

Die Formeln, woraus diese Ausdrücke hergeleitet worden sind, können auch wie folgt dargestellt werden. Verwandelt man u in $K-u$, oder x in $\frac{1}{px}$, so verwandelt sich

$$11.\quad \begin{cases} \dfrac{x-x^{-1}}{2}.\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'.2\sqrt{p} \text{ in } \dfrac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}{x\sqrt{p}}, \\ \mathfrak{B}.\mathfrak{B}' \text{ in } \dfrac{\frac{x-x^{-1}}{2}.\mathfrak{X}.\mathfrak{X}'.2\sqrt{p}}{x\sqrt{p}}, \\ \mathfrak{C}.\mathfrak{C}' \text{ in } \dfrac{\frac{x+x^{-1}}{2}.\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'.2\sqrt{p}}{x\sqrt{p}}, \\ \dfrac{x+x^{-1}}{2}.\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'.2\sqrt{p} \text{ in } \dfrac{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'}{x\sqrt{p}}. \end{cases}$$

Die beiden Functionen $\frac{x-x^{-1}}{2}.\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'.2\sqrt{p}$ und $\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'$ sind daher von der Art, daſs, wenn in der einen von ihnen $K-u$ statt u gesetzt wird, das Resultat gleich der durch $x\sqrt{p}$ dividirten anderen Function ist. Dieselbe Bewandtniſs hat es mit den beiden Functionen $\frac{x+x^{-1}}{2}.\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'.2\sqrt{p}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$.

Zusatz 1. Multiplicirt man die Gleichungen (7.) und (8.), so erhält man $\frac{1}{\eta}\cdot\frac{b^2 d^2}{a^2 c^2}=1$, also

$$12.\quad K' = \tfrac{1}{2}\pi.\left(\frac{ac}{bd}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{(1+p^2)(1-p^4)(1+p^6)(1-p^8)\ldots.}{(1-p^2)(1+p^4)(1-p^6)(1+p^8)\ldots.}\right)^2.$$

Nimmt man p willkürlich an, so kann hiernach aus ihm jedesmal K' gefunden werden, und da $\frac{1}{p}=e^{\pi'K}$, also $\frac{\pi K}{2.K'}=\log\frac{1}{p}$ ist, so findet sich dann K nach der Formel $K=\frac{2K}{\pi}\log\frac{1}{p}$, oder also:

$$15.\quad K = \left(\frac{1+p^2}{1-p^2}\cdot\frac{1-p^4}{1+p^4}\cdot\frac{1+p^6}{1-p^6}\cdot\frac{1-p^8}{1+p^8}\ldots.\right)^2.\log\frac{1}{p}.$$

Den Modul k giebt die Formel $k = \left(\frac{b}{c}\right)^4$ oder

$$14. \quad k = \left(\frac{1-p^2}{1+p^2}\cdot\frac{1-p^6}{1+p^6}\cdot\frac{1-p^{10}}{1+p^{10}}\cdot\frac{1-p^{14}}{1+p^{14}}\dots\right)^4.$$

Setzt man hierin p für p^2, so verwandelt sich nach §. 168. der Modul k in $\frac{1-k'}{1+k'}$; daher ist $\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}} = \left(\frac{1-p}{1+p}\cdot\frac{1-p^3}{1+p^3}\cdot\frac{1-p^5}{1+p^5}\cdot\frac{1-p^7}{1+p^7}\dots\right)^2$, und also

$$\log\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}} = 4\log\sqrt{\left(\frac{1+p}{1-p}\cdot\frac{1+p^3}{1-p^3}\cdot\frac{1+p^5}{1-p^5}\cdot\frac{1+p^7}{1-p^7}\dots\right)}.$$

Setzt man hierin pi statt p, so verwandelt sich k in $\frac{1}{k}$, also k' in $\frac{ik'}{k}$, und es ist also

$$\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+\frac{ik'}{k}}{1-\frac{ik'}{k}}} = 4.\frac{1}{i}\log\sqrt{\left(\frac{1+pi}{1-pi}\cdot\frac{1-p^3i}{1+p^3i}\cdot\frac{1+p^5i}{1-p^5i}\cdot\frac{1-p^7i}{1+p^7i}\dots\right)}.$$

Wird also $k = \sin\theta$, $k' = \cos\theta$ und $\frac{k'}{k} = \operatorname{tang}(\frac{1}{2}\pi - \theta)$ gesetzt, so hat man

$$15. \quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \theta)$$
$$= 4\mathfrak{L}\operatorname{arc}\sin(p) + 4\mathfrak{L}\operatorname{arc}\sin(p^3) + 4\mathfrak{L}\operatorname{arc}\sin(p^5) + 4\mathfrak{L}\operatorname{arc}\sin(p^7) + \dots \text{ etc.},$$

$$16. \quad \tfrac{1}{2}\pi - \theta$$
$$= 4\operatorname{arc}\operatorname{tang}(p) - 4\operatorname{arc}\operatorname{tang}(p^3) + 4\operatorname{arc}\operatorname{tang}(p^5) - 4\operatorname{arc}\operatorname{tang}(p^7) + \dots \text{ etc.}$$

Wird p mit q vertauscht, so vertauscht sich K mit K', k mit k', und $\frac{1}{2}\pi - \theta$ mit θ. Wird außerdem $v = \frac{1}{2}\pi.\frac{K'}{K}$, also $q = e^{-v}$ gesetzt, so hat man

$$K = \tfrac{1}{2}\pi.\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,2v.\mathfrak{Tang}\,4v.\mathfrak{Tang}\,6v.\mathfrak{Tang}\,8v\dots}{\mathfrak{Tang}\,v.\mathfrak{Tang}\,3v.\mathfrak{Tang}\,5v.\mathfrak{Tang}\,7v\dots}\right)^2,$$

$$K = v.\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,2v.\mathfrak{Tang}\,4v.\mathfrak{Tang}\,6v.\mathfrak{Tang}\,8v\dots}{\mathfrak{Tang}\,v.\mathfrak{Tang}\,3v.\mathfrak{Tang}\,5v.\mathfrak{Tang}\,7v\dots}\right)^2,$$

$$k' = (\mathfrak{Tang}\,v.\mathfrak{Tang}\,3v.\mathfrak{Tang}\,5v.\mathfrak{Tang}\,7v.\mathfrak{Tang}\,9v\dots)^4,$$

$$\mathfrak{L}\theta = 4\mathfrak{L}\operatorname{arc}\sin(e^{-v}) + 4\mathfrak{L}\operatorname{arc}\sin(e^{-3v}) + 4\mathfrak{L}\operatorname{arc}\sin(e^{-5v}) + 4\mathfrak{L}\operatorname{arc}\sin(e^{-7v}) + \dots,$$

$$\theta = 4\operatorname{arc}\operatorname{tang}(e^{-v}) - 4\operatorname{arc}\operatorname{tang}(e^{-3v}) + 4\operatorname{arc}\operatorname{tang}(e^{-5v}) - \operatorname{arc}\operatorname{tang}(e^{-7v}) - \dots,$$

Zusatz 2. Verbindet man mit der Gleichung $bcd = 1$, oder $b^2c^2d^2 = 1$, die Gleichung $\frac{c^2}{b^2} = \frac{1}{\sqrt{k}}$, so erhält man $c^4.d^2 = \frac{1}{\sqrt{k}}$, und da $\frac{c^2}{d^2} = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{k'}}$ ist, so ist

$$17. \quad c^6 = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{(kk')}} = \{(1+p^2)(1+p^6)(1+p^{10})(1+p^{14})\dots\}^6.$$

Wird die Gleichung $\frac{b^4}{c^4} = k\sqrt{k}$ mit der vorigen multiplicirt, so entsteht

$$18.\quad b^6 = \frac{2k\sqrt{p}}{\sqrt{k'}} = \{(1-p^2)(1-p^6)(1-p^{10})(1-p^{14})\ldots\}^6.$$

Multiplicirt man die Gleichung $\frac{d^4}{c^4} = \frac{k'\sqrt{k'}}{8p\sqrt{p}}$ mit (17.), so entsteht

$$19.\quad d^6 = \frac{k'}{4p\sqrt{k}} = \{(1+p^4)(1+p^8)(1+p^{12})(1+p^{16})\ldots\}^6.$$

Multiplicirt man die Gleichung $\frac{\eta'^2 . a^6}{d^6} = k\sqrt{k}$ mit (19.), so erhält man endlich

$$20.\quad a^6 = \frac{kk'}{4\eta'^2 . p} = \{(1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})(1-p^{16})\ldots\}^6.$$

§. 170.

Zurückführung der Modular-Functionen auf vier hyperbolische Hülfs-Functionen, und Ausdruck dieser durch trinomische Factoren.

Die fünfte, zweite und vierte von den Formeln (10.) §. 169. lassen sich also darstellen:

$$\mathfrak{Sn}'u = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{k'}} . \frac{x - x^{-1}}{2} . \frac{\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'},$$

$$\mathfrak{Cn}'u = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\frac{k'}{k}}} . \frac{x + x^{-1}}{2} , \frac{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'},$$

$$\mathfrak{Dn}'u = \sqrt{k} . \frac{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'},$$

da $\mathfrak{Sn}'u = \text{tn}\, u$, $\mathfrak{Cn}'u = \frac{1}{\text{cn}\, u}$ und $\mathfrak{Dn}'u = \frac{1}{\text{snc}\, u}$ ist. Nehmen wir nun, aus Rücksicht auf die Gleichungen (11.) §. 169., vier Hülfs-Functionen an, nämlich:

$$1.\quad \begin{cases} \frac{\mathfrak{Al}'u}{\mathfrak{s}'} = 2\sqrt{p} . \frac{x - x^{-1}}{2} . \mathfrak{A}.\mathfrak{A}', \\ \frac{\mathfrak{Bl}'u}{\mathfrak{s}'} = 2\sqrt{p} . \frac{x + x^{-1}}{2} . \mathfrak{D}.\mathfrak{D}', \\ \frac{\mathfrak{Gl}'u}{\mathfrak{s}'} = \mathfrak{C}.\mathfrak{C}', \\ \frac{\mathfrak{Hl}'u}{\mathfrak{s}'} = \mathfrak{B}.\mathfrak{B}', \end{cases}$$

die wir, wenn der Modul mit dem conjugirten vertauscht wird, durch $\frac{\mathfrak{Al}u}{\mathfrak{s}}$, $\frac{\mathfrak{Bl}u}{\mathfrak{s}}$, $\frac{\mathfrak{Gl}u}{\mathfrak{s}}$ und $\frac{\mathfrak{Hl}u}{\mathfrak{s}}$ bezeichnen, so haben wir die Formeln

$$2.\quad\begin{cases}\mathfrak{Sn}'u=\dfrac{1}{\sqrt{k'}}\cdot\dfrac{\mathfrak{A}\mathfrak{l}'u}{\mathfrak{H}\mathfrak{l}'u} & \text{also}\quad \mathfrak{Sn}\,u=\dfrac{1}{\sqrt{k}}\cdot\dfrac{\mathfrak{A}\mathfrak{l}u}{\mathfrak{H}\mathfrak{l}u},\\ \mathfrak{Cn}'u=\sqrt{\dfrac{k}{k'}}\cdot\dfrac{\mathfrak{B}\mathfrak{l}'u}{\mathfrak{H}\mathfrak{l}'u} & -\quad \mathfrak{Cn}\,u=\sqrt{\dfrac{k'}{k}}\cdot\dfrac{\mathfrak{B}\mathfrak{l}u}{\mathfrak{H}\mathfrak{l}u},\\ \mathfrak{Dn}'u=\sqrt{k}\cdot\dfrac{\mathfrak{G}\mathfrak{l}'u}{\mathfrak{H}\mathfrak{l}'u} & -\quad \mathfrak{Dn}\,u=\sqrt{k'}\cdot\dfrac{\mathfrak{G}\mathfrak{l}u}{\mathfrak{H}\mathfrak{l}u},\\ \mathfrak{Tn}'u=\dfrac{1}{\sqrt{k}}\cdot\dfrac{\mathfrak{A}\mathfrak{l}'u}{\mathfrak{B}\mathfrak{l}'u} & -\quad \mathfrak{Tn}\,u=\dfrac{1}{\sqrt{k'}}\cdot\dfrac{\mathfrak{A}\mathfrak{l}u}{\mathfrak{B}\mathfrak{l}u},\end{cases}$$

wodurch die hyperbolischen Functionen auf vier hyperbolische Hülfs-Functionen zurückgeführt sind. Die Werthe der constanten, höchstens von den Moduln k und k' abhängigen Divisoren g und g' werden bald näher bestimmt werden. Wir nennen $\mathfrak{Al}\,u$ die erste, $\mathfrak{Bl}\,u$ die zweite, $\mathfrak{Gl}\,u$ die dritte und $\mathfrak{Hl}\,u$ die vierte hyperbolische Hülfs-Function.

Den Gleichungen (11.) §. 169. gemäfs ist nun, da $\frac{1}{\sqrt{p.x}}=e^{\eta'(\frac{1}{2}K-u)}$ ist,

$$3.\quad\begin{cases}\mathfrak{Al}'(K-u)=e^{\eta'(\frac{1}{2}K-u)}.\,\mathfrak{Hl}'u,\\ \mathfrak{Hl}'(K-u)=e^{\eta'(\frac{1}{2}K-u)}.\,\mathfrak{Al}'u,\\ \mathfrak{Bl}'(K-u)=e^{\eta'(\frac{1}{2}K-u)}.\,\mathfrak{Gl}'u,\\ \mathfrak{Gl}'(K-u)=e^{\eta'(\frac{1}{2}K-u)}.\,\mathfrak{Bl}'u;\end{cases}$$

wodurch ein einfaches Gesetz der Reciprocität ausgedrückt wird. Vertauscht man den Modul mit dem conjugirten, so sind diese Formeln

$$\begin{aligned}\mathfrak{Al}(K'-u)&=e^{\eta(\frac{1}{2}K'-u)}.\,\mathfrak{Hl}\,u,\\ \mathfrak{Hl}(K'-u)&=e^{\eta(\frac{1}{2}K'-u)}.\,\mathfrak{Al}\,u,\\ \mathfrak{Bl}(K'-u)&=e^{\eta(\frac{1}{2}K'-u)}.\,\mathfrak{Gl}\,u,\\ \mathfrak{Gl}(K'-u)&=e^{\eta(\frac{1}{2}K'-u)}.\,\mathfrak{Bl}\,u.\end{aligned}$$

Da $(1-p^4x^2)(1-p^4x^{-2})=1-2p^4\left(\frac{x^2+x^{-2}}{2}\right)+p^8=1-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^8$ ist, so erhält man durch die wirkliche Multiplication der Factoren von $\mathfrak{A}$ mit denen von $\mathfrak{A}'$, den Ausdruck

$$4.\quad \frac{\mathfrak{Al}'u}{g'}=2\sqrt{p}.\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u.(1-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^8)(1-2p^8\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{16})\\ \times(1-2p^{12}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{24})\ldots.$$

Eben so findet man die Ausdrücke

$$5.\quad \frac{\mathfrak{Bl}'u}{g'}=2\sqrt{p}.\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u.(1+2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^8)(1+2p^8\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{16})\\ \times(1+2p^{12}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{24})\ldots,$$

$$6.\quad \frac{\mathfrak{Gl}'u}{g'}=(1+2p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^4)(1+2p^6\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{12})\\ \times(1+2p^{10}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{20})\ldots,$$

$$7.\quad \frac{\mathfrak{Hl}'u}{g'}=(1-2p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^4)(1-2p^6\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{12})\\ \times(1-2p^{10}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{20})\ldots.$$

Die Constante g, welche wir weiter unten bestimmen werden, hängt eben so von dem Modul k ab, wie g' von dem Modul k'.

Für die cyklischen Modular-Functionen erhalten wir aus (2.) die Ausdrücke

$$8.\quad \begin{cases} \mathrm{sn}\,u = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\cdot\dfrac{\mathfrak{Al}'u}{\mathfrak{Bl}'u}, & \mathrm{snc}\,u = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\cdot\dfrac{\mathfrak{Hl}'u}{\mathfrak{Gl}'u}, \\ \mathrm{cn}\,u = \sqrt{\dfrac{k'}{k}}\cdot\dfrac{\mathfrak{Hl}'u}{\mathfrak{Bl}'u}, & \mathrm{snc}\,u = \sqrt{\dfrac{k'}{k}}\cdot\dfrac{\mathfrak{Al}'u}{\mathfrak{Gl}'u}, \\ \mathrm{dn}\,u = \sqrt{k'}\cdot\dfrac{\mathfrak{Gl}'u}{\mathfrak{Bl}'u}, & \mathrm{dnc}\,u = \sqrt{k'}\cdot\dfrac{\mathfrak{Bl}'u}{\mathfrak{Gl}'u}, \\ \mathrm{tn}\,u = \dfrac{1}{\sqrt{k'}}\cdot\dfrac{\mathfrak{Al}'u}{\mathfrak{Hl}'u}, & \mathrm{tnc}\,u = \dfrac{1}{\sqrt{k'}}\cdot\dfrac{\mathfrak{Hl}'u}{\mathfrak{Al}'u}. \end{cases}$$

Zusatz. Setzt man in den Ausdrücken (4.) bis (7.) $u+iK'$ statt u, also $\eta'u+\frac{1}{2}\pi i$ statt $\eta'u$, so verwandelt sich, nach §. 16. des ersten Theiles, $\mathfrak{Sin}\,\eta'u$ in $i\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u$ und $\mathfrak{Cos}\,\eta'u$ in $i\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u$; ferner $\mathfrak{Cos}\,2\eta'u$ in $-\mathfrak{Cos}\,2\eta'u$: daher erhält man

$$9.\quad \begin{cases} \mathfrak{Al}'(u+iK') = i.\mathfrak{Bl}'u, & \text{also auch} \quad \mathfrak{Al}(u+iK) = i.\mathfrak{Bl}u, \\ \mathfrak{Bl}'(u+iK') = i.\mathfrak{Al}'u, & \text{-}\quad\text{-} \quad \mathfrak{Bl}(u+iK) = i.\mathfrak{Al}u, \end{cases}$$

und

$$10.\quad \begin{cases} \mathfrak{Gl}'(u+iK') = \mathfrak{Hl}'u, & \text{also auch} \quad \mathfrak{Gl}(u+iK) = \mathfrak{Hl}u, \\ \mathfrak{Hl}'(u+iK') = \mathfrak{Gl}'u, & \text{-}\quad\text{-} \quad \mathfrak{Hl}(u+iK) = \mathfrak{Gl}u. \end{cases}$$

Hiernach verhalten sich also die Functionen $\mathfrak{Al}'u$ und $\mathfrak{Bl}'u$ ungefähr so, wie die hyperbolischen Sinus und Cosinus. Die Functionen $\mathfrak{Gl}'u$ und $\mathfrak{Hl}'u$ stehen in einem ähnlichen Zusammenhange mit einander.

§. 171.

Zurückführung der Modular-Functionen auf vier cyklische Hülfs-Functionen, und Ausdruck dieser durch trinomische Factoren.

Die gesuchten Formeln, wodurch die cyklischen Modular-Functionen auf vier cyklische Hülfs-Functionen zurückgeführt werden, erhält man schon dadurch, dafs man in den Formeln (2.) §. 170. ui statt u setzt. Ein Blick auf die Formeln (4.) bis (7.) §. 170. zeigt schon, dafs nur die Function $\mathfrak{Al}u$ imaginär wird, wenn ui statt u gesetzt wird; die drei Functionen $\mathfrak{Bl}u$, $\mathfrak{Gl}u$ und $\mathfrak{Hl}u$ aber bleiben reell. Setzt man

$$1.\quad \begin{cases} \mathfrak{Al}(ui) = i.\mathrm{Al}\,u, & \text{also} \quad \mathrm{Al}(ui) = i.\mathfrak{Al}u, \\ \mathfrak{Bl}(ui) = \mathrm{Bl}\,u, & \text{also} \quad \mathrm{Bl}(ui) = \mathfrak{Bl}u, \\ \mathfrak{Gl}(ui) = \mathrm{Gl}\,u, & \text{also} \quad \mathrm{Gl}(ui) = \mathfrak{Gl}u, \\ \mathfrak{Hl}(ui) = \mathrm{Hl}\,u, & \text{also} \quad \mathrm{Hl}(ui) = \mathfrak{Hl}u, \end{cases}$$

so erhalten wir für die vier cyklischen Hülfs-Functionen, wenn wir in den Formeln (4.) bis (7.) §. 170. die beiden conjugirten Modul mit einander vertauschen, und ui für u setzen, die Ausdrücke

2. $\frac{\text{Al}\,u}{g} = 2\sqrt{q}.\sin\eta u.(1-2q^4\cos 2\eta u+q^8)(1-2q^8\cos 2\eta u+q^{16})$
$\times(1-2q^{12}\cos 2\eta u+q^{24})\ldots,$

3. $\frac{\text{Bl}\,u}{g} = 2\sqrt{q}.\cos\eta u.(1+2q^4\cos 2\eta u+q^8)(1+2q^8\cos 2\eta u+q^{16})$
$\times(1+2q^{12}\cos 2\eta u+q^{24})\ldots,$

4. $\frac{\text{Gl}\,u}{g} = (1+2q^2\cos 2\eta u+q^4)(1+2q^6\cos 2\eta u+q^{12})(1+2q^{10}\cos 2\eta u+q^{20})\ldots,$

5. $\frac{\text{Hl}\,u}{g} = (1-2q^2\cos 2\eta u+q^4)(1-2q^6\cos 2\eta u+q^{12})(1-2q^{10}\cos 2\eta u+q^{20})\ldots$

und die Ausdrücke der Modular-Functionen selbst sind nun

$$6.\quad\begin{cases} \text{sn}\,u = \frac{1}{\sqrt{k}}.\frac{\text{Al}\,u}{\text{Hl}\,u}, & \text{snc}\,u = \frac{1}{\sqrt{k}}.\frac{\text{Bl}\,u}{\text{Gl}\,u}, \\ \text{cn}\,u = \sqrt{\frac{k'}{k}}.\frac{\text{Bl}\,u}{\text{Hl}\,u}, & \text{cnc}\,u = \sqrt{\frac{k'}{k}}.\frac{\text{Hl}\,u}{\text{Gl}\,u}, \\ \text{dn}\,u = \sqrt{k'}.\frac{\text{Gl}\,u}{\text{Hl}\,u}, & \text{dnc}\,u = \sqrt{k'}.\frac{\text{Hl}\,u}{\text{Gl}\,u}, \\ \text{tn}\,u = \frac{1}{\sqrt{k'}}.\frac{\text{Al}\,u}{\text{Bl}\,u}, & \text{tnc}\,u = \frac{1}{\sqrt{k'}}.\frac{\text{Bl}\,u}{\text{Al}\,u}. \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (2.) $K-u$ statt u, also $\frac{1}{2}\pi-\eta u$ für ηu, so erhält man

$$7.\quad\begin{cases} \text{Al}(K-u) = \text{Alc}\,u = \text{Bl}\,u, & \text{also}\quad \text{Al}(K+u) = \text{Al}(K-u), \\ \text{Bl}(K-u) = \text{Blc}\,u = \text{Al}\,u, & \text{-}\quad \text{Bl}(K+u) = -\text{Bl}(K-u), \\ \text{Gl}(K-u) = \text{Glc}\,u = \text{Hl}\,u, & \text{-}\quad \text{Gl}(K+u) = \text{Gl}(K-u), \\ \text{Hl}(K-u) = \text{Hlc}\,u = \text{Gl}\,u, & \text{-}\quad \text{Hl}(K+u) = \text{Hl}(K-u). \end{cases}$$

Die Functionen $\text{Al}\,u$ und $\mathfrak{A}\text{l}\,u$ werden negativ, wenn $-u$ statt u gesetzt wird: alle übrige hyperbolische und cyklische Hülfs-Functionen des Argumentes u ändern sich gar nicht, wenn man $-u$ statt u setzt.

Zusatz. Da $\text{sn}^2u+\text{cn}^2u = 1$ und $\text{snc}^2u+\text{cnc}^2u = 1$ ist, so findet man die Relationen

8. $\text{Al}^2u+k'.\text{Bl}^2u = k.\text{Hl}^2u,$ also $k.\mathfrak{B}\text{l}'^2u = k'.\mathfrak{H}\text{l}'^2u+\mathfrak{A}\text{l}'^2u,$

9. $\text{Bl}^2u+k'.\text{Al}^2u = k.\text{Gl}^2u,$ - $\mathfrak{B}\text{l}'^2u = k'.\mathfrak{G}\text{l}'^2u+k.\mathfrak{A}\text{l}'^2u.$

Auf ähnliche Weise erhält man noch

10. $k'.\text{Gl}^2u+k.\text{Al}^2u = \text{Hl}^2u,$ also $k.\mathfrak{G}\text{l}'^2u = \mathfrak{H}\text{l}'^2u+k'.\mathfrak{A}\text{l}'^2u,$

11. $k'.\text{Hl}^2u+k.\text{Bl}^2u = \text{Gl}^2u,$ - $k.\mathfrak{H}\text{l}'^2u+k'.\mathfrak{B}\text{l}'^2u = \mathfrak{G}\text{l}'^2u.$

Hiernach lassen sich also aus zwei cyklischen Hülfs-Functionen jedesmal

die beiden anderen herleiten, und dasselbe gilt von den hyperbolischen Hülfs-Functionen.

§. 172.

Bestimmungen der beiden Constanten g und g' und einiger particulären Werthe der acht Hülfs-Functionen.

Setzt man in den Formeln (4.) bis (7.) §. 170. das Argument $u = 0$, so erhält man

$$\mathfrak{Al}'o = 0,$$

$$\mathfrak{Bl}'o = 2g'\sqrt{p}\,.\,d^2 = 2g'\sqrt{p}\,.\sqrt[8]{\left(\frac{k'}{4p\sqrt{k}}\right)} = g'\sqrt[8]{\left(\frac{2\sqrt{p}\,.\,k'}{\sqrt{k}}\right)},$$

$$\mathfrak{Gl}'o = g'\,.\,c^2 = g'\,.\sqrt[8]{\left(\frac{2k\sqrt{p}}{\sqrt{kk'}}\right)},$$

$$\mathfrak{Hl}'o = g'\,.\,b^2 = g'\,.\sqrt[8]{\left(\frac{2k\sqrt{p}}{\sqrt{k'}}\right)}.$$

Eben so findet man

$$\text{Al}\,o = 0,$$

$$\text{Bl}\,o = 2g\sqrt{q}\,.\sqrt[8]{\left(\frac{k}{4q\sqrt{k'}}\right)} = g\sqrt[8]{\left(\frac{2\sqrt{q}\,.\,k}{\sqrt{k'}}\right)},$$

$$\text{Gl}\,o = g\,.\sqrt[8]{\left(\frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{(kk')}}\right)},$$

$$\text{Hl}\,o = g\,.\sqrt[8]{\left(\frac{2k'\sqrt{q}}{\sqrt{k}}\right)}.$$

Den Formeln (6.) des §. 171. gemäfs erhält man, wenn $u = 0$ gesetzt wird (oder $u = K$), die Gleichungen

$$\text{Bl}\,o = \sqrt{k}\,.\,\text{Gl}\,o,$$
$$\text{Bl}\,o\,.\sqrt{k'} = \sqrt{k}\,.\,\text{Hl}\,o,$$
$$\text{Gl}\,o\,.\sqrt{k'} = \text{Hl}\,o.$$

Daher ist überhaupt

$$\text{Gl}\,o = \frac{\text{Hl}\,o}{\sqrt{k'}} = \frac{\text{Bl}\,o}{\sqrt{k}}.$$

Aufserdem ist $\frac{\mathfrak{Bl}'o}{\text{Hl}\,o} = \frac{\mathfrak{Hl}'o}{\text{Bl}\,o} = \frac{\mathfrak{Gl}'o}{\text{Gl}\,o} = \frac{g'\sqrt[8]{p}}{g\sqrt[8]{q}}$. Diesen Gleichungen leisten wir auf die einfachste Weise Genüge, wenn wir die beiden Constanten g und g' so bestimmen, dafs

$$\text{Gl}\,o = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{Gl}'o = 1$$

wird. Hieraus folgt

$$1.\quad g'\sqrt[8]{p} = g\,.\sqrt[8]{q},$$

$$2. \quad \begin{cases} g' = \sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{kk'}}{2\sqrt{p}}\right)} = \left\{\dfrac{1}{(1+p^2)(1+p^6)(1+p^{10})(1+p^{14})\ldots}\right\}^2, \\ g = \sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{kk'}}{2\sqrt{q}}\right)} = \left\{\dfrac{1}{(1+q^2)(1+q^6)(1+q^{10})(1+q^{14})\ldots}\right\}^2. \end{cases}$$

Aufserdem haben wir noch die particulären Bestimmungen

$$3. \quad \begin{cases} \mathrm{Al}\,o = \mathrm{Bl}\,K = 0 & \text{und} \quad \mathfrak{Al}'o = 1, \\ \mathrm{Bl}\,o = \mathrm{Al}\,K = \sqrt{k} & \text{-} \quad \mathfrak{Bl}'o = \sqrt{k'}, \\ \mathrm{Gl}\,o = \mathrm{Hl}\,K = 1 & \text{-} \quad \mathfrak{Gl}'o = 1, \\ \mathrm{Hl}\,o = \mathrm{Gl}\,K = \sqrt{k'} & \text{-} \quad \mathfrak{Hl}'o = \sqrt{k}. \end{cases}$$

Setzt man noch in den Formeln (3.) §. 170. das Argument $u = 0$, so erhält man

$$4. \quad \begin{cases} \mathfrak{Al}'K = \sqrt{k}.e^{\frac{1}{2}\eta' K}, & \mathfrak{Gl}'K = \sqrt{k'}.e^{\frac{1}{2}\eta' K}, \\ \mathfrak{Bl}'K = e^{\frac{1}{2}\eta' K}, & \mathfrak{Hl}'K = 0. \end{cases}$$

§. 173.

Die cyklischen Hülfs-Functionen der Argumente von der Form $u + mK + niK'$.

Setzt man in den Formeln (7.) §. 171. jetzt $-u$ statt u, so werden sie

$$1. \quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u+K) = \mathrm{Bl}\,u, & \mathrm{Gl}(u+K) = \mathrm{Hl}\,u, \\ \mathrm{Bl}(u+K) = -\mathrm{Al}\,u, & \mathrm{Hl}(u+K) = \mathrm{Gl}\,u. \end{cases}$$

Setzt man in den vorigen Formeln $u + K$ statt K, so verwandeln sie sich in

$$\mathrm{Al}(u+2K) = -\mathrm{Al}\,u, \quad \mathrm{Bl}(u+2K) = -\mathrm{Bl}\,u, \quad \mathrm{Gl}(u+2K) = \mathrm{Gl}\,u \text{ und}$$
$$\mathrm{Hl}(u+2K) = \mathrm{Hl}\,u.$$

Hieraus folgen sofort die allgemeineren Formeln

$$2. \quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u+2mK) = (-1)^m.\mathrm{Al}\,u, & \mathrm{Al}(u+(2m+1)K) = (-1)^m.\mathrm{Bl}\,u, \\ \mathrm{Bl}(u+2mK) = (-1)^m.\mathrm{Bl}\,u, & \mathrm{Bl}(u+(2m+1)K) = (-1)^{m+1}.\mathrm{Al}\,u, \\ \mathrm{Gl}(u+2mK) = \mathrm{Gl}\,u, & \mathrm{Gl}(u+(2m+1)K) = \mathrm{Hl}\,u, \\ \mathrm{Hl}(u+2mK) = \mathrm{Hl}\,u, & \mathrm{Hl}(u+(2m+1)K) = \mathrm{Gl}\,u. \end{cases}$$

Nach §. 170. ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{Al}(u+K') &= e^{\eta(\frac{1}{2}K'+u)}.\mathfrak{Hl}\,u, \\ \mathfrak{Hl}(u+K') &= -e^{\eta(\frac{1}{2}K'+u)}.\mathfrak{Al}\,u, \\ \mathfrak{Bl}(u+K') &= e^{\eta(\frac{1}{2}K'+u)}.\mathfrak{Gl}\,u, \\ \mathfrak{Gl}(u+K') &= e^{\eta(\frac{1}{2}K'+u)}.\mathfrak{Bl}\,u. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können auch also dargestellt werden;

$$\begin{aligned} \mathrm{Al}(ui+iK') &= i.e^{\eta(\frac{1}{2}K'+u)}.\mathrm{Hl}(ui), \\ \mathrm{Hl}(ui+iK') &= i.e^{\eta(\frac{1}{2}K'+u)}.\mathrm{Al}(ui), \\ \mathrm{Bl}(ui+iK') &= e^{\eta(\frac{1}{2}K'+u)}.\mathrm{Gl}(ui), \\ \mathrm{Gl}(ui+iK') &= e^{\eta(\frac{1}{2}K'+u)}.\mathrm{Bl}(ui); \end{aligned}$$

und setzt man u statt ui, also $-ui$ statt u, so verwandeln sie sich sofort in die folgenden:

$$3.\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u+iK') = i.e^{\eta(iK'-ui)}.\mathrm{Hl}\,u, \\ \mathrm{Bl}(u+iK') = e^{\eta(iK'-ui)}.\mathrm{Gl}\,u, \\ \mathrm{Gl}(u+iK') = e^{\eta(iK'-ui)}.\mathrm{Bl}\,u, \\ \mathrm{Hl}(u+iK') = i.e^{\eta(iK'-ui)}.\mathrm{Al}\,u, \end{cases}$$

Da $(K'+u)^2-u^2 = 2uK'+K'^2 = 2K'(u+\frac{1}{2}K')$ und also $\frac{\pi}{4KK'}(K'+u)^2-\frac{\pi u^2}{4KK'} = \eta(\frac{1}{2}K'+u)$ ist, so können die früheren Formeln, indem man zur Abkürzung $\lambda = \frac{\pi}{4KK'}$ setzt, auch also dargestellt werden:

$$\frac{\mathfrak{Al}(u+K')}{e^{\lambda(K'+u)^2}} = \frac{\mathfrak{Hl}\,u}{e^{\lambda u^2}},\qquad \frac{\mathfrak{Gl}(u+K')}{e^{\lambda(u+K')^2}} = \frac{\mathfrak{Bl}\,u}{e^{\lambda u^2}},$$

$$\frac{\mathfrak{Bl}(u+K')}{e^{\lambda(u+K')^2}} = \frac{\mathfrak{Gl}\,u}{e^{\lambda u^2}},\qquad \frac{\mathfrak{Hl}(u+K')}{e^{\lambda(u+K')^2}} = \frac{\mathfrak{Al}\,u}{e^{\lambda u^2}}.$$

Setzt man also wiederholt $u+K'$ statt u, so entsteht

$$\frac{\mathfrak{Al}(u+2nK')}{e^{\lambda(u+2nK')^2}} = (-1)^n.\frac{\mathfrak{Al}\,u}{e^{\lambda u^2}} \quad\text{und}\quad \frac{\mathfrak{Al}(u+2nK'+K')}{e^{\lambda(u+2nK'+K')^2}} = (-1)^n.\frac{\mathfrak{Hl}\,u}{e^{\lambda u^2}},$$

$$\frac{\mathfrak{Bl}(u+2nK')}{e^{\lambda(u+2nK')^2}} = \frac{\mathfrak{Bl}\,u}{e^{\lambda u^2}} \quad\text{und}\quad \frac{\mathfrak{Bl}(u+2nK'+K')}{e^{\lambda(u+2nK'+K')^2}} = \frac{\mathfrak{Gl}\,u}{e^{\lambda u^2}},$$

$$\frac{\mathfrak{Gl}(u+2nK')}{e^{\lambda(u+2nK')^2}} = \frac{\mathfrak{Gl}\,u}{e^{\lambda u^2}} \quad\text{und}\quad \frac{\mathfrak{Gl}(u+2nK'+K')}{e^{\lambda(u+2nK'+K')^2}} = \frac{\mathfrak{Bl}\,u}{e^{\lambda u^2}},$$

$$\frac{\mathfrak{Hl}(u+2nK')}{e^{\lambda(u+2nK')^2}} = (-1)^n.\frac{\mathfrak{Hl}\,u}{e^{\lambda u^2}} \quad\text{und}\quad \frac{\mathfrak{Hl}(u+2nK'+K')}{e^{\lambda(u+2nK'+K')^2}} = (-1)^{n+1}.\frac{\mathfrak{Al}\,u}{e^{\lambda u^2}},$$

und hieraus erhält man auf ähnliche Art, wie die obigen Formeln (3.) hergeleitet wurden, die nachstehenden allgemeineren Formeln:

$$4.\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u+2niK').e^{\frac{\pi(u+2niK')^2}{4KK'}} = (-1)^n\,\mathrm{Al}\,u.e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}, \\ \mathrm{Bl}(u+2niK').e^{\frac{\pi(u+2niK')^2}{4KK'}} = \mathrm{Bl}\,u.e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}, \\ \mathrm{Gl}(u+2niK').e^{\frac{\pi(u+2niK')^2}{4KK'}} = \mathrm{Gl}\,u.e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}, \\ \mathrm{Hl}(u+2niK').e^{\frac{\pi(u+2niK')^2}{4KK'}} = (-1)^n.\mathrm{Hl}\,u.e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}, \end{cases}$$

und noch die folgenden:

$$5.\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u+(2n+1)iK').e^{\frac{\pi(u+(2n+1)iK')^2}{4KK'}} = i^{2n+1}.\mathrm{Hl}\,u.e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}, \\ \mathrm{Bl}(u+(2n+1)iK').e^{\frac{\pi(u+(2n+1)iK')^2}{4KK'}} = \mathrm{Gl}\,u.e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}, \\ \mathrm{Gl}(u+(2n+1)iK').e^{\frac{\pi(u+(2n+n)iK')^2}{4KK'}} = \mathrm{Bl}\,u.e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}, \\ \mathrm{Hl}(u+(2n+1)iK').e^{\frac{\pi(u+(2n+1)iK')^2}{4KK'}} = i^{2n+1}.\mathrm{Al}\,u.e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}. \end{cases}$$

Durch eine leichte Zusammensetzung der Formeln (2.), (4.) und (5.) erhält man die Ausdrücke der cyklischen Hülfs-Functionen eines Arguments von der Form $u+mK'+niK'$ durch Functionen des Argumentes u.

§. 174.

Reihen für die natürlichen Logarithmen der hyperbolischen und cyklischen Hülfs-Functionen des Argumentes u.

Nach §. 53. des ersten Theiles ist

$$\log(1+2p\,\mathfrak{Cos}\,\varphi+p^2)$$
$$=2p\,\mathfrak{Cos}\,\varphi-\frac{2p^2}{2}\mathfrak{Cos}\,2\varphi+\frac{2p^3}{3}\mathfrak{Cos}\,3\varphi-\frac{2p^4}{4}\mathfrak{Cos}\,4\varphi+-\text{etc. und}$$
$$\log(1-2p\,\mathfrak{Cos}\,\varphi+p^2)$$
$$=-2p\,\mathfrak{Cos}\,\varphi-\frac{2p^2}{2}\mathfrak{Cos}\,2\varphi-\frac{2p^3}{3}\mathfrak{Cos}\,3\varphi-\frac{2p^4}{4}\mathfrak{Cos}\,4\varphi--\text{etc.}$$

Entwickelt man hiernach die natürlichen Logarithmen der Factoren des für $\mathfrak{Al}'u$ in §. 170. angegebenen Productes, so erhält man

$$\log\mathfrak{Al}'u=\log(2g'\sqrt{p}.\mathfrak{Sin}\,\eta'u)$$
$$-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u-\frac{2p^8}{2}\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-\frac{2p^{12}}{3}\mathfrak{Cos}\,6\eta'u-\frac{2p^{16}}{4}\mathfrak{Cos}\,8\eta'u-\ldots.$$
$$-2p^8\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u-\frac{2p^{16}}{2}\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-\frac{2p^{24}}{3}\mathfrak{Cos}\,6\eta'u-\frac{2p^{32}}{4}\mathfrak{Cos}\,8\eta'u-\ldots.$$
$$-2p^{12}\mathfrak{Cos}\,2\eta'u-\frac{2p^{24}}{2}\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-\frac{2p^{36}}{3}\mathfrak{Cos}\,6\eta'u-\frac{2p^{48}}{4}\mathfrak{Cos}\,8\eta'u-\ldots.$$
$$-\text{etc.}$$

Die einzelnen Verticalreihen lassen sich summiren. Es ist

$$p^4+p^8+p^{12}+p^{16}\ldots.=\frac{p^4}{1-p^4},$$

und summirt man hiernach wirklich, so entsteht die Reihe

$$1.\quad \log\mathfrak{Al}'u=\log(2g'.\sqrt{p}.\mathfrak{Sin}\,\eta'u)$$
$$-\frac{2p^4}{1-p^4}\mathfrak{Cos}\,2\eta'u-\frac{\frac{2}{2}p^8}{1-p^8}\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-\frac{\frac{2}{3}p^{12}}{1-p^{12}}\mathfrak{Cos}\,6\eta'u-\frac{\frac{2}{4}p^{16}}{1-p^{16}}\mathfrak{Cos}\,8\eta'u.$$

Ganz eben so findet man die Reihen

$$2.\quad \log\mathfrak{Bl}'u=\log(2g'.\sqrt{p}.\mathfrak{Cos}\,\eta'u)$$
$$-\frac{2p^4}{1-p^4}\mathfrak{Cos}\,2\eta'u-\frac{\frac{2}{2}p^8}{1-p^8}\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-\frac{\frac{2}{3}p^{12}}{1-p^{12}}\mathfrak{Cos}\,6\eta'u-\frac{\frac{2}{4}p^{16}}{1-p^{16}}\mathfrak{Cos}\,8\eta'u+\ldots.$$
$$3.\quad \log\mathfrak{Gl}'u=\log g'$$
$$+\frac{2p^2}{1-p^4}\mathfrak{Cos}\,2\eta'u-\frac{\frac{2}{2}p^4}{1-p^8}\mathfrak{Cos}\,4\eta'u+\frac{\frac{2}{3}p^6}{1-p^{12}}\mathfrak{Cos}\,6\eta'u-\frac{\frac{2}{4}p^8}{1-p^{16}}\mathfrak{Cos}\,8\eta'u+\ldots.$$
$$4.\quad \log\mathfrak{Hl}'u=\log g'$$
$$-\frac{2p^2}{1-p^4}\mathfrak{Cos}\,2\eta'u-\frac{\frac{2}{2}p^4}{1-p^8}\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-\frac{\frac{2}{3}p^6}{1-p^{12}}\mathfrak{Cos}\,6\eta'u-\frac{\frac{2}{4}p^8}{1-p^{16}}\mathfrak{Cos}\,8\eta'+\ldots.$$

in welchen $g'=\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{(kk')}}{2.\sqrt{p}}\right)}$, **also** $\log g'=\log\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{(kk')}}{2}\right)}+\frac{\eta'K}{6}$ **ist.**

Diese Reihen haben einen hohen Grad der Convergenz, wenn der Modul k wenig von Eins verschieden und das Argument $u < \frac{1}{2}K$ oder doch nicht $> \frac{1}{2}K$ ist; sie lassen sich auch wie folgt darstellen:

$$5.\quad\left\{\begin{array}{c}
\log \mathfrak{Al}'u = \log(2g'\sqrt{p}\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u) \\
-p^2\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-\frac{p^4}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta'K}-\frac{p^6}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}-\frac{p^8}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta'K}-\dots, \\
\log \mathfrak{Bl}'u = \log(2g'\sqrt{p}\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u) \\
+p^2\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-\frac{p^4}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta'K}+\frac{p^6}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}-\frac{p^8}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta'K}+-\dots, \\
\log \mathfrak{Gl}'u = \\
\log g'+\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta'K}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta'K}+-\dots, \\
\log \mathfrak{Hl}'u = \\
\log g'-\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta'K}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta'K}--\dots
\end{array}\right.$$

Ist das Argument $u > K$, so kann man Gebrauch machen von den Formeln:

$$\log \mathfrak{Al}'u = \log \mathfrak{Hl}'(K-u) + \eta'(u-\tfrac{1}{2}K),$$
$$\log \mathfrak{Bl}'u = \log \mathfrak{Gl}'(K-u) + \eta'(u-\tfrac{1}{2}K),$$
$$\log \mathfrak{Gl}'u = \log \mathfrak{Bl}'(K-u) + \eta'(u-\tfrac{1}{2}K),$$
$$\log \mathfrak{Hl}'u = \log \mathfrak{Al}'(K-u) + \eta'(u-\tfrac{1}{2}K),$$

welche sich unmittelbar aus den Gleichungen (3.) §. 170. ergeben und also die Functionen des Argumentes u auf Functionen des Argumentes $K-u$, welches $< K$ ist, zurückführen.

Vertauscht man in den Formeln (5.) die beiden conjugirten Moduln k und k' mit einander, zugleich ui für u setzend, so erhält man für die cyklischen Hülfs-Functionen, oder eigentlich für ihre natürlichen Logarithmen die Reihen:

$$6.\quad\left\{\begin{array}{c}
\log \mathrm{Al}\,u = \log(2g.\sqrt{q}.\sin\eta u) \\
-q^2\cdot\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'}-\frac{q^4}{2}\cdot\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'}-\frac{q^6}{3}\cdot\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'}-\frac{q^8}{4}\cdot\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'}-\dots, \\
\log \mathrm{Bl}\,u = \log(2g.\sqrt{q}.\cos\eta u) \\
+q^2\cdot\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'}-\frac{q^4}{2}\cdot\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'}+\frac{q^6}{3}\cdot\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'}-\frac{q^8}{4}\cdot\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'}+-\dots, \\
\log \mathrm{Gl}\,u = \\
\log g+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'}+-\dots, \\
\log \mathrm{Hl}\,u = \\
\log g-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'}--\dots,
\end{array}\right.$$

welche desto rascher convergiren, je kleiner der Modul k ist, das Argument u mag $< \frac{1}{2}K$ oder $> K\frac{1}{2}$ sein. Es ist $g = \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{(kk')}}{2.\sqrt{q}}\right)}$, also $\log g = \log \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{(kk')}}{2}\right)} + \frac{\eta K'}{6}$.

Zusatz. Ist in den Reihen (5.) der Modul zu klein, oder in den Reihen (6.) der Modul zu grofs, so wird man die einen Hülfs-Functionen auf die anderen zurückführen.

Die dazu dienenden merkwürdigen Formeln

$$\log \mathfrak{Al}'u = \log \mathrm{Al}\,u + \frac{\pi u^2}{4KK'}, \qquad \log \mathfrak{Gl}'u = \log \mathrm{Gl}\,u + \frac{\pi u^2}{4KK'},$$

$$\log \mathfrak{Bl}'u = \log \mathrm{Hl}\,u + \frac{\pi u^2}{4KK'}, \qquad \log \mathfrak{Hl}'u = \log \mathrm{Bl}\,u + \frac{\pi u^2}{4KK'}$$

können aber erst weiter unten in gehöriger Weise hergeleitet werden.

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Hefte.)

9.

Ueber die Fufspunctencurven der Linien zweiten Grades.

(Von Hrn. *Rudolf Wolf* aus Zürich.)

Fällt man von einem in der Ebene einer Curve willkürlich angenommenen Puncte, dem sogenannten *Pole*, Perpendikel auf die Tangenten dieser Curve, so liegen die Fufspuncte derselben in einer neuen Curve, welche man die *Fufspunctencurve* der Vorgelegten zu nennen pflegt. Der Zweck dieses Aufsatzes ist, die Fufspunctencurven der Linien zweiten Grades, sowohl ihrer Form als auch ihrem Gehalte nach zu untersuchen, mit vorzüglicher Hinsicht auf einige der von Herrn Professor *Steiner* im vierten Hefte des vorigen Bandes dieses Journals mitgetheilten Sätze.

§. 1.

Legt man durch den zum Pole gewählten Punct ein zu den Haupt-Axen der Linie des zweiten Grades paralleles Axensystem x, y, so wird die Curve zweiten Grades in Beziehung auf dasselbe durch die Gleichung

$$1.\quad ax^2+by^2+2cx+2dy+e=0$$

ausgedrückt, und hieraus folgt für die Tangente an den Punct (x, y) die Gleichung

$$2.\quad y'-y=-\frac{m}{n}(x'-x),$$

wo der Kürze wegen

$$3.\quad m=ax+c,\qquad n=by+d.$$

Für den Fufspunct des Perpendikels aus dem Pole auf diese Tangente, oder für den dem Puncte (x, y) entsprechenden Punct (x'', y'') der Fufspunctencurve hat man demnach

$$4.\quad x''=m\frac{mx+ny}{m^2+n^2},\qquad y''=n\frac{mx+ny}{m^2+n^2}.$$

Eliminirt man aus den Gleichungen (1.), (3.) und (4.) die Gröfsen x und y, so erhält man eine von dem Puncte (x, y) unabhängige Verbindungsgleichung zwischen x'' und y'', d. h. die gesuchte Gleichung der Fufspunctencurve. Um diese Rechnung zu vereinfachen, kann man

$$x''=r\cos v,\qquad y''=r\sin v$$

setzen, d. h. Polarcoordinaten einführen. Dann giebt die Verbindung der Gleichungen (3.) und (4.)

$$r = x\cos v + y\sin v, \qquad (ax+c)\sin v - (by+d)\cos v = 0,$$

und die successive Elimination:

$$x = \frac{br\cos v + d\sin v\cos v - c\sin^2 v}{a\sin^2 v + b\cos^2 v}, \quad y = \frac{ar\sin v + c\sin v\cos v - d\cos^2 v}{a\sin^2 v + b\cos^2 v}.$$

Durch Substitution dieser Werthe geht (1.), wenn man den Factor $ab(a\sin^2 v + b\cos^2 v)$ absondert, in die Gleichung

$$5. \quad r^2 + 2r\left(\frac{c}{a}\cos v + \frac{d}{b}\sin v\right)$$
$$+ \frac{ae-c^2}{ab}\sin^2 v + \frac{be-d^2}{ab}\cos^2 v + \frac{2cd}{ab}\sin v\cos v = 0$$

über, und dies ist demnach die verlangte allgemeine Gleichung der Fufspunctencurve einer Linie zweiten Grades; sie ist jedoch noch einer für die folgenden Untersuchungen passenderen Form ihrer Coefficienten fähig. Bezeichnen nämlich p den Parameter, ε das Verhältnifs der Excentricität der durch die Gleichung (1.) ausgedrückten Curve zweiten Grades, ξ und ν die Coordinaten ihres Scheitels, so hat man, wie ich in den Annalen der Wiener-Sternwarte (Band XVII.) zu zeigen versucht habe,

$$6. \quad \begin{cases} p^2 = \dfrac{ad^2+bc^2-abe}{b^3}, & \varepsilon^2 = \dfrac{b-a}{b}, \\ \xi = -\left(\dfrac{b}{a}p + \dfrac{c}{a}\right), & \nu = -\dfrac{d}{b}, \end{cases}$$

und es ist somit

$$\frac{c}{a} = -\left(\xi + \frac{p}{1-\varepsilon^2}\right), \quad \frac{d}{b} = -\nu, \quad \frac{2cd}{ab} = 2\nu\left(\xi + \frac{p}{1-\varepsilon^2}\right),$$
$$\frac{ae-c^2}{ab} = \nu^2 - \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}, \quad \frac{be-d^2}{ab} = \xi^2 + 2\frac{p}{1-\varepsilon^2}\xi.$$

Durch Substitution dieser Werthe in (5.) erhält man

$$7. \quad r^2 - 2r\left[\left(\xi + \frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)\cos v + \nu\sin v\right]$$
$$+\left(\nu^2 - \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}\right)\sin^2 v + \left(\xi^2 + 2\frac{p}{1-\varepsilon^2}\xi\right)\cos^2 v + 2\nu\left(\xi + \frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)\sin v\cos v = 0,$$

und diese Gleichung soll das Fundament der folgenden Untersuchungen bilden, die von jetzt an am zweckmäfsigsten für jede der drei Classen der Curven zweiten Grades besonders dürften geführt werden.

§. 2.

Ist $\varepsilon < 1$, so gehört die Gleichung (1.) einer Ellipse an. Bezeichnet man die halben Axen der Ellipse durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so ist

$$\mathfrak{a} = \frac{p}{1-\varepsilon^2}, \quad \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{a}p = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2},$$

und setzt man der Kürze wegen

$$8. \quad \alpha = (\mathfrak{a}+\xi)\cos v + \nu \sin v,$$

so erhält man aus (7.) für die Fufspunctencurve der Ellipse die Gleichung

$$9. \quad r^2 - 2\alpha r + \alpha^2 - \mathfrak{a}^2\cos^2 v - \mathfrak{b}^2\sin^2 v = 0,$$

oder auch die Formel

$$10. \quad r = \alpha \pm \sqrt{(\mathfrak{a}^2\cos^2 v + \mathfrak{b}^2\sin^2 v)}.$$

Liegt der Pol im Scheitel der Ellipse, so ist $\xi = 0 = \nu$, und die zugehörige Fufspunctencurve hat nach (9.) die Gleichung

$$r^2 - 2\mathfrak{a}r\cos v - \mathfrak{b}^2\sin^2 v = 0,$$

welche eine auffallende Uebereinstimmung mit der Gleichung der Cardioide, der einfachsten aller Epicycloiden, hat. Denn, restituirt man $x = r\cos v$ und $y = r\sin v$, so geht sie in

$$x^4 + y^4 - 2\mathfrak{a}x^3 = y^2(\mathfrak{b}^2 + 2\mathfrak{a}x - 2x^2)$$

über, und für den speciellen Fall des Kreises, oder für $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, verwandelt sie sich in der That in die bekannte Gleichung

$$x^4 + y^4 - 2\mathfrak{a}x^3 = y^2(\mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{a}x - 2x^2)$$

der Cardioide. Liegt der Pol dagegen im Mittelpuncte der Ellipse, so ist $\mathfrak{a}+\xi = 0 = \nu$, und für diesen Fall hat man nach (9.) als Gleichung der Fufspunctencurve:

$$r^2 = \mathfrak{a}^2\cos^2 v + \mathfrak{b}^2\sin^2 v,$$

eine durch die Untersuchungen des Herrn Hofrath *Gaufs* (*Zach's* Correspondenz XXIII. 112) schon bekannte Form der Ellipsengleichung.

Bezeichnet man den vom Radius-vector r bei der Construction der Fufspunctencurve beschriebenen Raum durch F, so ist

$$11. \quad \left\{\begin{aligned} F &= \int \frac{r^2\,dv}{2} \\ &= \frac{\alpha^2+\beta^2+\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2}{4}v - \frac{\alpha\beta}{2}\sin^2 v + \frac{\alpha^2-\beta^2+\mathfrak{a}^2\varepsilon^2}{8}\sin 2v \\ &\pm \alpha\left[\frac{u\sin v}{2} + \frac{\mathfrak{a}^2-4\mathfrak{b}^2}{4\mathfrak{a}\varepsilon}\arcsin\frac{u^2-\mathfrak{a}^2\varepsilon^2\sin^2 v}{\mathfrak{a}^2}\right] \\ &\pm \beta\left[\frac{u\cos v}{2} + \frac{\mathfrak{b}^2}{2\mathfrak{a}\varepsilon}\log(u+\mathfrak{a}\varepsilon\cos v)\right] + \text{const.}, \end{aligned}\right.$$

wo $\alpha = a + \xi$ und $\beta = \nu$ die Coordinaten des Mittelpunctes bedeuten und der Kürze wegen

$$12. \quad u^2 = \mathfrak{a}^2 \cos^2 v + \mathfrak{b}^2 \sin^2 v$$

gesetzt wurde. Das Doppelzeichen $\pm$ in der Gleichung (10.) bedeutet offenbar, dafs für jeden Werth des Winkels v der Radius-vector r zwei Werthe haben könne; entsprechend sagt das Doppelzeichen in (11.), dafs vom Radius-vector zwei verschiedene Räume beschrieben werden. Begreift man daher unter F die Summe der Räume, so ist F aus der Formel

$$13. \quad F = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2}{2} v - \alpha\beta \sin^2 v + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \mathfrak{a}^2 s^2}{4} \sin 2v$$

zu berechnen. Es ist leicht zu sehen, dafs für jede Lage des Poles die Integration zwischen den Grenzen $v = 0$ und $v = \pi$ zu vollführen ist. Der vollständige, von der Fufspunctencurve eingeschlossene Raum wird daher durch

$$14. \quad F = \tfrac{1}{2}\pi(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \alpha^2 + \beta^2)$$

ausgedrückt. Man kann ohne weitere Rechnung hieraus schliefsen, dafs für $\alpha = 0 = \beta$, oder für den Mittelpunct, der entsprechende Raum

$$15. \quad f = \tfrac{1}{2}\pi(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2)$$

ein Minimum ist. Bezeichnet man demnach überhaupt den Abstand des Poles vom Mittelpuncte durch ϱ, so ist im Allgemeinen

$$16. \quad F = f + \tfrac{1}{2}\pi r^2;$$

d. h. alle Fufspunctencurven, deren Pole gleichen Abstand vom Mittelpuncte haben, sind dem Inhalte nach gleich, und ihr Inhalt läfst sich leicht geometrisch darstellen.

§. 3.

Ist $\varepsilon = 1$, so gehört die Gleichung (1.) einer Parabel an. Multiplicirt man daher (7.) mit $(1 - \varepsilon^2)$, und setzt $\varepsilon = 1$, so stellt die daraus entspringende Gleichung

$$17. \quad r = \xi \cos v + \nu \sin v - \frac{p}{2} \cdot \frac{\sin^2 v}{\cos^2 v}$$

die Fufspunctencurve der Parabel dar. Sie zeigt, dafs die Fufspunctencurve aus einem endlichen Theile besteht (der zur Schleife wird, sobald der Pol aufserhalb der Parabel liegt), und aus zwei unendlichen Aesten. Zur Un-

tersuchung, ob diese Curve für ihre unendlichen Aeste eine Asymptote habe, dienen die bekannten Ausdrücke

$$18. \quad \tang(v+\psi) = -r\frac{dv}{dr}, \quad u = r^2\frac{dv}{\Delta(dr^2+r^2dv^2)},$$

wo ψ den Winkel irgend einer Tangente mit der Axe der x und u das Loth aus dem Ursprunge der Coordinaten auf diese Tangente repräsentirt. Setzt man nämlich in der Gleichung der Curve r unendlich grofs und berechnet den entsprechenden Werth von v, so hat die Curve eine Asymptote, wenn ψ und u für diese Werthe reell und endlich werden. Im vorliegenden Falle findet man auf diese Weise $\psi = 90^0$, $u = -\frac{p}{2}$: also hat die Fufspunctencurve der Parabel eine Asymptote, welche senkrecht auf der Abscissen-Axe steht und um den halben Parameter hinter dem Pole liegt.

Liegt der Pol im Scheitel der Parabel, so ist $\xi = \nu = 0$; also geht dann (17.) in

$$2r\cos v + p\sin^2 v = 0$$

über, oder, wenn man $x = r\cos v$, $y = r\sin v$ setzt, in

$$x^3 = y^2\left[\left(-\frac{p}{2}\right) - x\right].$$

Die Fufspunctencurve der Parabel aus dem Scheitel ist demnach eine Cissoide, und zwar hat sie die Leitlinie der Parabel zur Asymptote. Liegt dagegen der Pol im Brennpuncte der Parabel, so ist $\nu = 0$ und $\xi = -\frac{p}{2}$. Für diese Werthe geht (17.) in

$$r\cos v = -\frac{p}{2}$$

über; d. h. die Fufspunctencurve der Parabel aus dem Brennpuncte fällt mit ihrer Asymptote und der Tangente im Scheitel zusammen.

Es ist nun die Fufspunctencurve der Parabel zu quadriren. Bezeichnet man den Inhalt, ohne einstweilen auf die Grenzen Rücksicht zu nehmen, durch F, so wird für $\frac{p}{2} = a$:

$$F = \int\frac{r^2dv}{2}$$
$$= \frac{(\xi+a)^2-r^2}{8}\sin 2v + \frac{(\xi-a)^2+\nu^2-4a^2}{4}v$$
$$+\frac{\nu(a+\xi)}{2}\sin^2 v + \frac{a^2}{2}\tang v + a\nu\log\cos v,$$

oder, wenn man

$$19. \quad a+\xi = 2x, \quad \nu = 2y$$

setzt:

$$20. \quad F = (x^2-2ax+y^2)v + \frac{x^2-y^2}{2}\sin 2v + 2xy\sin^2 v + \frac{a^2}{2}\operatorname{tang} v + 2ay\log\cos v.$$

Die Bestimmung der Grenzen hängt offenbar, wenn der Pol aufserhalb der Parabel liegt, von der Lage der Tangenten ob, die man von ihm aus an die Parabel ziehen kann. Bezeichnet θ den Winkel der über der Abscissen-Axe liegenden Tangente mit dieser Axe und θ' den der untern Tangente zugehörenden Winkel, so hat man, abgesehen von der Lage dieser Winkel,

$$21. \quad \operatorname{tang}\theta = \frac{a}{\sqrt{(y^2+a(2x-a))}-y}, \quad \operatorname{tang}\theta' = \frac{a}{\sqrt{(y^2+a(2x-a))}+y},$$

und in Bezug auf diese Werthe von θ und θ' ist der Inhalt S der Schleife:

$$22. \left\{\begin{aligned} S &= \int_C^{90^\circ-\theta'} \frac{r^2\,dv}{2} + \int_{\frac{3}{2}\pi+\theta}^{2\pi} \frac{r^2\,dv}{2} \\ &= (x^2-2ax+y^2)(\pi-\theta-\theta') + \frac{x^2-y^2}{2}(\sin 2\theta+\sin 2\theta') \\ &\quad -2xy(\cos^2\theta-\cos^2\theta') + \frac{a^2}{2}(\operatorname{cotg}\theta+\operatorname{cotg}\theta') - 2ay\cdot\log\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} \\ &= (x^2-2ax+y^2)(\pi-\theta-\theta') + (x+a)\sqrt{(y^2+a(2x-a))} \\ &\quad -2ay.\log\frac{y^2+ax+y\sqrt{(y^2+a(2x-a))}}{a\sqrt{(x^2+y^2)}}. \end{aligned}\right.$$

Der Inhalt des von r beim Beschreiben der unendlichen Aeste durchlaufenen Raumes ist analog:

$$23. \left\{\begin{aligned} T &= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi+\theta} \frac{r^2\,dv}{2} + \int_{\frac{1}{2}\pi-\theta'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{r^2\,dv}{2} \\ &= -\frac{x^2-y^2}{2}(\sin 2\theta+\sin 2\theta') + (x^2-2ax+y^2)(\theta+\theta') \\ &\quad +2xy(\cos^2\theta-\cos^2\theta') - \frac{a^2}{2}(\operatorname{cotg}\theta+\operatorname{cotg}\theta') - a^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\pi \\ &\qquad +2ay\log\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} \\ &= (x^2-2ax+y^2)(\theta+\theta') - (x+a\sqrt{(y^2+a(2x-a))} - a^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\pi \\ &\quad +2ay\log\frac{y^2+ax+y\sqrt{(y^2+a(2x-a))}}{a\sqrt{(x^2+y^2)}}. \end{aligned}\right.$$

Da aber $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi = \infty$ ist, so ist auch dieser Raum T unendlich grofs und kann daher kein weiteres Interesse haben. Es zeigte sich aber, dafs die Fufspunctencurven der Parabel immer eine in Bezug auf den Pol constant liegende Asymptote hat. Stellt man sich daher vor, der Radius-vector r beschreibe vom Pole aus diese Gerade, so durchläuft er hiebei offenbar

den Raum

$$T' = -a^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\pi,$$

welcher ebenfalls unendlich grofs ist. Die Vergleichung dieser Räume T und T' zeigt, dafs ihre Differenz eine endliche Gröfse ist. Es scheint daher zweckmäfsig, dem den unendlichen Aesten zugehörenden Raume den Raum zwischen ihnen und ihrer Asymptote zu substituiren. Die Formeln (23.) und (24.) geben für ihn den Ausdruck

$$25. \quad V = -(x^2-2ax+y^2)(\theta+\theta')+(x+a)\sqrt{(y^2+a(2x-a))} \\ -2ay\log\frac{y^2+ax+y\sqrt{(y^2+a(2x-a))}}{a\sqrt{(x^2+y^2)}}.$$

Summirt man endlich die Räume S und V, mit Hinsicht auf den Gegensatz ihrer Lage, so geht für den Gesammt-Inhalt der einfache Ausdruck

$$26. \quad F = x^2-2ax+y^2)\pi$$

hervor. Es ist leicht zu sehen, dafs dieser Ausdruck seine Gültigkeit behält, wenn auch der Pol innerhalb der Parabel liegt. Das Minimum des Raumes F hat, zufolge der bekannten Regel, für $x=a$ und $y=0$ statt, nemlich wenn der Pol im Durchschnittspuncte der Leitlinie der Parabel mit ihrer Haupt-Axe liegt; und zwar ist es dann

$$f = -a^2\pi.$$

Der Ausdruck (26.) giebt zugleich Mittel an die Hand, den Ort des Poles zu bestimmen, dem ein bestimmter Raum F entspricht. Denn setzt man in (26.) $x = -\frac{x'-a}{2}$, $y = -\frac{y'}{2}$ (wo x', y' die Coordinaten des Poles in Bezug auf den Scheitel ausdrücken), so wird

$$x'^2+2ax'+y'^2 = \frac{4F}{\pi}+3a^2;$$

und diese Gleichung bezeichnet offenbar einen Kreis, dessen Centrum in dem obigen Minimumspuncte liegt und dessen Radius r durch

$$27. \quad r^2 = \frac{4}{\pi}(F+a^2\pi) = \frac{4}{\pi}(F-f)$$

ausgedrückt wird. Der Ort des den Raum F erzeugenden Poles ist demnach dieser Kreis. Hieraus hat man auch statt (26.) den Ausdruck

$$28. \quad F = f+\frac{r^2\pi}{4},$$

dessen geometrische Bedeutung leicht zu erkennen ist.

§. 4.

Ist endlich $\varepsilon > 1$, so gehört die Gleichung (1.) einer Hyperbel an. Die Formeln für die Fusspunctencurve stimmen in diesem Falle natürlich wieder mit denen bei der Ellipse überein; nur ist zu bemerken, dass für die Hyperbel die grosse Axe und das Quadrat der kleinen Axe negativ sind; d. h. man hat jetzt für die Fusspunctencurve die Gleichung

$$29. \quad r^2 - 2r\alpha + \alpha^2 - \mathfrak{a}^2\cos^2 v + \mathfrak{b}^2\sin^2 v = 0,$$

wo der Kürze wegen

$$30. \quad \alpha = (\xi - \mathfrak{a})\cos v + \nu \sin v.$$

Verlegt man den Pol in den Mittelpunct der Hyperbel, so geht (29.) in

$$r^2 = \mathfrak{a}^2\cos^2 v - \mathfrak{b}^2\sin^2 v$$

über und stellt eine schleifenförmige Curve dar, die für $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, oder für die gleichseitige Hyperbel, zu der in der Geschichte der Mathematik so merkwürdigen, von *Jacob Bernoulli* zuerst betrachteten Lemniscate wird; denn die zugehörende Gleichung

$$r^2 = \mathfrak{a}^2\cos 2v$$

ist der einfache Polar-Ausdruck der Lemniscate.

Behufs der Quadratur hat man, analog (11.):

$$31. \quad \left\{\begin{aligned} F &= \int \frac{r^2\,dv}{2} \\ &= \frac{\alpha^2+\beta^2+\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2}{4}v - \frac{\alpha\beta}{2}\sin^2 v + \frac{\alpha^2-\beta^2+\mathfrak{a}^2\varepsilon^2}{8}\sin 2v \\ &\pm \alpha\left[\frac{u\sin v}{2} - \frac{\mathfrak{a}^2+4\mathfrak{b}^2}{4\mathfrak{a}\varepsilon}\arcsin\frac{u^2-\mathfrak{a}^2\varepsilon^2\sin^2 v}{\mathfrak{a}^2}\right] \\ &\pm \beta\left[\frac{u\cos v}{2} - \frac{\mathfrak{b}^2}{2\mathfrak{a}\varepsilon}\log(u-\mathfrak{a}\varepsilon\cos v)\right] + \text{const.}; \end{aligned}\right.$$

wo α und β die Coordinaten des Mittelpuncts der Hyperbel sind und der Kürze wegen

$$32. \quad u^2 = \mathfrak{a}^2\cos^2 v - \mathfrak{b}^2\sin^2 v$$

ist. Summirt man nun wieder die beiden vom Radius-vector beschriebenen Räume, so wird

$$33. \quad F = \frac{\alpha^2+\beta^2+\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2}{2}v - \alpha\beta\sin^2 v + \frac{\alpha^2-\beta^2+\mathfrak{a}^2\varepsilon^2}{4}\sin 2v.$$

Um den ganzen Inhalt zu bekommen, ist hier offenbar zwischen den Grenzen 0 und φ zu integriren; wo φ dem Winkel der kleinen Axe mit der Asymptote gleich ist, so dass

$$34. \quad \varphi = \operatorname{arc\,tang}\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}};$$

und dies Resultat ist noch zu verdoppeln. Es ist demnach

$$35.\quad F = (a^2-b^2)\Phi + ab + (\alpha^2+\beta^2)\Phi - \alpha\beta\frac{2a^2}{a^2+b^2} + (\alpha^2-\beta^2)\frac{ab}{a^2+b^2}.$$

Das Minimum von F gehört offenbar zu dem Puncte ($\alpha = 0$, $\beta = 0$), d. h. zum Mittelpuncte, so dafs derselbe

$$f = (a^2-b^2)\Phi + ab$$

ist, und man hat für F auch den Ausdruck

$$36.\quad F = f + (\alpha^2+\beta^2)\Phi - \alpha\beta\frac{2a^2}{a^2+b^2} + (\alpha^2-\beta^2)\frac{ab}{a^2+b^2}.$$

Soll der Ort des Poles gesucht werden, dem ein bestimmter Inhalt F entspricht, so hat man (36.) nur in Bezug auf die Variabeln α, β als Gleichung der Ortscurve zu betrachten. Untersucht man diese Gleichung nach den Formeln des in §. 1. angeführten Aufsatzes, so findet man, dafs sie zu einer Ellipse gehört, die mit der Hyperbel concentrisch ist; bezeichnet man überdies die Axen dieser Ellipse durch a' und b' und den Winkel der grofsen Axe mit der Abscissen-Axe durch μ, so ergiebt sich

$$\mu = -\tfrac{1}{2}\Phi, \qquad a'^2 : b'^2 = \varepsilon\Phi + 1 : \varepsilon\Phi - 1.$$

Das Verhältnifs der Axen ist demnach von F unabhängig, d. h. es sind alle Orts-Ellipsen ähnlich.

10.

De transformatione integralis $\iint\frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{\sqrt{(\sin^2\nu-\sin^2\varphi\cos^2\psi)}}$.

(Auctore *Haedenkamp*, Hamm. Guestph.)

Integrale duplex indefinitum

$$1.\quad \iint\frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{\sqrt{(\sin^2\nu-\sin^2\varphi\cos^2\psi)}}$$

per simplicem transformationem hujus formae

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi'\sqrt{\left(\frac{\cos\nu+\cos\varphi}{\cos\nu-\cos\varphi}\right)}$$

ad formam

$$\iint\frac{\partial\varphi\,\partial\varphi'}{\sqrt{(1-\cos^2\nu-\cos^2\varphi-\cos^2\varphi'+2\cos\nu\cos\varphi\cos\varphi')}}$$

revocare licet. Ex aequatione enim

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi'\sqrt{\left(\frac{\cos\nu+\cos\varphi}{\cos\nu-\cos\varphi}\right)}.$$

provenit

$$\cos\psi = \frac{\cos\nu\cos\varphi'-\cos\varphi}{\cos\nu-\cos\varphi\cos\varphi'},$$

$$\sin\psi = \frac{\sin\varphi'\sqrt{(\cos^2\nu-\cos^2\varphi)}}{\cos\nu-\cos\varphi\cos\varphi'},$$

$$\partial\psi = \frac{\sqrt{(\cos^2\nu-\cos^2\varphi)}}{\cos\nu-\cos\varphi\cos\varphi'}\partial\varphi';$$

quibus valoribus in formulam (1.) substitutis, nanciscimur formam integralis enunciatam

$$2.\quad \iint\frac{\partial\varphi\,\partial\varphi'}{\sqrt{(\sin^2\nu-\sin^2\varphi\cos^2\psi)}}$$

$$=\iint\frac{\partial\varphi\,\partial\varphi'}{\sqrt{(1-\cos^2\nu-\cos^2\varphi-\cos^2\varphi'+2\cos\nu\cos\varphi\cos\varphi')}} = \iint\frac{\partial\varphi\,\partial\varphi'}{\Delta(\varphi,\varphi')};$$

ubi per $\Delta(\varphi,\varphi')$ expressio sub radicali compendii causa significetur.

Per secundam transformationem hujusmodi:

$$3.\quad \begin{cases}\cos\varphi = k\cos u\,\Delta(k',u')-k'\sin u'\,\Delta(k,u),\\ \cos\varphi' = k\cos u\,\Delta(k',u')+k'\sin u'\,\Delta(k,u),\end{cases}$$

ubi $k^2=\cos^2\tfrac{1}{2}\nu$, $k'^2=\sin^2\tfrac{1}{2}\nu$

$$\Delta(k,u) = \sqrt{(1-k^2\cos^2u)},\qquad \Delta(k',u') = \sqrt{(1-k'^2\sin^2u')},$$

fit

$$\partial\Phi\,\partial\Phi' = \frac{2kk'\sin u\cos u'\,\partial u\,\partial u'}{\Delta(k,u).\Delta(k',u')}$$

et

$$\Delta(\Phi,\Phi') = 2kk'\sin u\cos u';$$

qua substitutione facta, variabilia in integrali $\frac{\partial\varphi\,\partial\varphi}{\Delta(\varphi,\varphi')}$ separata sunt, atque integrale propositam in hoc abire videmus

$$\iint\frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{\sqrt{(\sin^2\nu - \sin^2\varphi\cos^2\psi)}} = \int\frac{\partial u}{\Delta(k,u)}\int\frac{\partial u'}{\Delta(k',u')} = F(k,u)\,F(k',u'),$$

ubi $F(k,u)$, $F(k',u)$ volito more integralia elliptica primae speciei significant, quorum moduli k et k'. Collegimus igitur integrale $\iint\frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{\sqrt{(\sin^2\nu - \sin^2\varphi\cos^2\psi)}}$ esse productum integralium ellipticorum primae speciei, quorum moduli alter alterius complementum.

Id transformationem in (3.) adhibitam hac ratione pervenire potes. Expressionem

$$1 - \cos^2\nu - \cos^2\Phi - \cos^2\Phi' + 2\cos\nu\cos\Phi\cos\Phi'$$

ut notam est, in hos factores resolvere licet:

$$\sin\left(\frac{\varphi+\varphi'+\nu}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi+\varphi'-\nu}{2}\right)\sin\left(\frac{\nu+\varphi-\varphi'}{2}\right)\sin\left(\frac{\nu-\varphi-\varphi'}{2}\right)$$

vel etiam

$$\left[\cos^2\frac{\nu}{2} - \cos^2\left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)\right]\left[\sin^2\frac{\nu}{2} - \sin^2\left(\frac{\varphi-\psi'}{2}\right)\right].$$

Posito jam

$$\frac{\varphi+\varphi'}{2} = x, \qquad \frac{\varphi-\varphi'}{2} = x'$$

integrale duplex

$$\iint\frac{\partial\varphi\,\partial\varphi'}{\Delta(\varphi,\varphi')}$$

in hoc abire videmus

$$2\iint\frac{\partial x\,\partial x'}{\sqrt{((k^2 - \cos^2 x)(k'^2 - \sin^2 x'))}};$$

quo in integrali fluit ex substitutione

$$\cos x = k\cos u, \qquad \sin x = k'\sin u'$$

transformatio supra (3.) adhibita.

Inveni, generalioris formae integrale duplex indefinitum.

$$\iint\frac{\partial\varphi\,\partial\psi\cos 2n\varphi}{\sqrt{(\sin^2\nu - \sin^2\varphi\cos^2\psi)}},$$

si n numeros quicunque integer, ad productum integralium ellipticorum

primae et secundae speciei revocari posse, ita quidem ut easdem ut supra transformationes adhibeas.

Etenim quod

$$\Phi = x+x', \qquad \Phi' = x-x',$$

facile invenitur

$$4. \quad \iint\frac{\partial\varphi\,\partial\psi\cos 2n\varphi}{\sqrt{(\sin^2\nu-\sin^2\varphi\cos^2\psi)}}$$

$$\iint\frac{\partial x\,\partial x'\cos 2nx\cos 2nx'}{\sqrt{((k^2-\cos^2x)(k'^2-\sin^2x')}}-\iint\frac{\partial x\,\partial x'\sin 2nx\sin 2nx'}{\sqrt{((k^2-\cos^2x)(k'^2-\sin^2x'))}}.$$

Altera pars integralis duplicis:

$$5. \quad \iint\frac{\partial x\,\partial x'\sin 2nx\sin 2nx'}{\sqrt{((k^2-\cos^2x)(k'^2-\sin^2x'))}}$$

est algebraica, quae unacum $\Delta(\Phi,\Phi')=0$ vel etiam pro limitibus ipsorum u et u': 0 et $\frac{1}{2}\pi$, evanescit. Qua parte integralis hoc loco objecta, nanciscimur igitur

$$\iint\frac{\partial\varphi\,\partial\psi\cos 2n\varphi}{\sqrt{(\sin^2\nu-\sin^2\varphi\cos^2\psi)}}=\int\frac{\cos 2nx\,\partial u}{\Delta(k,u)}\int\frac{\cos 2nx'\,\partial x'}{\Delta(k',u')}.$$

Quod $\cos 2nx$ et $\cos 2nx'$ secundum pares dignitates ipsorum $\cos u$ et $\sin u'$ evolvi possint, integrale

$$\int\frac{\partial x\cos 2nx}{\Delta(k,u)}$$

est, ut ex integralibus ellipticis constat, functio linearis ipsorum $E(k,u)$, $F(k,u)$ et integrale

$$\iint\frac{\cos 2nx'\,\partial u'}{\Delta(k',u')}$$

eodem modo functio linearis ipsorum $E(k',u)$ et $F(k',u')$. Est igitur integrale

$$\iint\frac{\partial\varphi\,\partial\psi\cos 2n\varphi}{\sqrt{(\sin^2\nu-\sin^2\varphi\cos^2\psi)}}$$

productum duorum integralium ellipticorum primae et secundae speciei.

Si integralia $F(k,u)$, $E(k',u')$, $F(k',u')$, $E(k,u)$ inter limites 0 et $\frac{1}{2}\pi$ sumimus, pars algebraica (5.) evanescit, et nanciscimur, posito $n=0$:

$$\iint\frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{\sqrt{(\sin^2\nu-\sin^2\varphi\cos^2\psi)}} = F(k)\,F(k'),$$

$n=1$:

$$\iint\frac{\partial\varphi\,\partial\psi\cos 2\varphi}{\sqrt{(\sin^2\nu-\sin^2\varphi\cos^2\psi)}} = \pi+F(k).F(k')-4E(k).E(k')$$
$$= (F(k)-2E(k)).(F(k')-2E(k')),$$

$n=2$:

$$\iint \frac{\partial\varphi\,\partial\psi\cos 4\varphi}{\sqrt{(\sin^2\nu - \sin^2\varphi\cos^2\psi)}} = (\tfrac{1}{3})^2[8\cos\nu E(k) + (1-4\cos\nu)F(k)].$$
$$[8\cos\nu E(k') - (1+4\cos\nu)F(k')]$$

etc. etc.

Posito pro casu speciali $\nu = \frac{1}{2}\pi$, integralia abeunt

$$\iint \frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{\sqrt{(\sin^2\nu - \sin^2\varphi\cos^2\psi)}} = (F\sqrt{\tfrac{1}{2}})^2,$$
$$\iint \frac{\partial\varphi\,\partial\psi\cos 2\varphi}{\sqrt{(\sin^2\nu - \sin^2\varphi\cos^2\psi)}} = \frac{\pi^2}{4(F\sqrt{\frac{1}{2}})^2},$$
$$\iint \frac{\partial\varphi\,\partial\psi\cos 4\varphi}{\sqrt{(\sin^2\nu - \sin^2\varphi\cos^2\psi)}} = (\tfrac{1}{3})^2(F\sqrt{\tfrac{1}{2}})^2.$$

Per substitutionem

$$\cos\psi = \frac{\sin\nu}{\sin\varphi}\cos\psi$$

propositum integrale in hoc transmutare licet:

$$\iint \frac{\partial\varphi\,\partial\psi'}{\sqrt{(1-\cos^2\varphi - \sin^2\nu\cos^2\psi')}};$$

quod ut ad formam $\iint \frac{\partial u\,\partial u'}{\Delta(k,u)\,\Delta(k',u')}$ revocetur, primum ponendum est:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Phi'\sqrt{\left(\frac{\cos\varphi + \cos\nu}{\cos\varphi - \cos\nu}\right)},$$

deinde substitutio (3.) adhibenda.

Hamm in Guestph. Mens. Aprilis 1839.

11.

Ueber den innern Grund der Erscheinung der Aberration des Lichtes.

(Von Herrn Freiherrn *v. Forstner,* Königl. Preufs. Hauptmanne zu Berlin.)

Dafs die Erscheinung der Aberration ihren Grund in der Bewegung der Erde, verbunden mit der, eine *angebbare* Zeit erfordernden Bewegung des Lichtes hat, steht fest; doch scheint es, dafs selbst in den besten astronomischen Schriften der *innere* Grund für das Resultat jener combinirten Bewegung, nemlich: für die Wahrnehmung der Ablenkung des Lichtes der Gestirne von der wahren Richtung, nicht überzeugend dargethan wird. — Ohne hier in eine Critik der Beweise für die Aberration, wie sie in den astronomischen Werken gegeben werden und daselbst nachzulesen sind, einzugehen; mag nachstehende Darstellung vergönnt sein.

Es sei SO (Fig. 2.) die wahre Richtung des Lichtes von einem Sterne (oder der Sonne) S, nach welcher Richtung ein in O *ruhendes* Auge den Licht-Eindruck empfängt. Ferner sei AB die Richtung der Bewegung der Erde um die Sonne, und EO sei der Weg der Erde während einer Zeit-Einheit, LO aber der Weg des Lichtes während derselben Zeit-Einheit; so ist bekanntlich $EO : LO = 1 : 10186$; die Zeit-Einheit sei eine Secunde oder eine viel kleinere, so dafs EO als *gerade Linie* anzusehen ist. — Bis hier ist der Gang unserer Darstellung fast ganz der in den meisten astronomischen Werken. — Nun stelle man sich einen Körper vor, *in welchen das Licht eindringen kann,* welcher in demselben Augenblicke von E in O ankommt, in welchem das Lichttheilchen von L nach O gelangt: dann ist nach den ersten Gründen der *reinen* Bewegungslehre (nach dem Satze vom Parallelogramme *der Bewegung*), wenn man $OF = OE$ und $OG = LO$ (in der Verlängerung von SO) macht, *FG der Weg des Lichtes in der nächsten Zeit-Einheit in jenem das Licht einlassenden Körper;* denn da beide Bewegungen (des Lichtes und der Erde, letztere in der vorausgesetzten *kleinen* Zeit-Einheit) *gleichförmig* sind, so ist der Weg *FG geradlinigt.* — Jener Körper aber ist *unser Auge; in diesem* ist also, in der auch noch so klein angenommenen Zeit-Einheit, der Weg des Lichtes

der nach der Richtung *FG;* daher wir nach der Richtung *GFH* den Licht-Eindruck, d. h. nach *FH* zu den Stern versetzen. Wie klein jene Zeit-Einheit für den Weg des Lichtes in unserm Auge, d. h. von der Hornhaut bis zur Netzhaut auch sei (deren Gröfse leicht zu berechnen ist, wenn die oben erwähnte Dimension mit 40 000 Meilen, als Weg des Lichtes in der Secunde, verglichen wird): die erwähnte *Richtung* des Licht-Eindruckes, nur vom Verhältnisse von *OF* zu *OG* und dem Winkel *FOG* abhängend, wird immer die wahre Richtung für den Weg des Lichtes im Auge sein. Da aber die oben erwähnte so kleine Zeit (geringer als der millionste Theil einer Secunde) aufser unserer Wahrnehmung bleibt, so können wir *OK* parallel mit *FH,* als Richtung des Licht-Eindruckes in *O,* statt des von *FH* in *F* setzen. Die Berechnung des Winkels *FOG,* noch abhängend von der Richtung der Bewegung der Erde gegen die Lage des Sterns (oder der Sonne), und die hiervon nunmehr abhängende Gröfse der Aberration $\angle SOK$, ist die in den astronomischen Schriften nachzulesende. — Dafs demnach die *Wahrnehmung der Aberration von dem Wege des Lichts in unserm Auge abhängt,* wird nicht durch die Kleinheit der hierzu erforderlichen Zeit in Zweifel gezogen werden können, weil es hierbei nur auf einen *momentanen* Eindruck ankommt, zumal wenn man den Zustand der neueren Optik hiermit vergleicht. Was aber für die Optik selbst folgt, wenn jener *innere* Grund für die Wahrnehmung der Aberration anerkannt wird, läfst sich leichter ahnen als hier schon darstellen. —

12.

Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale.

(Von Herrn Dr. *Gudermann* zu Münster.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 1. im 1sten, No. 10. im 2ten, No. 15. im 3ten, No. 21. im 4ten Hefte des achtzehnten, No. 2. im 1sten, No. 8. im 2ten, No. 12. im 3ten Hefte des neunzehnten und No. 9. im 1sten Hefte dieses Bandes.)

---

§. 175.

Reihen für die Logarithmen der Modular-Functionen, welche nach den Cosinus der Vielfachen von ηu und $\eta' u$ fortschreiten.

Den Formeln (8.) §. 170. gemäfs erhält man für die natürlichen Logarithmen der cyklischen Modular-Functionen des Argumentes u und seines Complementes $K-u$ die folgenden Reihen, welche aus den Reihen (1.) bis (5.) §. 174. blofs durch die Subtraction gefunden werden:

1. $\log \operatorname{sn} u$

$$= \log\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\sqrt{k}}\right) - \frac{2p^2}{1}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta' K} - \frac{2p^6}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta' K} - \frac{2p^{10}}{5}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,10\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,10\eta' K} - \dots,$$

2. $\log \operatorname{snc} u$

$$= \log\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) - \frac{2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta' K} - \frac{2}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta' K} - \frac{2}{5}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,10\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,10\eta' K} - \frac{2}{7}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,14\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,14\eta' K} - \dots,$$

3. $$\log \operatorname{cn} u = \log\left(\frac{\sqrt{\frac{k'}{k}}}{2\sqrt{p}\,.\,\mathfrak{Cos}\,\eta u}\right)$$

$$-p\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} - \frac{p^2}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} - \frac{p^3}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} - \frac{p^4}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} - \dots,$$

4. $$\log \operatorname{cnc} u = \log\left(2\sqrt{\left(p.\frac{k'}{k}\right)}\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u\right)$$

$$-p\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} + \frac{p^2}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} - \frac{p^3}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} + \frac{p^4}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} - + \dots,$$

5. $$\log \operatorname{dn} u = \log\left(\frac{\sqrt{k'}}{2\sqrt{p}\,.\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u}\right)$$

$$+p\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} - \frac{p^2}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} + \frac{p^3}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} - \frac{p^4}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} + - \dots,$$

$$6.\quad \log \operatorname{dnc} u = \log(2\sqrt{(pk')}\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u) - p.\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} + \frac{p^2}{2}.\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} - \frac{p^3}{3}.\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} + \frac{p^4}{4}.\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} - \ldots,$$

$$7.\quad \log \operatorname{tn} u = \log\left(\frac{2\sqrt{p}\,.\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\sqrt{k'}}\right) + p.\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} + \frac{p^2}{2}.\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} + \frac{p^3}{3}.\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} + \ldots,$$

$$8.\quad \log \operatorname{tnc} u = \log\left(\frac{1}{2\sqrt{(pk')}\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}\right) - p.\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} - \frac{p^2}{2}.\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} - \frac{p^3}{3}.\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} + \ldots$$

Diese Reihen convergiren desto rascher, je weniger der Modul von Eins verschieden ist. Reihen, welche desto rascher convergiren, je weniger der Modul von Null verschieden ist, werden aus den Reihen (6.) §. 174. hergeleitet, nämlich

$$9.\quad \log \operatorname{sn} u$$
$$= \log\left(2\sqrt{\tfrac{q}{k}}.\sin\eta u\right) + q.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} + \frac{q^2}{2}.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} + \frac{q^3}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'} + \frac{q^4}{4}.\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'} + \ldots,$$

$$10.\quad \log \operatorname{snc} u$$
$$= \log\left(2\sqrt{\tfrac{q}{k}}.\cos\eta u\right) - q.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} + \frac{q^2}{2}.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} - \frac{q^3}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'} + \frac{q^4}{4}.\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} - + \ldots,$$

$$11.\quad \log \operatorname{cn} u =$$
$$\log\left(2\sqrt{\left(\tfrac{qk'}{k}\right)}.\cos\eta u\right) + q.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} + \frac{q^2}{2}.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} + \frac{q^3}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \frac{q^4}{4}.\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} + \ldots,$$

$$12.\quad \log \operatorname{cnc} u =$$
$$\log\left(2\sqrt{\left(\tfrac{qk'}{k}\right)}.\sin\eta u\right) - q.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} + \frac{q^2}{2}.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} - \frac{q^3}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \frac{q^4}{4}.\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} - + \ldots,$$

$$13.\quad \log \operatorname{dn} u$$
$$= \log\sqrt{k'} + \frac{2}{1}.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \frac{2}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} + \frac{2}{5}.\frac{\cos 10\eta u}{\mathfrak{Sin}\,10\eta K'} + \frac{2}{7}.\frac{\cos 14\eta u}{\mathfrak{Sin}\,14\eta K'} + \ldots,$$

$$14.\quad \log \operatorname{dnc} u$$
$$= \log\sqrt{k'} - \frac{2}{1}.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} - \frac{2}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} - \frac{2}{5}.\frac{\cos 10\eta u}{\mathfrak{Sin}\,10\eta K'} - \frac{2}{7}.\frac{\cos 14\eta u}{\mathfrak{Sin}\,14\gamma K'} - \ldots,$$

$$15.\quad \log \operatorname{tn} = \log\left(\frac{\operatorname{tang}\eta u}{\sqrt{k'}}\right) - \frac{2q^2}{1}.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} - \frac{2q^6}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} - \frac{2q^{10}}{5}.\frac{\cos 10\eta u}{\mathfrak{Sin}\,10\eta K'} - \ldots,$$

$$16.\quad \log \operatorname{tnc} = \log\left(\frac{\cot\eta u}{\sqrt{k'}}\right) + \frac{2q^2}{1}.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \frac{2q^6}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} + \frac{2q^{10}}{5}.\frac{\cos 10\eta u}{\mathfrak{Sin}\,10\eta K'} + \ldots,$$

Aus den letzten Formeln erhält man, indem $u = 0$ oder $u = K$ genommen und $\frac{1}{2}\pi.\frac{K'}{K} = v$ gesetzt wird, noch die folgenden particulären Resultate

$$17.\quad \log\frac{1}{k'} = \frac{4}{\mathfrak{Sin}\,2v} + \frac{4}{3\,\mathfrak{Sin}\,6v} + \frac{4}{5\,\mathfrak{Sin}\,10v} + \frac{4}{7\,\mathfrak{Sin}\,14v} + \ldots$$

$$18.\quad \log\frac{k}{k'} = \log 4 - v + \frac{2e^{-v}}{\mathfrak{Sin}\,v} + \frac{2e^{-2v}}{2\,\mathfrak{Cos}\,2v} + \frac{2e^{-3v}}{3\,\mathfrak{Sin}\,3v} + \frac{2e^{-4v}}{4\,\mathfrak{Cos}\,4v} + \ldots$$

$$19.\quad \log\frac{1}{k} = v - \log 4 + \frac{2e^{-v}}{\mathfrak{Cos}\,v} + \frac{2e^{-2v}}{2\,\mathfrak{Cos}\,2v} + \frac{2e^{-3v}}{3\,\mathfrak{Cos}\,3v} + \frac{2e^{-4v}}{4\,\mathfrak{Cos}\,4v} + \dots,$$

$$20.\quad \log K = \log(\tfrac{1}{2}\pi) + \frac{2e^{-v}}{\mathfrak{Cos}\,v} + \frac{2e^{-3v}}{3\,\mathfrak{Cos}\,3v} + \frac{2e^{-5v}}{5\,\mathfrak{Cos}\,5v} + \frac{2e^{-7v}}{7\,\mathfrak{Cos}\,7v} + \dots,$$

$$21.\quad \log K' = \log v + \frac{2e^{-v}}{\mathfrak{Cos}\,v} + \frac{2e^{-3v}}{3\,\mathfrak{Cos}\,3v} + \frac{2e^{-5v}}{5\,\mathfrak{Cos}\,5v} + \frac{2e^{-7v}}{7\,\mathfrak{Cos}\,7v} + \dots$$

Die letzten fünf Reihen convergiren immer rasch, da der Annahme gemäfs $v > \frac{1}{2}\pi$ ist.

Setzt man in der Formel (17.) statt des Moduls k den nächst grösseren, dem §. 168. gemäfs, so hat man in der Reihe

$$\log\sqrt{\frac{1}{k'}} = \frac{4q^2}{1-q^4} + \frac{4q^6}{3(1-q^{12})} + \frac{4q^{10}}{5(1-q^{20})} + \dots$$

$q^{\frac{1}{2}}$ statt q und $\frac{1-k}{1+k}$ statt k' zu setzen, wodurch man erhält:

$$\log\sqrt{\frac{1+k}{1-k}} = \frac{4q}{1-q^2} + \frac{4q^3}{3(1-q^6)} + \frac{4q^5}{5(1-q^{10})} + \dots$$

Setzen wir noch qi statt q, also dem §. 167. gemäfs $\frac{ik}{k'}$ statt k und $k = \sin\theta$, so ist

$$\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+i\,\mathrm{tang}\,\theta}{1-i\,\mathrm{tang}\,\theta}} = \frac{4q}{1+q^2} - \frac{4q^3}{3(1+q^6)} + \frac{4q^5}{5(1+q^{10})} - \frac{4q^7}{7(1+q^{14})} + \dots$$

Die vorstehenden beiden Reihen können wie folgt einfacher dargestellt werden;

$$22.\quad \tfrac{1}{4}\mathfrak{L}\theta = \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,v} + \frac{1}{3\,\mathfrak{Sin}\,3v} + \frac{1}{5\,\mathfrak{Sin}\,5v} + \frac{1}{7\,\mathfrak{Sin}\,7v} + \dots \quad \text{und}$$

$$23.\quad \tfrac{1}{4}\theta = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,v} - \frac{1}{3\,\mathfrak{Cos}\,3v} + \frac{1}{5\,\mathfrak{Cos}\,5v} - \frac{1}{7\,\mathfrak{Cos}\,7v} + - \dots$$

Hiernach können also aus der Gröfse $n = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{K'}{K}$ die Quadranten K, K' und die Moduln k und k', wie auch $\theta = \arcsin(k)$ bequem berechnet werden.

Soll umgekehrt v aus dem Modul k berechnet werden, so dient dazu die im §. 57. gefundene Formel

$$v = \log\frac{1}{q} = \log\left(\frac{4\sqrt{k'}}{k}\right) + \tfrac{1}{2}\log\frac{m_1}{n_1} + \tfrac{1}{8}\log\frac{m_2}{n_2} + \tfrac{1}{16}\log\frac{m_3}{n_3} + \dots$$

§. 176.

Reihen für die ersten Differenzial-Verhältnisse der natürlichen Logarithmen der Modular-Functionen des Argumentes u,

Differenziirt man die vorhin entwickelten Reihen (1.) bis (8.), indem man u als veränderlich betrachtet, so erhält man die Formeln:

1. $k'.\frac{\text{cn}\,u}{\text{cnc}\,u}=\frac{2\eta'}{\mathfrak{Sin}2\eta'u}-4p^2\eta'.\frac{\mathfrak{Sin}2\eta'u}{\mathfrak{Sin}2\eta'K}-4p^6\eta'.\frac{\mathfrak{Sin}6\eta'u}{\mathfrak{Sin}6\eta'K}-4p^{10}\eta'.\frac{\mathfrak{Sin}10\eta'u}{\mathfrak{Sin}10\eta'K}-\ldots,$

2. $k'.\frac{\text{cnc}\,u}{\text{cn}\,u}=4\eta'.\frac{\mathfrak{Sin}2\eta'u}{\mathfrak{Sin}2\eta'K}+4\eta'.\frac{\mathfrak{Sin}6\eta'u}{\mathfrak{Sin}6\eta'K}+4\eta'.\frac{\mathfrak{Sin}10\eta'u}{\mathfrak{Sin}10\eta'K}+4\eta'.\frac{\mathfrak{Sin}14\eta'u}{\mathfrak{Sin}14\eta'K}+\ldots,$

3. $\frac{\text{sn}\,u}{\text{snc}\,u}=\eta'\,\mathfrak{Tang}\,\eta'u+2\eta'p.\frac{\mathfrak{Sin}2\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,\eta'K}+2\eta'p^2.\frac{\mathfrak{Sin}4\eta'u}{\mathfrak{Cos}2\eta'K}+2\eta'p^3.\frac{\mathfrak{Sin}6\eta'u}{\mathfrak{Sin}3\eta'K}$
$+2\eta'p^4.\frac{\mathfrak{Sin}8\eta'u}{\mathfrak{Cos}4\eta'K}+\ldots,$

4. $\frac{\text{snc}\,u}{\text{sn}\,u}=\eta'\,\mathfrak{Cot}\,\eta'u-2\eta'p.\frac{\mathfrak{Sin}2\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,\eta'K}+2\eta'p^2.\frac{\mathfrak{Sin}4\eta'u}{\mathfrak{Cos}2\eta'K}-2\eta'p^3.\frac{\mathfrak{Sin}6\eta'u}{\mathfrak{Sin}3\eta'K}$
$+2\eta'p^4.\frac{\mathfrak{Sin}8\eta'u}{\mathfrak{Cos}4\eta'K}-+\ldots,$

5. $k^2\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u=\eta'\,\mathfrak{Tang}\,\eta'u-2\eta'p.\frac{\mathfrak{Sin}2\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,\eta'K}+2\eta'p^2.\frac{\mathfrak{Sin}4\eta'u}{\mathfrak{Cos}2\eta'K}$
$-2\eta'p^3.\frac{\mathfrak{Sin}6\eta'u}{\mathfrak{Cos}3\eta'K}+2\eta'p^4.\frac{\mathfrak{Sin}8\eta'u}{\mathfrak{Cos}4\eta'K}-+\ldots,$

6. $\frac{1}{\text{sn}\,u\,.\,\text{snc}\,u}=\eta'\,\mathfrak{Cot}\,\eta'u+2\eta'p.\frac{\mathfrak{Sin}2\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,\eta'K}+2\eta'p^2.\frac{\mathfrak{Sin}4\eta'u}{\mathfrak{Cos}2\eta'K}$
$+2\eta'p^3.\frac{\mathfrak{Sin}6\eta'u}{\mathfrak{Cos}3\eta'K}+2\eta'p^4.\frac{\mathfrak{Sin}8\eta'u}{\mathfrak{Cos}4\eta'K}+\ldots,$

deren Convergenz desto rascher ist, je weniger der Modul k von Eins abweicht. Die Formeln (9.) bis (16.) §. 175. geben:

7. $k'.\frac{\text{cn}\,u}{\text{cnc}\,u}=\eta\,\cot\eta u-2\eta q.\frac{\sin2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'}-2\eta q^2.\frac{\sin4\eta u}{\mathfrak{Cos}2\eta K'}-2\eta q^3.\frac{\sin6\eta u}{\mathfrak{Cos}3\eta K'}$
$-2\eta q^4.\frac{\sin8\eta u}{\mathfrak{Cos}4\eta K'}-\ldots,$

8. $k'.\frac{\text{cnc}\,u}{\text{cn}\,u}=\eta\,\text{tang}\,\eta u-2\eta q.\frac{\sin2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'}+2\eta q^2.\frac{\sin4\eta u}{\mathfrak{Cos}2\eta K'}-2\eta q^3.\frac{\sin6\eta u}{\mathfrak{Cos}3\eta K'}$
$+2\eta q^4.\frac{\sin8\eta u}{\mathfrak{Cos}4\eta K'}-+\ldots,$

9. $\frac{\text{sn}\,u}{\text{snc}\,u}=\eta\,\text{tang}\,\eta u+2\eta q.\frac{\sin2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'}+2\eta q^2.\frac{\sin4\eta u}{\mathfrak{Cos}2\eta K'}+2\eta q^3.\frac{\sin6\eta u}{\mathfrak{Sin}3\eta K'}$
$+2\eta q^4.\frac{\sin8\eta u}{\mathfrak{Cos}4\eta K'}+\ldots,$

10. $\frac{\text{snc}\,u}{\text{sn}\,u}=\eta\,\cot\eta u+2\eta q.\frac{\sin2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'}-2\eta q^2.\frac{\sin4\eta u}{\mathfrak{Cos}2\eta K'}+2\eta q^3.\frac{\sin6\eta u}{\mathfrak{Sin}3\eta K'}$
$-2\eta q^4.\frac{\sin8\eta u}{\mathfrak{Cos}4\eta K'}+-\ldots,$

11. $k^2\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u=4\eta.\frac{\sin2\eta u}{\mathfrak{Sin}2\eta K'}+4\eta.\frac{\sin6\eta u}{\mathfrak{Sin}6\eta K'}+4\eta.\frac{\sin10\eta u}{\mathfrak{Sin}10\eta K'}$
$+4\eta.\frac{\sin14\eta u}{\mathfrak{Sin}14\eta K'}+\ldots,$

12. $\frac{1}{\text{sn}\,u\,.\,\text{snc}\,u}=\frac{2\eta}{\sin2\eta u}+4\eta q^2.\frac{\sin2\eta u}{\mathfrak{Sin}2\eta K'}+4\eta q^6.\frac{\sin6\eta u}{\mathfrak{Sin}6\eta K'}+4\eta q^{10}.\frac{\sin10\eta u}{\mathfrak{Sin}10\eta K'}+\ldots$

§. 177.

Reihen für $\sqrt{\frac{1\pm t}{1\mp t}}$, wenn t eine von den Functionen snc$u$, cn$u$ und dn$u$ ist.

Nach §. 32. *a.* ist

$$\operatorname{cnc}\tfrac{1}{2}u = \sqrt{\frac{\operatorname{dn}u - \operatorname{cn}u}{1+\operatorname{dn}u}} \quad \text{und} \quad \operatorname{cn}\tfrac{1}{2}u = \sqrt{\frac{\operatorname{dn}u + \operatorname{cn}u}{1+\operatorname{dn}u}};$$

daher ist

$$\frac{\operatorname{cnc}\frac{1}{2}u}{\operatorname{cn}\frac{1}{2}u} = \sqrt{\frac{\operatorname{dn}u - \operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u + \operatorname{cn}u}} = \sqrt{\frac{1-\operatorname{snc}u}{1+\operatorname{snc}u}}.$$

Ferner ist $\operatorname{sn}\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1-\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{dn}u}}$ und $\operatorname{snc}\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1+\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{dn}u}}$, und hieraus folgt

$$\frac{\operatorname{sn}\frac{1}{2}u}{\operatorname{snc}\frac{1}{2}u} = \sqrt{\frac{1-\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{cn}u}}.$$

Aus den Formeln $\operatorname{sn}\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1-\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{dn}u}}$ und $k\operatorname{snc}\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}u}{1-\operatorname{cn}u}}$ setzen wir zusammen:

$$k\operatorname{sn}\tfrac{1}{2}u.\operatorname{snc}\tfrac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{dn}u}}.$$

Werden diese drei Formeln benutzt, und setzt man in den Reihen (1.) bis (6.) §. 176. noch $\frac{1}{2}u$ für u, so erhält man

$$1.\quad k'.\sqrt{\frac{1+\operatorname{snc}u}{1-\operatorname{snc}u}} = \frac{2\eta'}{\mathfrak{Sin}\,\eta'u} - 4\eta'p^2.\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K} - 4\eta'p^6.\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K} - 4\eta'p^{10}.\frac{\mathfrak{Sin}\,5\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,10\eta'K} - \ldots,$$

$$2.\quad k'.\sqrt{\frac{1-\operatorname{snc}u}{1+\operatorname{snc}u}} = 4\eta'.\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K} + 4\eta'.\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K} + 4\eta'.\frac{\mathfrak{Sin}\,5\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,10\eta'K} + 4\eta'.\frac{\mathfrak{Sin}\,7\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,14\eta'K} + \ldots,$$

$$3.\quad \sqrt{\frac{1-\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{cn}u}} = \eta'.\mathfrak{Tang}\frac{\eta'u}{2} + 2\eta'p.\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,\eta'K} + 2\eta'p^2.\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta'K} + 2\eta'p^3.\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta'K} + 2\eta'p^4.\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta'K} + \ldots,$$

$$4.\quad \sqrt{\frac{1+\operatorname{cn}u}{1-\operatorname{cn}u}} = \eta'.\,\mathfrak{Cot}\frac{\eta'u}{2} - 2\eta'p.\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,\eta'K} + 2\eta'p^2.\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta'K} - 2\eta'p^3.\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta'K} + 2\eta'p^4.\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta'K} - + \ldots,$$

$$5.\quad k.\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{dn}u}} = \eta'.\mathfrak{Tang}\frac{\eta'u}{2} - 2\eta'p.\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,\eta'K} + 2\eta'p^2.\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta'K} - 2\eta'p^3.\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta'K} + 2\eta'p^4.\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta'K} - + \ldots,$$

$$6.\quad k.\sqrt{\frac{1+\operatorname{dn}u}{1-\operatorname{dn}u}} = \eta'.\,\mathfrak{Cot}\frac{\eta'u}{2} + 2\eta'p.\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,\eta'K} + 2\eta'p^2.\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta'K} + 2\eta'p^3.\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta'K} + 2\eta'p^4.\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta'K} + \ldots.$$

Auf gleiche Weise erhält man aus (7.) bis (12.) §. 176. die Reihen

7. $k'.\sqrt{\frac{1+\operatorname{snc}u}{1-\operatorname{snc}u}} = \eta\cot\frac{\eta u}{2} - 2\eta q.\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} - 2\eta q^2.\frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} - 2\eta q^3.\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'}$
$- 2\eta q^4.\frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} - \ldots,$

8. $k'.\sqrt{\frac{1-\operatorname{snc}u}{1+\operatorname{snc}u}} = \eta\operatorname{tang}\frac{\eta u}{2} - 2\eta q.\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} + 2\eta q^2.\frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} - 2\eta q^3.\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'}$
$+ 2\eta q^4.\frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} - + \ldots,$

9. $\sqrt{\frac{1-\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{cn}u}} = \eta\operatorname{tang}\frac{\eta u}{2} + 2\eta q.\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} + 2\eta q^2.\frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} + 2\eta q^3.\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'}$
$+ 2\eta q^4.\frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} + \ldots,$

10. $\sqrt{\frac{1+\operatorname{cn}u}{1-\operatorname{cn}u}} = \eta\cot\frac{\eta u}{2} + 2\eta q.\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} - 2\eta q^2.\frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} + 2\eta q^3.\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'}$
$- 2\eta q^4.\frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} + - \ldots,$

11. $k.\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{dn}u}} = 4\eta.\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + 4\eta.\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} + 4\eta.\frac{\sin 5\eta u}{\mathfrak{Sin}\,10\eta K'}$
$+ 4\eta.\frac{\sin 7\eta u}{\mathfrak{Sin}\,14\eta K'} + \ldots,$

12. $k.\sqrt{\frac{1+\operatorname{dn}u}{1-\operatorname{dn}u}} = \frac{2\eta}{\sin\eta u} + 4\eta q^2.\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + 4\eta q^6.\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'}$
$+ 4\eta q^{10}.\frac{\sin 5\eta u}{\mathfrak{Sin}\,10\eta K'} + \ldots.$

Es ist nicht zu übersehen, dafs

$\sqrt{\frac{1+\operatorname{sn}u}{1-\operatorname{sn}u}} = \operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\operatorname{am}u)$, $\sqrt{\frac{1+\operatorname{snc}u}{1-\operatorname{snc}u}} = \operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\operatorname{amc}u)$,

$\sqrt{\frac{1-\operatorname{sn}u}{1+\operatorname{sn}u}} = \operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\operatorname{am}u)$, $\sqrt{\frac{1-\operatorname{snc}u}{1+\operatorname{snc}u}} = \operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\operatorname{amc}u)$,

$\sqrt{\frac{1+\operatorname{cn}u}{1-\operatorname{cn}u}} = \operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}u$, $\sqrt{\frac{1+\operatorname{cnc}u}{1-\operatorname{cnc}u}} = \cot\tfrac{1}{2}\operatorname{amc}u$,

$\sqrt{\frac{1-\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{cn}u}} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}u$, $\sqrt{\frac{1-\operatorname{cnc}u}{1+\operatorname{cnc}u}} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{amc}u$,

$\sqrt{\frac{1+\operatorname{dn}u}{1-\operatorname{dn}u}} = \cot\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$, $\sqrt{\frac{1+\operatorname{dnc}u}{1-\operatorname{dnc}u}} = \cot\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)$,

$\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{dn}u}} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$, $\sqrt{\frac{1-\operatorname{dnc}u}{1+\operatorname{dnc}u}} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)$

und dafs also die vorstehenden zwölf Reihen auch zur bequemen Berechnung der Amplituden dienen. Die hier noch fehlenden Reihen finden sich in §. 180., und in Beziehung auf sie fügen wir noch die Formeln

$$\sqrt{\frac{1+k\operatorname{sn}u}{1-k\operatorname{sn}u}} = \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)\right),$$

$$\sqrt{\frac{1-k\,\mathrm{sn}\,u}{1+k\,\mathrm{sn}\,u}} = \mathrm{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)\right),$$

$$\sqrt{\frac{1+k\,\mathrm{snc}\,u}{1-k\,\mathrm{snc}\,u}} = \mathrm{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)\right),$$

$$\sqrt{\frac{1-k\,\mathrm{snc}\,u}{1+k\,\mathrm{snc}\,u}} = \mathrm{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)\right)$$

hinzu.

§. 178.

Entwickelung der Modular-Functionen der Argumente u und $K-u$ in Reihen, welche nach Potenzial-Functionen der Vielfachen von ηu und $\eta' u$ fortschreiten.

Es ist

$$\tfrac{1}{2}k'\sqrt{\frac{1+\mathrm{snc}\,u}{1-\mathrm{snc}\,u}} + \tfrac{1}{2}k'\sqrt{\frac{1-\mathrm{snc}\,u}{1+\mathrm{snc}\,u}} = \frac{k'}{\mathrm{cnc}\,u} \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{2}k'\sqrt{\frac{1+\mathrm{snc}\,u}{1-\mathrm{snc}\,u}} - \tfrac{1}{2}k'\sqrt{\frac{1-\mathrm{snc}\,u}{1+\mathrm{snc}\,u}} = k'\,\mathrm{tnc}\,u = \frac{1}{\mathrm{tn}\,u};$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\mathrm{cn}\,u}{1-\mathrm{cn}\,u}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}} = \frac{1}{\mathrm{sn}\,u} \text{ und } \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\mathrm{cn}\,u}{1-\mathrm{cn}\,u}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}} = \frac{1}{\mathrm{tn}\,u}; \text{ ferner}$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}\,u}{1-\mathrm{dn}\,u}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}} = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u} \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}\,u}{1-\mathrm{dn}\,u}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}} = \frac{\mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{sn}\,u} = \frac{k'}{k}\cdot\frac{1}{\mathrm{cnc}\,u}.$$

Diesen Formeln gemäfs lassen sich die Reihen (1.) bis (6.) §. 177. auch wie folgt darstellen:

$$\frac{k'}{\mathrm{cnc}\,u} + \frac{1}{\mathrm{tn}\,u} = \frac{2\eta'}{\mathfrak{Sin}\,\eta' u} - \frac{8\eta' p^4\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{1-p^4} - \frac{8\eta' p^{12}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{1-p^{12}} - \frac{8\eta' p^{20}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{1-p^{20}} - \ldots,$$

$$\frac{k'}{\mathrm{cnc}\,u} - \frac{1}{\mathrm{tn}\,u} = \frac{8\eta' p^2\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{1-p^4} + \frac{8\eta' p^6\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{1-p^{12}} + \frac{8\eta' p^{10}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{1-p^{20}} + \ldots,$$

woraus man durch Addition und Subtraction erhält:

$$1.\quad \frac{k}{\mathrm{cnc}\,u} = \frac{\eta'}{\mathfrak{Sin}\,\eta' u} + \frac{4\eta' p^2}{1+p^2}\mathfrak{Sin}\,\eta' u + \frac{4\eta' p^6}{1+p^6}\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \frac{4\eta' p^{10}}{1+p^{10}}\mathfrak{Sin}\,5\eta' u + \ldots,$$

$$2.\quad \frac{1}{\mathrm{tn}\,u} = \frac{\eta'}{\mathfrak{Sin}\,\eta' u} - \frac{4\eta' p^2}{1-p^2}\mathfrak{Sin}\,\eta' u - \frac{4\eta' p^6}{1-p^6}\mathfrak{Sin}\,3\eta' u - \frac{4\eta' p^{10}}{1-p^{10}}\mathfrak{Sin}\,5\eta' u - \ldots$$

Ferner geben die Reihen

$$\frac{1}{\mathrm{sn}\,u} + \frac{1}{\mathrm{tn}\,u} = \eta'\,\mathfrak{Cot}\frac{\eta' u}{2} - \frac{4\eta' p^2}{1-p^2}\mathfrak{Sin}\,\eta' u + \frac{4\eta' p^4}{1+p^4}\mathfrak{Sin}\,2\eta' u - \frac{4\eta' p^6}{1-p^6}\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \frac{4\eta' p^8}{1+p^8}\mathfrak{Sin}\,4\eta' u - + \ldots,$$

$$\frac{1}{\mathrm{sn}\,u} - \frac{1}{\mathrm{tn}\,u} = \eta'\,\mathfrak{Tang}\frac{\eta' u}{2} + \frac{4\eta' p^2}{1-p^2}\mathfrak{Sin}\,\eta' u + \frac{4\eta' p^4}{1+p^4}\mathfrak{Sin}\,2\eta' u + \frac{4\eta' p^6}{1-p^6}\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \frac{4\eta' p^8}{1+p^8}\mathfrak{Sin}\,4\eta' u + \ldots$$

durch Addition

3. $\frac{1}{\operatorname{sn} u} = \frac{\eta'}{\mathfrak{Tang}\,\eta' u} + \frac{4\eta' p^4}{1+p^4}\mathfrak{Sin}\,2\eta' u + \frac{4\eta' p^8}{1+p^8}\mathfrak{Sin}\,4\eta' u + \frac{4\eta' p^{12}}{1+p^{12}}\mathfrak{Sin}\,6\eta' u + \ldots.$

Durch Subtraction erhält man dieselbe Reihe für $\frac{1}{\operatorname{tn} u}$, wie vorhin.

Setzt man in den gefundenen Reihen $u + iK'$ statt u, so verwandelt sich $\frac{k'}{\operatorname{cnc} u} = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}$ in $\frac{k \operatorname{cn} u}{i}$, $\frac{1}{\operatorname{tn} u}$ in $\frac{\operatorname{dn} u}{i}$ und $\frac{1}{\operatorname{sn} u}$ in $k \operatorname{sn} u$; daher haben wir noch, weil sich $\eta' u$ in $\eta' u + \frac{1}{2}\pi i$ verwandelt, die drei Reihen

4. $k \operatorname{cn} u = \frac{\eta'}{\mathfrak{Cos}\,\eta' u} - \frac{4\eta' p^2}{1+p^2}\mathfrak{Cos}\,\eta' u + \frac{4\eta' p^6}{1+p^6}\mathfrak{Cos}\,3\eta' u - \frac{4\eta' p^{10}}{1+p^{10}}\mathfrak{Cos}\,5\eta' u + - \ldots.,$

5. $\operatorname{dn} u = \frac{\eta'}{\mathfrak{Cos}\,\eta' u} + \frac{4\eta' p^2}{1-p^2}\mathfrak{Cos}\,\eta' u - \frac{4\eta' p^6}{1-p^6}\mathfrak{Cos}\,3\eta' u + \frac{4\eta' p^{10}}{1-p^{10}}\mathfrak{Cos}\,5\eta' u - + \ldots.,$

6. $k \operatorname{sn} u = \eta'\,\mathfrak{Tang}\,\eta' u - \frac{4\eta' p^4}{1+p^4}\mathfrak{Sin}\,2\eta' u + \frac{4\eta' p^8}{1+p^8}\mathfrak{Sin}\,4\eta' u - \frac{4\eta' p^{12}}{1+p^{12}}\mathfrak{Sin}\,6\eta' u + - \ldots.$

Setzt man wieder $e^{\eta' u} = x$, so kann die erste Reihe auch also dargestellt werden:

$$\frac{k'}{\operatorname{cnc} u} = \frac{2\eta'}{x - x^{-1}} + \frac{2\eta' p^2}{1+p^2}(x - x^{-1}) + \frac{2\eta' p^6}{1+p^6}(x^3 - x^{-3}) + \frac{2\eta' p^{10}}{1+p^{10}}(x^5 - x^{-5}) \ldots.,$$

und da x in $\frac{1}{px}$ übergeht, wenn $K - u$ für u gesetzt wird, so hat man

$$\frac{k'}{\operatorname{cn} u} = \frac{2\eta' p x}{1 - p^2 x^2} + \frac{2\eta' p}{1+p^2}x^{-1} + \frac{2\eta' p^3}{1+p^6}x^{-3} + \frac{2\eta' p^5 x^{-5}}{1+p^{10}} + \ldots.$$
$$- \frac{2\eta' p^3}{1+p^2}x - \frac{2\eta' p^9}{1+p^6}x^3 - \frac{2\eta' p^{15} x^5}{1+p^{10}} - \ldots.$$

Substituirt man die Reihe

$$\frac{2\eta' p x}{1 - p^2 x^2} = 2\eta' p x + 2\eta' p^3 x^3 + 2\eta' p^5 x^5 + 2\eta' p^7 x^7 + \ldots.,$$

und bedenkt, daſs

$$2\eta' p x - \frac{2\eta' p^3 x}{1+p^2} = \frac{2\eta' p x}{1+p^2}, \quad 2\eta' p^3 x^3 - \frac{2\eta' p^9 x^3}{1+p^6} = \frac{2\eta' p^3 x^3}{1+p^6},$$
$$2\eta' p^5 x^5 - \frac{2\eta' p^{15} x^5}{1+p^{10}} = \frac{2\eta' p^5 x^5}{1+p^{10}}, \text{ u. s. w.}$$

ist, so hat man

7. $\frac{k'}{\operatorname{cn} u} = \frac{4\eta' p}{1+p^2}\mathfrak{Cos}\,\eta' u + \frac{4\eta' p^3}{1+p^6}\mathfrak{Cos}\,3\eta' u + \frac{4\eta' p^5}{1+p^{10}}\mathfrak{Cos}\,5\eta' u + \frac{4\eta' p^7}{1+p^{14}}\mathfrak{Cos}\,7\eta' u + \ldots.$

Ganz eben so verwandeln sich die Reihen (2.) und (3.) in

8. $\frac{1}{\operatorname{tnc} u} = \frac{4\eta' p}{1-p^2}\mathfrak{Sin}\,\eta' u + \frac{4\eta' p^3}{1-p^6}\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \frac{4\eta' p^5}{1-p^{10}}\mathfrak{Sin}\,5\eta' u + \frac{4\eta' p^7}{1-p^{14}}\mathfrak{Sin}\,7\eta' u + \ldots.,$

9. $\frac{1}{\operatorname{snc} u} = \eta' + \frac{4\eta' p^2}{1+p^4}\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + \frac{4\eta' p^4}{1+p^8}\mathfrak{Cos}\,4\eta' u + \frac{4\eta' p^6}{1+p^{12}}\mathfrak{Cos}\,6\eta' u + \ldots.;$

und substituirt man noch $u+iK'$ für u, also $\eta' u+\frac{1}{2}\pi i$ für $\eta' u$, so verwandeln sich diese drei Reihen in

$$10. \quad k\,\mathrm{cnc}\,u = \frac{4\eta' p}{1+p^2}\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u - \frac{4\eta' p^3}{1+p^6}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \frac{4\eta' p^5}{1+p^{10}}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u - \frac{4\eta' p^7}{1+p^{14}}\,\mathfrak{Sin}\,7\eta' u + - \ldots,$$

$$11. \quad \mathrm{dnc}\,u = \frac{4\eta' p}{1-p^2}\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u - \frac{4\eta' p^3}{1-p^6}\,\mathfrak{Cos}\,3\eta' u + \frac{4\eta' p^5}{1-p^{10}}\,\mathfrak{Cos}\,5\eta' u - \frac{4\eta' p^7}{1-p^{14}}\,\mathfrak{Cos}\,7\eta' u + - \ldots,$$

$$12. \quad k\,\mathrm{snc}\,u = \eta' - \frac{4\eta' p^2}{1+p^4}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + \frac{4\eta' p^4}{1+p^8}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u - \frac{4\eta' p^6}{1+p^{12}}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u + \frac{4\eta' p^8}{1+p^{16}}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta' u - + \ldots.$$

Vertauscht man in den vorstehenden Reihen die beiden conjugirten Moduln, also auch p und q, η und η', indem man zugleich ui statt u setzt, so erhält man Reihen für die cyklischen Modular-Functionen des Argumentes u, welche nach cyklischen Potenzial-Functionen der Vielfachen von ηu fortschreiten.

§. 179.

Uebersichtliche Zusammenstellung der einfachsten Reihen für die cyklischen Modular-Functionen.

Die vorhin entwickelten Formeln geben folgende übersichtliche Zusammenstellung:

$$1. \quad k\,\mathrm{sn}\,u = \frac{2\eta\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} + \frac{2\eta\sin 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \frac{2\eta\sin 5\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta K'} + \frac{2\eta\sin 7\eta u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta K'} + \ldots,$$

$$2. \quad k\,\mathrm{snc}\,u = \frac{2\eta\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} - \frac{2\eta\cos 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \frac{2\eta\cos 5\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta K'} - \frac{2\eta\cos 7\eta u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta K'} + - \ldots,$$

$$3. \quad k\,\mathrm{sn}\,u = \eta'\,\mathfrak{Tang}\,\eta' u - 2\eta' p^2.\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} + 2\eta' p^4.\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} - 2\eta' p^6.\frac{\mathfrak{Sin}\,6\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K} + - \ldots,$$

$$4. \quad k\,\mathrm{snc}\,u = \eta' - \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} - \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,8\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta' K} - + \ldots,$$

$$5. \quad \frac{1}{\mathrm{sn}\,u} = \frac{\eta}{\sin\eta u} + 2\eta q.\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} + 2\eta q^3.\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + 2\eta q^5.\frac{\sin 5\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta K'} + \ldots,$$

$$6. \quad \frac{1}{\mathrm{snc}\,u} = \frac{\eta}{\cos\eta u} + 2\eta q.\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} - 2\eta q^3.\frac{\cos 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + 2\eta q^5.\frac{\cos 5\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta K'} - + \ldots,$$

$$7. \quad \frac{1}{\mathrm{sn}\,u} = \frac{\eta'}{\mathfrak{Tang}\,\eta' u} + 2\eta' p^2.\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} + 2\eta' p^4.\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} + 2\eta' p^6.\frac{\mathfrak{Sin}\,6\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K} + \ldots,$$

$$8. \quad \frac{1}{\mathrm{snc}\,u} = \eta' + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K} + \ldots,$$

$$9.\quad k\,\mathrm{cn}\,u = \frac{2\eta\cos\eta u}{\mathrm{Cos}\,\eta K'} + \frac{2\eta\cos 3\eta u}{\mathrm{Cos}\,3\eta K'} + \frac{2\eta\cos 5\eta u}{\mathrm{Cos}\,5\eta K'} + \frac{2\eta\cos 7\eta u}{\mathrm{Cos}\,7\eta K'} + \ldots,$$

$$10.\quad k\,\mathrm{cnc}\,u = \frac{2\eta\sin\eta u}{\mathrm{Cos}\,\eta K'} - \frac{2\eta\sin 3\eta u}{\mathrm{Cos}\,3\eta K'} + \frac{2\eta\sin 5\eta u}{\mathrm{Cos}\,5\eta K'} - \frac{2\eta\sin 7\eta u}{\mathrm{Cos}\,7\eta K'} + - \ldots,$$

$$11.\quad k\,\mathrm{cn}\,u = \frac{\eta'}{\mathrm{Cos}\,\eta' u} - 2\eta' p\,.\frac{\mathrm{Cos}\,\eta' u}{\mathrm{Cos}\,\eta' K} + 2\eta' p^3.\frac{\mathrm{Cos}\,3\eta' u}{\mathrm{Cos}\,3\eta' K} - 2\eta' p^5.\frac{\mathrm{Cos}\,5\eta' u}{\mathrm{Cos}\,5\eta' K} + - \ldots,$$

$$12.\quad k\,\mathrm{cnc}\,u = \frac{2\eta'\,\mathrm{Sin}\,\eta' u}{\mathrm{Cos}\,\eta' K} - \frac{2\eta'\,\mathrm{Sin}\,3\eta' u}{\mathrm{Cos}\,3\eta' K} + \frac{2\eta'\,\mathrm{Sin}\,5\eta' u}{\mathrm{Cos}\,5\eta' K} - \frac{2\eta'\,\mathrm{Sin}\,7\eta' u}{\mathrm{Cos}\,7\eta' K} + - \ldots,$$

$$13.\quad \frac{k'}{\mathrm{cn}\,u} = \frac{\eta}{\cos\eta u} - 2\eta q\,.\frac{\cos\eta u}{\mathrm{Cos}\,\eta K'} + 2\eta q^3.\frac{\cos 3\eta u}{\mathrm{Cos}\,3\eta K'} - 2\eta q^5.\frac{\cos 5\eta u}{\mathrm{Cos}\,5\eta K'} + - \ldots,$$

$$14.\quad \frac{k'}{\mathrm{cnc}\,u} = \frac{\eta}{\sin\eta u} - 2\eta q\,.\frac{\sin\eta u}{\mathrm{Cos}\,\eta K'} - 2\eta q^3.\frac{\sin 3\eta u}{\mathrm{Cos}\,3\eta K'} - 2\eta q^5.\frac{\sin 5\eta u}{\mathrm{Cos}\,5\eta K'} - \ldots,$$

$$15.\quad \frac{k'}{\mathrm{cn}\,u} = \frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,\eta' u}{\mathrm{Cos}\,\eta' K} + \frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,3\eta' u}{\mathrm{Cos}\,3\eta' K} + \frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,5\eta' u}{\mathrm{Cos}\,5\eta' K} + \frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,7\eta' u}{\mathrm{Cos}\,7\eta' K} + \ldots,$$

$$16.\quad \frac{k'}{\mathrm{cnc}\,u} = \frac{\eta'}{\mathrm{Sin}\,\eta' u} + 2\eta' p\,.\frac{\mathrm{Sin}\,\eta' u}{\mathrm{Cos}\,\eta' K} + 2\eta' p^3.\frac{\mathrm{Sin}\,3\eta' u}{\mathrm{Cos}\,3\eta' K} + 2\eta' p^5.\frac{\mathrm{Sin}\,5\eta' u}{\mathrm{Cos}\,5\eta' K} + \ldots,$$

$$17.\quad \mathrm{dn}\,u = \eta + \frac{2\eta\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,2\eta K'} + \frac{2\eta\cos 4\eta u}{\mathrm{Cos}\,4\eta K'} + \frac{2\eta\cos 6\eta u}{\mathrm{Cos}\,6\eta K'} + \frac{2\eta\cos 8\eta u}{\mathrm{Cos}\,8\eta K'} + \ldots,$$

$$18.\quad \mathrm{dnc}\,u = \eta - \frac{2\eta\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,2\eta K'} + \frac{2\eta\cos 4\eta u}{\mathrm{Cos}\,4\eta K'} - \frac{2\eta\cos 6\eta u}{\mathrm{Cos}\,6\eta K'} + \frac{2\eta\cos 8\eta u}{\mathrm{Cos}\,8\eta K'} - + \ldots,$$

$$19.\quad \mathrm{dn}\,u = \frac{\eta'}{\mathrm{Cos}\,\eta' u} + 2\eta' p\,.\frac{\mathrm{Cos}\,\eta' u}{\mathrm{Sin}\,\eta' K} - 2\eta' p^3.\frac{\mathrm{Cos}\,3\eta' u}{\mathrm{Sin}\,3\eta' K} + 2\eta' p^5.\frac{\mathrm{Cos}\,5\eta' u}{\mathrm{Sin}\,5\eta' K} + \ldots,$$

$$20.\quad \mathrm{dnc}\,u = \frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,\eta' u}{\mathrm{Sin}\,\eta' K} - \frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,3\eta' u}{\mathrm{Sin}\,3\eta' K} + \frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,5\eta' u}{\mathrm{Sin}\,5\eta' K} - \frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,7\eta' u}{\mathrm{Sin}\,7\eta' K} + - \ldots,$$

$$21.\quad k'.\mathrm{tn}\,u = \eta\,\mathrm{tang}\,\eta u - 2\eta q^2.\frac{\sin 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,2\eta K'} + 2\eta q^4.\frac{\sin 4\eta u}{\mathrm{Cos}\,4\eta K'} - 2\eta q^6.\frac{\sin 6\eta u}{\mathrm{Cos}\,6\eta K'} + 2\eta q^8.\frac{\sin 8\eta u}{\mathrm{Cos}\,8\eta K'} - + \ldots,$$

$$22.\quad k'.\mathrm{tnc}\,u = \eta\cot\eta u - 2\eta q^2.\frac{\sin 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,2\eta K'} - 2\eta q^4.\frac{\sin 4\eta u}{\mathrm{Cos}\,4\eta K'} - 2\eta q^6.\frac{\sin 6\eta u}{\mathrm{Cos}\,6\eta K'} - 2\eta q^8.\frac{\sin 8\eta u}{\mathrm{Cos}\,8\eta K'} - \ldots,$$

$$23.\quad k'.\mathrm{tn}\,u = \frac{2\eta'\,\mathrm{Sin}\,\eta' u}{\mathrm{Sin}\,\eta' K} + \frac{2\eta'\,\mathrm{Sin}\,3\eta' u}{\mathrm{Sin}\,3\eta' K} + \frac{2\eta'\,\mathrm{Sin}\,5\eta' u}{\mathrm{Sin}\,5\eta' K} + \frac{2\eta'\,\mathrm{Sin}\,7\eta' u}{\mathrm{Sin}\,7\eta' K} + \ldots,$$

$$24.\quad k'.\mathrm{tnc}\,u = \frac{\eta'}{\mathrm{Sin}\,\eta' u} - 2\eta' p\,.\frac{\mathrm{Sin}\,\eta' u}{\mathrm{Sin}\,\eta' K} - 2\eta' p^3.\frac{\mathrm{Sin}\,3\eta' u}{\mathrm{Sin}\,3\eta' K} - 2\eta' p^5.\frac{\mathrm{Sin}\,5\eta' u}{\mathrm{Sin}\,5\eta' K} - \ldots.$$

Zusatz. Aus den vorstehenden Reihen erhält man, wenn wieder $\frac{1}{4}\pi.\frac{K'}{K} = v$ gesetzt wird, für $u = 0$ und $u = K$ die folgenden particulären Reihen:

$$25.\quad K = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 + \frac{2}{\mathrm{Cos}\,2v} + \frac{2}{\mathrm{Cos}\,4v} + \frac{2}{\mathrm{Cos}\,6v} + \frac{2}{\mathrm{Cos}\,8v} + \ldots\right),$$

$$26.\quad K = v\left(1+\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,2v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,4v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,6v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,8v}+\dots\right),$$

$$27.\quad k.K = \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{2}{\mathfrak{Sin}\,v}-\frac{2}{\mathfrak{Sin}\,3v}+\frac{2}{\mathfrak{Sin}\,5v}-\frac{2}{\mathfrak{Sin}\,7v}+-\dots\right),$$

$$28.\quad k.K = \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,3v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,5v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,7v}+\dots\right),$$

$$29.\quad k'.K = \tfrac{1}{2}\pi\left(1-\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,2v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,4v}-\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,6v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,8v}-+\dots\right),$$

$$30.\quad K = \tfrac{1}{2}\pi\left(1+\frac{2e^{-v}}{\mathfrak{Sin}\,v}-\frac{2e^{-3v}}{\mathfrak{Sin}\,3v}+\frac{2e^{-5v}}{\mathfrak{Sin}\,5v}-\frac{2e^{-7v}}{\mathfrak{Sin}\,7v}+-\dots\right),$$

$$31.\quad K = v\left(1+\frac{2e^{-v}}{\mathfrak{Sin}\,v}-\frac{2e^{-3v}}{\mathfrak{Sin}\,3v}+\frac{2e^{-5v}}{\mathfrak{Sin}\,5v}-\frac{2e^{-7v}}{\mathfrak{Sin}\,7v}+-\dots\right),$$

$$32.\quad k'.K = \tfrac{1}{2}\pi\left(1-\frac{2e^{-v}}{\mathfrak{Cos}\,v}+\frac{2e^{-3v}}{\mathfrak{Cos}\,3v}-\frac{2e^{-5v}}{\mathfrak{Cos}\,5v}+\frac{2e^{-7v}}{\mathfrak{Cos}\,7v}-+\dots\right).$$

§. 180.

Reihen für $\sqrt{\frac{1\pm t}{1\mp t}}$, wenn t eine von den Modular-Functionen $\operatorname{sn} u$, $k \operatorname{sn} u$, $k \operatorname{snc} u$, $\operatorname{cnc} u$ und $\operatorname{dnc} u$ ist.

Es ist

$$k'.\sqrt{\frac{1+\operatorname{sn} u}{1-\operatorname{sn} u}} = \frac{k'}{\operatorname{cn} u}+k'\operatorname{tn} u \quad\text{und}\quad k'.\sqrt{\frac{1-\operatorname{sn} u}{1+\operatorname{sn} u}} = \frac{k'}{\operatorname{cn} u}-k'\operatorname{tn} u,$$

$$k'.\sqrt{\frac{1+k\operatorname{sn} u}{1-k\operatorname{sn} u}} = \operatorname{dnc} u+k\operatorname{cnc} u \quad\text{und}\quad k'.\sqrt{\frac{1-k\operatorname{sn} u}{1+k\operatorname{sn} u}} = \operatorname{dnc} u-k\operatorname{cnc} u,$$

$$k'.\sqrt{\frac{1+k\operatorname{snc} u}{1-k\operatorname{snc} u}} = \operatorname{dn} u+k\operatorname{cn} u \quad\text{und}\quad k'.\sqrt{\frac{1-k\operatorname{snc} u}{1+k\operatorname{snc} u}} = \operatorname{dn} u-k\operatorname{cn} u,$$

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{cnc} u}{1-\operatorname{cnc} u}} = \frac{1}{\operatorname{snc} u}+k'\operatorname{tn} u \quad\text{und}\quad \sqrt{\frac{1-\operatorname{cnc} u}{1+\operatorname{cnc} u}} = \frac{1}{\operatorname{snc} u}-k'\operatorname{tn} u,$$

$$k.\sqrt{\frac{1+\operatorname{dnc} u}{1-\operatorname{dnc} u}} = \frac{1}{\operatorname{snc} u}+\frac{k'}{\operatorname{cn} u} \quad\text{und}\quad k.\sqrt{\frac{1-\operatorname{dnc} u}{1+\operatorname{dnc} u}} = \frac{1}{\operatorname{snc} u}-\frac{k'}{\operatorname{cn} u}$$

Daher erhält man die gesuchten Reihen leicht durch eine Zusammensetzung aus den vorigen Reihen, nämlich:

$$1.\quad k'.\sqrt{\frac{1+\operatorname{sn} u}{1-\operatorname{sn} u}} = \frac{4\eta'\,\mathfrak{Sin}\,\eta'(K+u)}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}+\frac{4\eta'\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'(K+u)}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}+\frac{4\eta'\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'(K+u)}{\mathfrak{Sin}\,10\eta'K}+\frac{4\eta'\,\mathfrak{Sin}\,7\eta'(K+u)}{\mathfrak{Sin}\,14\eta'K}+\dots,$$

$$2.\quad k'.\sqrt{\frac{1-\operatorname{sn} u}{1+\operatorname{sn} u}} = \frac{4\eta'\,\mathfrak{Sin}\,\eta'(K-u)}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}+\frac{4\eta'\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'(K-u)}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}+\frac{4\eta'\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'(K-u)}{\mathfrak{Sin}\,10\eta'K}+\frac{4\eta'\,\mathfrak{Sin}\,7\eta'(K-u)}{\mathfrak{Sin}\,14\eta'K}+\dots,$$

$$3.\quad k'.\sqrt{\frac{1+k\operatorname{sn} u}{1-k\operatorname{sn} u}} = \frac{4\eta'\,\mathfrak{Cos}\,\eta'(K+u)}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-\frac{4\eta'\,\mathfrak{Cos}\,3\eta'(K+u)}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}+\frac{4\eta'\,\mathfrak{Cos}\,5\eta'(K+u)}{\mathfrak{Sin}\,10\eta'K}-\frac{4\eta'\,\mathfrak{Cos}\,7\eta'(K+u)}{\mathfrak{Sin}\,14\eta'K}+-\dots,$$

$$4.\quad k'.\sqrt{\frac{1-k\,\mathrm{sn}\,u}{1+k\,\mathrm{sn}\,u}} = \frac{4\eta'\,\mathrm{Cos}\,\eta'(K-u)}{\mathrm{Sin}\,2\eta'K} - \frac{4\eta'\,\mathrm{Cos}\,3\eta'(K-u)}{\mathrm{Sin}\,6\eta'K} + \frac{4\eta'\,\mathrm{Cos}\,5\eta'(K-u)}{\mathrm{Sin}\,10\eta'K} - \frac{4\eta'\,\mathrm{Cos}\,7\eta'(K-u)}{\mathrm{Sin}\,14\eta'K} + - \dots,$$

$$5.\quad k'.\sqrt{\frac{1+k\,\mathrm{snc}\,u}{1-k\,\mathrm{snc}\,u}} = \frac{2\eta'}{\mathrm{Cos}\,\eta'u} + \frac{4\eta'p^2\,\mathrm{Cos}\,\eta'u}{\mathrm{Sin}\,2\eta'K} - \frac{4\eta'p^6\,\mathrm{Cos}\,3\eta'u}{\mathrm{Sin}\,6\eta'K} + \frac{4\eta'p^{10}\,\mathrm{Cos}\,5\eta'u}{\mathrm{Sin}\,10\eta'K} - + \dots,$$

$$6.\quad k'.\sqrt{\frac{1-k\,\mathrm{snc}\,u}{1+k\,\mathrm{snc}\,u}} = \frac{4\eta'\,\mathrm{Cos}\,\eta'u}{\mathrm{Sin}\,2\eta'K} - \frac{4\eta'\,\mathrm{Cos}\,3\eta'u}{\mathrm{Sin}\,6\eta'K} + \frac{4\eta'\,\mathrm{Cos}\,5\eta'u}{\mathrm{Sin}\,10\eta'K} - \frac{4\eta'\,\mathrm{Cos}\,7\eta'u}{\mathrm{Sin}\,14\eta'K} + - \dots,$$

$$7.\quad \sqrt{\frac{1+\mathrm{cnc}\,u}{1-\mathrm{cnc}\,u}} = \eta' + \frac{2\eta'\,\mathrm{Sin}\,\eta'u}{\mathrm{Sin}\,\eta'K} + \frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,2\eta'u}{\mathrm{Cos}\,2\eta'K} + \frac{2\eta'\,\mathrm{Sin}\,3\eta'u}{\mathrm{Sin}\,3\eta'K} + \frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,4\eta'u}{\mathrm{Cos}\,4\eta'K} + \frac{2\eta'\,\mathrm{Sin}\,5\eta'u}{\mathrm{Sin}\,5\eta'K} + \dots,$$

$$8.\quad \sqrt{\frac{1-\mathrm{cnc}\,u}{1+\mathrm{cnc}\,u}} = \eta' - \frac{2\eta'\,\mathrm{Sin}\,\eta'u}{\mathrm{Sin}\,\eta'K} + \frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,2\eta'u}{\mathrm{Cos}\,2\eta'K} - \frac{2\eta'\,\mathrm{Sin}\,3\eta'u}{\mathrm{Sin}\,3\eta'K} + \frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,4\eta'u}{\mathrm{Cos}\,4\eta'K} - \frac{2\eta'\,\mathrm{Sin}\,5\eta'u}{\mathrm{Sin}\,5\eta'K} + - \dots,$$

$$9.\quad k.\sqrt{\frac{1+\mathrm{dnc}\,u}{1-\mathrm{dnc}\,u}} = \eta' + \frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,\eta'u}{\mathrm{Cos}\,\eta'K} + \frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,2\eta'u}{\mathrm{Cos}\,2\eta'K} + \frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,3\eta'u}{\mathrm{Cos}\,3\eta'K} + \frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,4\eta'u}{\mathrm{Cos}\,4\eta'K} + \dots,$$

$$10.\quad k.\sqrt{\frac{1-\mathrm{dnc}\,u}{1+\mathrm{dnc}\,u}} = \eta' - \frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,\eta'u}{\mathrm{Cos}\,\eta'K} + \frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,2\eta'u}{\mathrm{Cos}\,2\eta'K} - \frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,3\eta'u}{\mathrm{Cos}\,3\eta'K} + \frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,4\eta'u}{\mathrm{Cos}\,4\eta'K} - + \dots$$

Ganz eben so erhält man Reihen für dieselben zehn Wurzelgröfsen, welche nach Potenzial-Functionen des Arcus ηu und seiner Vielfachen fortschreiten. Dieselben Resultate findet man aber schon dadurch, dafs man in den Formeln (7.) bis (12.) §. 177. $K-u$ statt u, also $\frac{1}{2}\pi-\eta u$ statt ηu setzt. Daher geben wir nur noch die folgenden Reihen an:

$$11.\quad k'.\sqrt{\frac{1+k\,\mathrm{snc}\,u}{1-k\,\mathrm{snc}\,u}} = \eta + \frac{2\eta\cos\eta u}{\mathrm{Cos}\,\eta K'} + \frac{2\eta\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,2\eta K'} + \frac{2\eta\cos 3\eta u}{\mathrm{Cos}\,3\eta K'} + \frac{2\eta\cos 4\eta u}{\mathrm{Cos}\,4\eta K'} + \dots,$$

$$12.\quad k'.\sqrt{\frac{1-k\,\mathrm{snc}\,u}{1+k\,\mathrm{snc}\,u}} = \eta - \frac{2\eta\cos\eta u}{\mathrm{Cos}\,\eta K'} + \frac{2\eta\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,2\eta K'} - \frac{2\eta\cos 3\eta u}{\mathrm{Cos}\,3\eta K'} + \frac{2\eta\cos 4\eta u}{\mathrm{Cos}\,4\eta K'} - + \dots$$

Zusatz. Es ist nach §. 32. *a.* $\sqrt{\frac{1-\mathrm{snc}\,u}{1+\mathrm{snc}\,u}} = \frac{\mathrm{cnc}\,\frac{1}{2}u}{\mathrm{cn}\,\frac{1}{2}u}$, also

$$\sqrt{\frac{1-\mathrm{sn}\,u}{1+\mathrm{sn}\,u}} = \frac{\mathrm{cn}\,(\frac{1}{2}K+\frac{1}{2}u)}{\mathrm{cn}\,(\frac{1}{2}K-\frac{1}{2}u)},$$

$$\sqrt{\frac{1-k\,\mathrm{snc}\,u}{1+k\,\mathrm{snc}\,u}} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}.\frac{1+k\,\mathrm{sn}^2\,\frac{1}{2}u}{1-k\,\mathrm{sn}^2\,\frac{1}{2}u} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{1-k\,\mathrm{sn}\,u}{1+k\,\mathrm{sn}\,u}} = \frac{1-k\,\mathrm{sn}\,\frac{1}{2}u\,\mathrm{snc}\,\frac{1}{2}u}{1+k\,\mathrm{sn}\,\frac{1}{2}u\,\mathrm{snc}\,\frac{1}{2}u},$$

$$\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}} = \frac{\mathrm{sn}\,\frac{1}{2}u}{\mathrm{snc}\,\frac{1}{2}u}, \qquad \text{also} \quad \sqrt{\frac{1-\mathrm{cnc}\,u}{1+\mathrm{cnc}\,u}} = \sqrt{\frac{\mathrm{sn}\,(\frac{1}{2}K-\frac{1}{2}u)}{\mathrm{sn}\,(\frac{1}{2}K+\frac{1}{2}u)}},$$

$$\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}} = k\,\mathrm{sn}\,\tfrac{1}{2}u\,\mathrm{snc}\,\tfrac{1}{2}u, \quad \text{also} \quad \sqrt{\frac{1-\mathrm{dnc}\,u}{1+\mathrm{dnc}\,u}} = k\,\mathrm{sn}\,(\tfrac{1}{2}K-\tfrac{1}{2}u)\,\mathrm{sn}\,(\tfrac{1}{2}K+\tfrac{1}{2}u).$$

Hiernach können die vorigen Entwicklungen auch noch auf eine andere Art dargestellt werden.

§. 181.

Reihen für die Quadrate der Modular-Functionen.

Nach §. 179. Formel (1.) ist

$$k\,\mathrm{sn}\,u = 2\eta . S\frac{\sin(2\alpha+1)\eta u}{\mathfrak{Sin}(2\alpha+1)\eta K'} = 4\eta . S\frac{q^{2\alpha+1}}{1-q^{4\alpha+2}}\sin(2\alpha+1)\eta u;$$

daher ist

$$k^2\,\mathrm{sn}^2 u = 16\eta^2 . S\frac{q^{2\alpha+2\beta+2}}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4\beta+2})}\sin(2\alpha+1)\eta u . \sin(2\beta+1)\eta u,$$

und da

$$2\sin(2\alpha+1)\eta u\sin(2\beta+1)\eta u = \cos 2(\beta-\alpha)\eta u - \cos 2(\alpha+\beta+1)\eta u,$$

so ist

$$k^2\,\mathrm{sn}^2 u = 8\eta^2 . S\frac{q^{2\alpha+2\beta+2}}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4\beta+2})}\cos 2(\beta-\alpha)\eta u$$
$$-8\eta^2 . S\frac{q^{2\alpha+2\beta+2}}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4\beta+2})}\cos 2(\alpha+\beta+1)\eta u,$$

und es hat folglich die Reihe die Form

$$k^2\,\mathrm{sn}^2 u = \eta^2(A+\overset{1}{A}\cos 2\eta u+\overset{2}{A}\cos 4\eta u+\overset{3}{A}\cos 6\eta u+\ldots+\overset{n}{A}\cos 2n\eta u+\ldots).$$

Der Coefficient A entsteht aus dem ersten Theile der vorigen Reihe, wenn man $\beta=\alpha$ setzt. Es ist

$$A = S\frac{8q^{4\alpha+2}}{(1-q^{4\alpha+2})^2} = \frac{8q^2}{(1-q^2)^2}+\frac{8q^6}{(1-q^6)^2}+\frac{8q^{10}}{(1-q^{10})^2}+\ldots;$$

also

$$A = \frac{2}{\mathfrak{Sin}^2\eta K'}+\frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 3\eta K'}+\frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 5\eta K'}+\frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 7\eta K'}+\ldots.$$

Zu dem Coefficienten $\overset{n}{A}$ fliefsen drei Haupttheile zusammen, da $n = +(\beta-\alpha)$, $n=-(\beta-\alpha)=\alpha-\beta$ und $n=\alpha+\beta+1$ sein kann; da aber $\cos 2(\beta-\alpha)\eta u = \cos 2(\alpha-\beta)\eta u$ ist, so sind die beiden ersten Theile gleich. Es sei

$$P = S\frac{8q^{2\alpha+2\beta+2}}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4\beta+2})}\ \text{cond.}\ \beta-\alpha=n,$$
$$Q = S\frac{8q^{2\alpha+2\beta+2}}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4\beta+2})}\ \text{cond.}\ \alpha+\beta+1=n,$$

so ist der Coefficient $\overset{n}{A}=2P-Q$. Es kann P, da in ihm $\beta=n+\alpha$ ist, so dargestellt werden:

$$P = S\frac{8q^{2n+4\alpha+2}}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4n+4\alpha+2})}\ \text{und}$$
$$Q = S\frac{8q^{2n}}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4n-4\alpha-2})}.$$

Der Ausdruck für P ist eine unendliche Reihe; der Ausdruck für Q ist geschlossener, da $4n-4\alpha-2$ positiv sein mufs. Es ist

$$\frac{q^{4\alpha+2}}{1-q^{4\alpha+2}}-\frac{q^{4n+4\alpha+2}}{1-q^{4n+4\alpha+2}} = \frac{q^{4\alpha+2}(1-q^{4n})}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4n+4\alpha+2})};$$

also

$$\frac{q^{2n+4\alpha+2}}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4n+4\alpha+2})} = \frac{q^{2n}}{1-q^{4n}}\left(\frac{q^{4\alpha+2}}{1-q^{4\alpha+2}}-\frac{q^{4n+4\alpha+2}}{1-q^{4n+4\alpha+2}}\right),$$

oder

$$P = \frac{8q^{2n}}{1-q^{4n}}\left\{S\frac{q^{4\alpha+2}}{1-q^{4\alpha+2}}-S\frac{q^{4n+4\alpha+2}}{1-q^{4n+4\alpha+2}}\right\}.$$

Läfst man nun die sich aufhebenden Glieder weg, so erhält man den geschlossenen Ausdruck

$$P = \frac{8q^{2n}}{1-q^{4n}}\left\{\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^6}{1-q^6}+\frac{q^{10}}{1-q^{10}}\dots+\frac{q^{4n-2}}{1-q^{4n-2}}\right\}.$$

Ferner ist

$$\frac{q^{4\alpha+2}}{1-q^{4\alpha+2}}+\frac{q^{4n-4\alpha-2}}{1-q^{4n-4\alpha-2}}+1 = \frac{1-q^{4n}}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4n+4\alpha+2})},$$

und also

$$\frac{q^{2n}}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4n+4\alpha+2})} = \frac{q^{2n}}{1-q^{4n}}\left\{\frac{q^{4\alpha+2}}{1-q^{4\alpha+2}}+\frac{q^{4n-4\alpha-2}}{1-q^{4n-4\alpha-2}}+1\right\}.$$

Zerlegt man hienach jedes von den n Gliedern des Ausdrucks Q, so erhält man

$$Q = \frac{8^n q^{2n}}{1-q^{4n}}+\frac{16q^{2n}}{1-q^{4n}}\left\{\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^6}{1-q^6}+\frac{q^{10}}{1-q^{10}}\dots+\frac{q^{4n-2}}{1-q^{4n-2}}\right\};$$

es ist mithin

$$\overset{n}{A} = \frac{-8nq^{2n}}{1-q^{4n}} = -\frac{4n}{\mathfrak{Sin}\,2n\eta K'}.$$

Multiplicirt man die Reihe für $k^2\mathrm{sn}^2u$ mit ∂u und integrirt auf beiden Seiten so, dafs das Integral für $u=0$ verschwindet, so erhält man, da nach §. 64. $\int_0 k^2\mathrm{sn}^2u.\partial u = u-\mathrm{el}\,u$ ist, die Reihe

$$u-\mathrm{el}\,u = A\eta^2u+\frac{\overset{1}{A}\eta}{2}\sin 2\eta u+\frac{\overset{2}{A}\eta}{4}\sin 4\eta u+\frac{\overset{3}{A}\eta}{6}\sin 6\eta u+\dots,$$

und wird hierin $u=K$, also $\mathrm{el}\,u=E$ gesetzt, so fällt der periodische Theil der Reihe weg und es bleibt blofs

$$K-E = (\tfrac{1}{2}\pi)^2.\frac{A}{K},$$

also

$$A\eta^2 = 1-\frac{E}{K}.$$

Es ist mithin

$$1-\frac{E}{K} = \frac{(\frac{1}{2}\pi)^2}{K^2}\left(\frac{2}{\mathfrak{Sin}^2\eta K'}+\frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 3\eta K'}+\frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 5\eta K'}+\dots\right) \text{ und}$$

$$1.\quad k^2\mathrm{sn}^2u = 1-\frac{E}{K}-\frac{4\eta^2\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}2\eta K'}-\frac{8\eta^2\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}4\eta K'}-\frac{12\eta^2\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}6\eta K'}-\frac{16\eta^2\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}8\eta K'}-\ldots,\ \text{oder}$$

$$2.\quad \mathrm{dn}^2u = \frac{E}{K}+\frac{4\eta^2\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}2\eta K'}+\frac{8\eta^2\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}4\eta K'}+\frac{12\eta^2\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}6\eta K'}+\frac{16\eta^2\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}8\eta K'}+\ldots,$$

$$3.\quad k^2\mathrm{cn}^2u = \frac{E}{K}-k'^2+\frac{4\eta^2\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}2\eta K'}+\frac{8\eta^2\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}4\eta K'}+\frac{12\eta^2\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}6\eta K'}+\frac{16\eta^2\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}8\eta K'}+\ldots,$$

$$4.\quad k^2\mathrm{snc}^2u = 1-\frac{E}{K}+\frac{4\eta^2\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}2\eta K'}-\frac{8\eta^2\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}4\eta K'}+\frac{12\eta^2\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}6\eta K'}-\frac{16\eta^2\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}8\eta K'}+-\ldots,$$

$$5.\quad \mathrm{dnc}^2u = \frac{E}{K}-\frac{4\eta^2\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}2\eta K'}+\frac{8\eta^2\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}4\eta K'}-\frac{12\eta^2\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}6\eta K'}+\frac{16\eta^2\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}8\eta K'}-+\ldots,$$

$$6.\quad k^2\mathrm{cnc}^2u = \frac{E}{K}-k'^2-\frac{4\eta^2\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}2\eta K'}+\frac{8\eta^2\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}4\eta K'}-\frac{12\eta^2\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}6\eta K'}+\frac{16\eta^2\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}8\eta K'}-+\ldots$$

Zusatz. Erhebt man die Reihe (9.) §. 179. zum Quadrate, so erhält man für das von u unabhängige Anfangsglied die Reihe:

$$\frac{E}{K}-k'^2 = \eta^2\left(\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2\eta K'}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 3\eta K'}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 5\eta K'}\ldots\right).$$

Erhebt man die Reihe (17.) §. 179. zum Quadrate, so findet man

$$\frac{E}{K} = \eta^2\left(1+\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 2\eta K'}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 4\eta K'}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 6\eta K'}+\ldots\right).$$

Setzt man also wieder $\frac{1}{2}\pi.\frac{K'}{K} = v$, so hat man

$$7.\quad K(K-E) = (\tfrac{1}{2}\pi)^2.\left(\frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 v}+\frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 3v}+\frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 5v}+\frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 7v}+\ldots\right),$$

$$8.\quad K(E-k'^2K) = (\tfrac{1}{2}\pi)^2.\left(\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 3v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 5v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 7v}+\ldots\right),$$

$$9.\quad K.E = (\tfrac{1}{2}\pi)^2.\left(1+\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 2v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 4v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 6v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 8v}+\ldots\right).$$

Werden die beiden Gleichungen (7.) und (8.) addirt, so erhält man

$$10.\quad k^2.K^2 = (\tfrac{1}{2}\pi)^2.\left\{\frac{8\,\mathfrak{Cos}\,2v}{\mathfrak{Sin}^2 2v}+\frac{8\,\mathfrak{Cos}\,6v}{\mathfrak{Sin}^2 6v}+\frac{8\,\mathfrak{Cos}\,10v}{\mathfrak{Sin}^2 10v}+\frac{8\,\mathfrak{Cos}\,14v}{\mathfrak{Sin}^2 14v}+\ldots\right\}.$$

Weiter ist, wenn (8.) von (9.) subtrahirt wird,

$$11.\quad k'^2.K^2 = (\tfrac{1}{2}\pi)^2.\left\{1-\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 2v}-\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 3v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 4v}-\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 5v}+-\ldots\right\}.$$

Aus (10.) und (11.) erhält man endlich durch Addition:

12. $K^2 = (\frac{1}{2}\pi)^2 \left\{1 + \frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 v} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 2v} + \frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 3v} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 4v} + \frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 5v} + \dots\right\}$;

also

13. $K'^2 = v^2 \left\{1 + \frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 v} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 2v} + \frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 3v} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 4v} + \frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 5v} + \dots\right\}$.

§. 182.

Nach §. 62. ist

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} = k^2 \operatorname{sn}^2 u - \frac{\partial^2 \log \operatorname{sn} u}{\partial u^2} \quad \text{und} \quad \frac{k'^2}{\operatorname{cn}^2 u} = -k^2 \operatorname{cn}^2 u - \frac{\partial^2 \log \operatorname{cn} u}{\partial u^2}.$$

Es ist ferner

$$\frac{\partial \log \operatorname{sn} u}{\partial u} = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} = k'.\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cnc} u}$$

$$= \eta \cot \eta u - 2\eta q \frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\, \eta K'} - 2\eta q^2 \frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 2\eta K'} - 2\eta q^3 \frac{\sin 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 3\eta K'} - 2\eta q^4 \frac{\sin 8\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 4\eta K'} - \dots;$$

also

$$\frac{\partial^2 \log \operatorname{sn} u}{\partial u^2} = -\frac{\eta^2}{\sin^2 \eta u} - 4\eta^2 q.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\, \eta K'} - 8\eta^2 q^2.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 2\eta K'} - 12\eta^2 q^3.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 3\eta K'}$$
$$- 16\eta^2 q^4.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 4\eta K'} - \dots$$

Wird diese Reihe von der vorhin für $k^2 \operatorname{sn}^2 u$ gefundenen subtrahirt, so entsteht

1. $$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} = 1 - \frac{E}{K} + \frac{\eta^2}{\sin^2 \eta u} - 4\eta^2 q^2.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta K'} - 8\eta^2 q^4.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta K'}$$
$$- 12\eta^2 q^6.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta K'} - 16\eta^2 q^8.\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta K'} - \dots$$

Es ist

$$-\frac{\partial \log \operatorname{cn} u}{\partial u} = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}$$

$$= \eta \tang \eta u + 2\eta q.\frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\, \eta K'} + 2\eta q^2.\frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 2\eta K'} + 2\eta q^3.\frac{\sin 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 3\eta K'} + \dots;$$

also ist

$$-\frac{\partial^2 \log \operatorname{cn} u}{\partial u^2} = \frac{\eta^2}{\cos^2 \eta u} + 4\eta^2 q.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\, \eta K'} + 8\eta^2 q^2.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 2\eta K'} + 12\eta^2 q^3.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 3\eta K'} + \dots$$

Wird von dieser Reihe die Reihe (3.) §. 181. subtrahirt, so entsteht

2. $$\frac{k'^2}{\operatorname{cn}^2 u} = k'^2 - \frac{E}{K} + \frac{\eta^2}{\cos^2 \eta u} + 4\eta^2 q^2.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta K'} - 8\eta^2 q^4.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta K'}$$
$$+ 12\eta^2 q^6.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta K'} - + \dots$$

Es können diese beiden Reihen auch also dargestellt werden:

3. $$\begin{cases} \frac{1}{\operatorname{tn}^2 u} = -\frac{E}{K} + \frac{\eta^2}{\sin^2 \eta u} - 4\eta q^2.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta K'} - 8\eta^2 q^4.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 2\eta K'} - 12\eta^2 q^6.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta K'} - \dots, \\ \frac{1}{\operatorname{tnc}^2 u} = -\frac{E}{K} + \frac{\eta^2}{\cos^2 \eta u} + 4\eta q^2.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta K'} - 8\eta^2 q^4.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta K'} + 12\eta^2 q^6.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta K'} - + \dots, \end{cases}$$

woraus erhellet, daſs die eine Reihe in die andere übergeht, wenn $K-u$ statt u gesetzt wird.

Vertauscht man in den beiden Reihen

$$k^2\mathrm{snc}^2u = 1-\frac{E}{K}+\frac{4\eta^2\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'}-\frac{8\eta^2\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'}+\frac{12\eta^2\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'}-\frac{16\eta^2\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'}+-\ldots,$$

$$\frac{}{\mathrm{snc}^2 u} = 1-\frac{E}{K}+\frac{\eta^2}{\cos^2\eta u}+4\eta^2 q^2.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'}-8\eta^2 q^4.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'}$$
$$+12\eta^2 q^6.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'}-+\ldots$$

die beiden conjugirten Moduln mit einander, indem man ui statt u setzt, so erhält man die beiden Reihen

$$4.\quad \mathrm{dnc}^2u = 1-\frac{E'}{K'}+\frac{4\eta'^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-\frac{8\eta'^2\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta'K}+\frac{12\eta'^2\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}$$
$$-\frac{16\eta'^2\,\mathfrak{Cos}\,8\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta'K}-+\ldots,$$

$$5.\quad \mathrm{dn}^2u = 1-\frac{E'}{K'}+\frac{\eta'^2}{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}+4\eta'^2p^2.\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}+8\eta'^2p^4.\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta'K}$$
$$+12\eta'^2p^6.\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}-16\eta'^2p^8.\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta'K}+-\ldots,$$

welche desto rascher convergiren, je mehr sich der Modul k der Einheit nähert.

§. 183.

Reihen für das Modular-Integral $\mathrm{el}\,u$ der ersten Art, welche nach Functionen der Vielfachen von ηu und $\eta' u$ fortschreiten. Ausdruck der Modular-Logarithmen durch die Hülfs-Functionen.

Multiplicirt man die Reihe (2.) §. 181. mit ∂u, so erhält man durch Integration die Reihe

$$1.\quad \mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}.u+\frac{2\eta\sin 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'}+\frac{2\eta\sin 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'}+\frac{2\eta\sin 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'}+\frac{2\eta\sin 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'}+\ldots,\ \text{also}$$

$$2.\quad \mathrm{elc}\,u = E-\frac{E}{K}u+\frac{2\eta\sin 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'}-\frac{2\eta\sin 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'}+\frac{2\eta\sin 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'}-\frac{2\eta\sin 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'}+\ldots$$

Integrirt man die mit ∂u multiplicirte Reihe (5.) §. 182., so erhält man

$$3.\quad \mathrm{el}\,u = \left(1-\frac{E'}{K'}\right)u+\eta'\,\mathfrak{Tang}\,\eta'u+2\eta'p^2\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-2\eta'p^4.\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta'K}$$
$$+2\eta'p^6.\frac{\mathfrak{Sin}\,6\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}+2\eta'p^8.\frac{\mathfrak{Sin}\,8\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta'K}+-\ldots,$$

und integrirt man die mit $-\partial u = \partial(K-u)$ multiplicirte Reihe (4.) §. 182., so entsteht die Reihe

$$4.\quad \mathrm{elc}\,u = E - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)u - 2\eta'.\frac{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,2\eta' u}{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,2\eta' K} + 2\eta'.\frac{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,4\eta' u}{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,4\eta' K} - 2\eta'.\frac{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,6\eta' u}{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,6\eta' K}$$
$$+ 2\eta'.\frac{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,8\eta' u}{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,8\eta' K} - + \ldots,$$

Multiplicirt man die Reihe (1.) mit ∂u, und integrirt, so entsteht

$$\mathrm{lm}\,u = \frac{E}{K}.\frac{u^2}{2} + A - \frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,2\eta K} - \tfrac{1}{2}.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,4\eta K'} - \tfrac{1}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,6\eta K'} - \tfrac{1}{4}.\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,8\eta K'} - \ldots,$$

wenn man die Constante der Integration durch A bezeichnet. Da nach §. 174.

$$\log \mathrm{Hl}\,u = \log g - \frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,2\eta K} - \tfrac{1}{2}.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,4\eta K'} - \tfrac{1}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,6\eta K'} - \tfrac{1}{4}.\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,8\eta K} - \ldots$$

ist, so ist $\mathrm{lm}\,u = \frac{E}{K}.\frac{u^2}{2} + A - \log g + \log \mathrm{Hl}\,u$. Setzt man, um die Constante zu bestimmen, $u = o$, so hat man $\mathrm{lm}\,o = o$, $\log \mathrm{Hl}\,o = \log \sqrt{k'}$, also $o = A - \log g + \log \sqrt{k'}$, folglich

$$5.\quad \mathrm{lm}\,u = \frac{E}{K}.\frac{u^2}{2} + \log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k'}}\right).$$

Wird in dieser Formel $K-u$ statt u gesetzt, so hat man, da $\mathrm{Hl}(K-u) = \mathrm{Gl}\,u$ ist,

$$6.\quad \mathrm{lmc}\,u = \tfrac{1}{2}EK - Eu + \frac{E}{K}.\tfrac{1}{2}u^2 + \log\left(\frac{\mathrm{Gl}\,u}{\sqrt{k'}}\right).$$

Wird die Reihe (3.) mit ∂u multiplicirt, so giebt die Integration

$$\mathrm{lm}\,u = B + \left(1 - \frac{E'}{K'}\right).\frac{u^2}{2} + \log \mathfrak{C}\mathrm{os}\,\eta' u + p^2.\frac{\mathfrak{C}\mathrm{os}\,2\eta' u}{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,2\eta' K} - \frac{p^4}{2}.\frac{\mathfrak{C}\mathrm{os}\,4\eta' u}{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,4\eta' K}$$
$$+ \frac{p^6}{3}.\frac{\mathfrak{C}\mathrm{os}\,6\eta' u}{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,6\eta' K} - + \ldots;$$

und da nach §. 174.

$$\log \mathfrak{Bl}'u = \log(2g'\sqrt{p}.\mathfrak{C}\mathrm{os}\,\eta' u) + p^2\frac{\mathfrak{C}\mathrm{os}\,2\eta' u}{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,2\eta' K} - \frac{p^4}{2}.\frac{\mathfrak{C}\mathrm{os}\,4\eta' u}{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,4\eta' K}$$
$$+ \frac{p^6}{3}.\frac{\mathfrak{C}\mathrm{os}\,6\eta' u}{\mathfrak{S}\mathrm{in}\,6\eta' K} - + \ldots$$

ist, so ist

$$\mathrm{lm}\,u = B - (\log 2g'\sqrt{p}) + \left(1 - \frac{E'}{K'}\right).\frac{u^2}{2} + \log \mathfrak{Bl}'u.$$

Setzt man, um die Constante B zu bestimmen, $u = o$, so hat man, da $\mathfrak{Bl}'o = \sqrt{k'}$ ist, die Gleichung $o = B - \log(2g'\sqrt{p}) + \log\sqrt{k'}$; folglich ist

$$7.\quad \mathrm{lm}\,u = \left(1 - \frac{E'}{K'}\right).\frac{u^2}{2} + \log\left(\frac{\mathfrak{Bl}'u}{\sqrt{k'}}\right).$$

Setzen wir auch in dieser Formel $K-u$ für u, so ist $\mathfrak{Bl}'(K-u) = e^{\eta'(\frac{1}{2}K-u)}.\mathfrak{Gl}'u$, also

$$\log \mathfrak{Bl}'(K-u) = \eta'(\tfrac{1}{2}K-u) + \log \mathfrak{Gl}'u = \frac{\pi}{4KK'}(K-u)^2 - \frac{\pi u^2}{4KK'} + \log \mathfrak{Gl}'u,$$

folglich

$$\operatorname{lmc} u = \left(1-\frac{E'}{K'}\right).\frac{(K-u)^2}{2}+\frac{\pi}{2KK'}.\frac{(K-u)^2}{2}-\frac{\pi u^2}{4KK'}+\log\frac{\mathfrak{Gl}'u}{\sqrt{k'}}.$$

Da aber $\frac{\pi}{2KK'}=\frac{E}{K}+\frac{E'}{K'}-1$, so reducirt sich die Formel auf

$$\operatorname{lmc} u = \frac{EK}{2}-E.u+\left(\frac{E}{K}-\frac{\pi}{2KK'}\right).\frac{u^2}{2}+\log\left(\frac{\mathfrak{Gl}'u}{\sqrt{k'}}\right),$$

oder endlich auf

$$8.\quad \operatorname{lmc} u = \frac{EK}{2}-E.u+\left(1-\frac{E'}{K'}\right).\frac{u^2}{2}+\log\left(\frac{\mathfrak{Gl}'u}{\sqrt{k'}}\right).$$

Zusatz. Die Formel (7.) wurde hergeleitet, ohne die Relation $\frac{E}{K}+\frac{E'}{K'}-1=\frac{\pi}{2KK}$ anzuwenden; wir können aber diese bei Herleitung der Formel (8.) angewandte Relation daraus herleiten, indem wir $u=K$ setzen. Dadurch entsteht

$$\operatorname{lm} K = \left(1-\frac{E'}{K'}\right).\tfrac{1}{2}K^2+\log\frac{\mathfrak{Bl}'K}{\sqrt{k'}}.$$

Da aber nach §. 73.

$$\operatorname{lm} K = \frac{EK}{2}+\log\sqrt{\frac{1}{k'}} \quad\text{und}\quad \mathfrak{Bl}'K = e^{\frac{\pi K}{4K'}}$$

ist, so ist

$$\frac{EK}{2}=\left(1-\frac{E'}{K'}\right).\tfrac{1}{2}K^2+\frac{\pi K}{4K'} \text{ oder } EK'+E'K-KK' = \tfrac{1}{2}\pi$$

und folglich

$$\frac{E}{K}+\frac{E'}{K'}-1 = \frac{\pi}{2KK'}.$$

§. 184.

Die Differenziale der acht Hülfs-Functionen.

Differenziirt man die Formeln (5.) und (6.) §. 183., so erhält man

$$\operatorname{el} u = \frac{E}{K}.u+\frac{\partial\log\operatorname{Hl} u}{\partial u}$$

und

$$E-\operatorname{elc} u = \frac{E}{K}.u+\frac{\partial\log\operatorname{Gl} u}{\partial u};$$

daher ist rückwärts:

$$\frac{\partial\log\operatorname{Hl} u}{\partial u} = \operatorname{el} u-\frac{E}{K}u \text{ und}$$

$$\frac{\partial\log\operatorname{Gl} u}{\partial u} = E-\operatorname{elc} u-\frac{E}{K}.u.$$

Differenziirt man aber die Logarithmen der Gleichungen (6.) §. 171., so erhält man

$$\frac{\partial \log \mathrm{Al}\,u}{\partial u} = \frac{\partial \log \mathrm{Hl}\,u}{\partial u} + \frac{k' \mathrm{cn}\,u}{\mathrm{cnc}\,u} = \frac{\partial \log \mathrm{Gl}\,u}{\partial u} + \frac{\mathrm{snc}\,u}{\mathrm{sn}\,u},$$

$$\frac{\partial \log \mathrm{Bl}\,u}{\partial u} = \frac{\partial \log \mathrm{Hl}\,u}{\partial u} - \frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,u} = \frac{\partial \log \mathrm{Gl}\,u}{\partial u} + \frac{k' \mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u},$$

$$\frac{\partial \log \mathrm{Gl}\,u}{\partial u} = \frac{\partial \log \mathrm{Hl}\,u}{\partial u} - k^2 \,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u.$$

Werden diese Werthe benutzt, so hat man die vier Formeln

1. $$\frac{\partial \log \mathrm{Al}\,u}{\partial u} = \mathrm{el}\,u - \frac{E}{K}u + \frac{k' \mathrm{cn}\,u}{\mathrm{cnc}\,u} = E - \mathrm{elc}\,u - \frac{E}{K}u + \frac{\mathrm{snc}\,u}{\mathrm{sn}\,u}, \text{ also}$$

$$\frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}\,u}{\partial u^2} = -\frac{E}{K} - \frac{1}{\mathrm{tn}^2 u},$$

2. $$\frac{\partial \log \mathrm{Bl}\,u}{\partial u} = \mathrm{el}\,u - \frac{E}{K}u - \frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,u} = E - \mathrm{elc}\,u - \frac{E}{K}u - \frac{k' \mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u}, \text{ also}$$

$$\frac{\partial^2 \log \mathrm{Bl}\,u}{\partial u^2} = -\frac{E}{K} - \frac{1}{\mathrm{tnc}^2 u},$$

3. $$\frac{\partial \log \mathrm{Gl}\,u}{\partial u} = \mathrm{el}\,u - \frac{E}{K}u - k^2 \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u = E - \mathrm{elc}\,u - \frac{E}{K}u, \text{ also}$$

$$\frac{\partial^2 \log \mathrm{Gl}\,u}{\partial u^2} = -\frac{E}{K} + \mathrm{dnc}^2 u,$$

4. $$\frac{\partial \log \mathrm{Hl}\,u}{\partial u} = \mathrm{el}\,u - \frac{E}{K}u = E - \mathrm{elc}\,u - \frac{E}{K}u + k^2 \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u, \text{ also}$$

$$\frac{\partial^2 \log \mathrm{Hl}\,u}{\partial u^2} = -\frac{E}{K} + \mathrm{dn}^2 u.$$

Differenziirt man die Formeln (7.) und (8.) §. 183., so erhält man

$$\mathrm{el}\,u - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)u = \frac{\partial \log \mathfrak{B}\mathfrak{l}'u}{\partial u},$$

$$E - \mathrm{elc}\,u - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)u = \frac{\partial \log \mathfrak{G}\mathfrak{l}'u}{\partial u}.$$

Differenziirt man ferner die Logarithmen der Gleichungen (8.) §. 170., so hat man

$$\frac{\partial \log \mathfrak{A}\mathfrak{l}'u}{\partial u} = \frac{\partial \log \mathfrak{B}\mathfrak{l}'u}{\partial u} + \frac{k' \mathrm{cn}\,u}{\mathrm{cnc}\,u} = \frac{\partial \log \mathfrak{G}\mathfrak{l}'u}{\partial u} + \frac{\mathrm{snc}\,u}{\mathrm{sn}\,u},$$

$$\frac{\partial \log \mathfrak{H}\mathfrak{l}'u}{\partial u} = \frac{\partial \log \mathfrak{B}\mathfrak{l}'u}{\partial u} - \frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,u} = \frac{\partial \log \mathfrak{G}\mathfrak{l}'u}{\partial u} - \frac{k' \mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u},$$

$$\frac{\partial \log \mathfrak{G}\mathfrak{l}'u}{\partial u} = \frac{\partial \log \mathfrak{B}\mathfrak{l}'u}{\partial u} - k^2 \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u.$$

Daher haben wir folgende Ausdrücke der Differenzial-Verhältnisse der Logarithmen der hyperbolischen Hülfs-Functionen:

5. $$\frac{\partial \log \mathfrak{A}\mathfrak{l}'u}{\partial u} = \mathrm{el}\,u - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)u + \frac{k' \mathrm{cn}\,u}{\mathrm{cnc}\,u} = E - \mathrm{elc}\,u - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)u + \frac{\mathrm{snc}\,u}{\mathrm{sn}\,u},$$

6. $$\frac{\partial \log \mathfrak{B}\mathfrak{l}'u}{\partial u} = \mathrm{el}\,u - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)u = E - \mathrm{elc}\,u - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)u + k^2 \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u,$$

$$7. \quad \frac{\partial \log \mathfrak{Gl}'u}{\partial u} = \mathrm{el}\,u - \left(1-\frac{E'}{K'}\right)u - k^2 \,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u = E - \mathrm{elc}\,u - \left(1-\frac{E'}{K'}\right)u,$$

$$8. \quad \frac{\partial \log \mathfrak{Hl}'u}{\partial u} = \mathrm{el}\,u - \left(1-\frac{E'}{K'}\right)u - \frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,u} = E - \mathrm{elc}\,u - \left(1-\frac{E'}{K'}\right)u - \frac{k'\,\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u},$$

und hieraus folgen die zweiten Differenzial-Verhältnisse

$$\frac{\partial^2 \log \mathfrak{Al}'u}{\partial u^2} = \frac{E'}{K'} - \frac{1}{\mathrm{sn}^2 u}, \qquad \frac{\partial^2 \log \mathfrak{Gl}'u}{\partial u^2} = \frac{E'}{K'} - k^2 \,\mathrm{snc}^2 u,$$

$$\frac{\partial^2 \log \mathfrak{Bl}'u}{\partial u^2} = \frac{E'}{K'} - k^2 \,\mathrm{sn}^2 u, \qquad \frac{\partial^2 \log \mathfrak{Hl}'u}{\partial u^2} = \frac{E'}{K'} - \frac{1}{\mathrm{snc}^2 u}.$$

§. 185.

Einfacher Zusammenhang der cyklischen Hülfs-Functionen mit den auf den conjugirten Modul bezogenen hyperbolischen.

Da nach §. 170. und 171.

$$\mathrm{sn}\,u = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\mathfrak{Al}'u}{\mathfrak{Bl}'u} \quad \text{und} \quad \mathrm{sn}\,u = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\mathrm{Al}\,u}{\mathrm{Hl}\,u},$$

ist, so ist

$$\frac{\mathfrak{Al}'u}{\mathfrak{Bl}'u} = \frac{\mathrm{Al}\,u}{\mathrm{Hl}\,u}.$$

Eben so ist

$$\frac{\mathfrak{Hl}'u}{\mathfrak{Bl}'u} = \frac{\mathrm{Bl}\,u}{\mathrm{Hl}\,u} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{Gl}'u}{\mathfrak{Bl}'u} = \frac{\mathrm{Gl}\,u}{\mathrm{Hl}\,u}.$$

Diese drei Gleichungen lassen sich aber zu der einzigen zusammenfassen:

$$1. \quad \frac{\mathfrak{Al}'u}{\mathrm{Al}\,u} = \frac{\mathfrak{Bl}'u}{\mathrm{Hl}\,u} = \frac{\mathfrak{Hl}'u}{\mathrm{Bl}\,u} = \frac{\mathfrak{Gl}'u}{\mathrm{Gl}\,u}.$$

Sind, der gefundenen Gleichung gemäfs, die vier Verhältnisse einander gleich, so braucht nur noch der Werth eines dieser Verhältnisse gefunden zu werden. Da nach §. 183.

$$\mathrm{lm}\,u = \frac{E}{K}\cdot\frac{u^2}{2} + \log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k'}}\right)$$

und auch

$$\mathrm{lm}\,u = \left(1-\frac{E'}{K'}\right)\cdot\frac{u^2}{2} + \log\left(\frac{\mathfrak{Bl}'u}{\sqrt{k}}\right)$$

ist, so geben die beiden Ausdrücke die Gleichung

$$\frac{E}{K}\cdot\frac{u^2}{2} + \log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k}}\right) = \left(1-\frac{E'}{K'}\right)\cdot\frac{u^2}{2} + \log\left(\frac{\mathfrak{Bl}'u}{\sqrt{k'}}\right)$$

oder

$$\left(\frac{E}{K}+\frac{E'}{K'}-1\right)\cdot\frac{u^2}{2} = \log\frac{\mathfrak{Bl}'u}{\mathrm{Hl}\,u},$$

welche sich, da $\frac{E}{K}+\frac{E'}{K'}-1 = \frac{\pi}{2KK'}$ ist, auf die einfachere

$$\frac{\pi u^2}{4KK'} = \log\frac{\mathfrak{Bl}'u}{\mathrm{Hl}\,u}$$

oder

$$2.\quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{B}l'u}{\mathrm{Hl}\,u} = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}} \text{ reducirt. Also ist auch } \dfrac{\mathfrak{A}l'u}{\mathrm{Al}\,u} = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}, \\ \dfrac{\mathfrak{H}l'u}{\mathrm{Bl}\,u} = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}, \quad \text{und} \quad \dfrac{\mathfrak{G}l'u}{\mathrm{Gl}\,u} = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}. \end{cases}$$

Vertauscht man in diesen Gleichungen die conjugirten Moduln mit einander, indem man ui statt u setzt, so verwandelt sich die erste Gleichung in die dritte und die dritte in die erste; die zweite Gleichung verwandelt sich wieder in sich selbst, und dasselbe gilt von der vierten Gleichung. Die vorstehenden Gleichungen können auch also dargestellt werden:

$$3.\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(ui) = i.e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}.\mathrm{Al}'u, \qquad \mathrm{Gl}(ui) = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}.\mathrm{Gl}'u, \\ \mathrm{Bl}(ui) = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}.\mathrm{Hl}'u, \qquad \mathrm{Hl}(ui) = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}.\mathrm{Bl}'u. \end{cases}$$

Sie drücken nun aus, wie cyklische Hülfs-Functionen des rein imaginären Argumentes ui auf cyklische Hülfs-Functionen des reellen Argumentes u mit dem conjugirten Modul zurückgeführt werden können.

§. 186.

Andere Darstellung der Factoren der unendlichen Producte, wodurch die cyklischen und hyperbolischen Hülfs-Functionen ausgedrückt werden.

Setzt man in der Gleichung (3.) §. 171. das Argument $u = o$, so hat man, da $\mathrm{Bl}\,o = \sqrt{k}$ ist, die Gleichung

$$\frac{\sqrt{k}}{\varepsilon} = 2\sqrt{q}.(1+q^4)^2.(1+q^8)^2.(1+q^{12})^2\ldots.;$$

und wird hierdurch die Gleichung (3.) selbst dividirt, so entsteht

$$\mathrm{Bl}\,u = \sqrt{k}.\cos\eta u.\frac{1+2q^4\cos 2\eta u+q^8}{(1+q^4)^2}.\frac{1+2q^8\cos 2\eta u+q^{16}}{(1+q^8)^2}\ldots.$$

Es ist

$$\frac{1+2q^4\cos 2\eta u+q^8}{(1+q^4)^2} = 1-\frac{4q^4\sin^2\eta u}{(1+q^4)^2} = 1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 2\eta K'}.$$

Werden eben so die übrigen Factoren umgeformt, so erhält man

$$1.\quad \mathrm{Al}\,u = \sqrt{k}.\sin\eta u.\left(1-\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 2\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 4\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 6\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 8\eta K'}\right)\ldots.,$$

$$2.\quad \mathrm{Bl}\,u = \sqrt{k}.\cos\eta u.\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 2\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 4\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 6\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 8\eta K'}\right)\ldots.$$

Setzt man in der Reihe (4.) §. 171. das Argument $u = o$, so hat man, da $\mathrm{Gl}\,o = 1$ ist,

$$\frac{1}{\varepsilon} = (1+q^2)^2(1+q^6)^2(1+q^{10})^2\ldots.,$$

also

$$\mathrm{Gl}\,u = \frac{1+2q^2\cos 2\eta u+q^4}{(1+q^2)^2}\cdot\frac{1+2q^6\cos 2\eta u+q^{12}}{(1+q^6)^2}\cdot\frac{1+2q^{10}\cos 2\eta u+q^{20}}{(1+q^{10})^2}\cdots$$

Da aber $\frac{1+2q^2\cos 2\eta u+q^4}{(1+q^2)^2} = 1-\frac{4q^2\sin^2\eta u}{(1+q^2)^2} = 1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\eta K'}$ ist, so erhält man durch eine ähnliche Umformung der übrigen Factoren das Product

$$3.\quad \mathrm{Gl}\,u = \left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 3\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 5\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 7\eta K'}\right)\cdots$$

und also

$$4.\quad \mathrm{Hl}\,u = \left(1-\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 3\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 5\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 7\eta K'}\right)\cdots$$

Setzt man in der Reihe (4.) §. 171. $u=K$, so hat man, da $\mathrm{Gl}\,K=\sqrt{k'}$ ist,

$$\frac{\sqrt{k'}}{g} = (1-q^2)^2(1-q^6)^2(1-q^{10})^2\ldots,$$

also

$$\mathrm{Gl}\,u = \sqrt{k'}.\frac{1+2q^2\cos 2\eta u+q^4}{(1-q^2)^2}\cdot\frac{1+2q^6\cos 2\eta u+q^{12}}{(1-q^6)^2}\cdot\frac{1+2q^{10}\cos 2\eta u+q^{20}}{(1-q^{10})^2}\cdots$$

Da aber $\frac{1+2q^2\cos 2\eta u+q^4}{(1-q^2)^2} = 1+\frac{4q^2\cos^2\eta u}{(1-q^2)^2} = 1+\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2\eta K'}$ ist, so erhält man durch eine ähnliche Umformung der übrigen Factoren das Product

$$5.\quad \mathrm{Gl}\,u = \sqrt{k'}.\left(1+\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 3\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 5\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 7\eta K'}\right)\cdots$$

und

$$6.\quad \mathrm{Hl}\,u = \sqrt{k'}.\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 3\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 5\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 7\eta K'}\right)\cdots$$

Die Producte (1.) und (2.) lassen sich auf ähnliche Art noch anders darstellen.

Nach §. 169. ist $a^2=\sqrt[3]{\frac{kk'}{4\eta'^2 p}}$ und nach §. 172. ist $g'=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{kk'}}{2\sqrt{p}}}$; folglich ist $a^2.g'=\frac{\sqrt{(kk')}}{2\eta'\sqrt{p}}$. Da aber

$$\frac{\mathfrak{Al}'u}{a^2.g'} = 2\sqrt{p}\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u\,\frac{(1-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^8)(1-2p^8\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{16})\cdots}{(1-p^4)^2.(1-p^8)^2\cdots}$$

ist, so ist

$$\mathfrak{Al}'u = \sqrt{(kk')}.\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\eta'}\cdot\frac{1-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^8}{(1-p^4)^2}\cdot\frac{1-2p^8\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{16}}{(1-p^8)^2}\cdots,$$

folglich

$$\mathrm{Al}'u = \sqrt{(kk')}.\frac{\sin\eta u}{\eta}\cdot\frac{1-2p^4\cos 2\eta u+q^8}{(1-q^4)^2}\cdot\frac{1-2q^8\cos 2\eta u+q^{16}}{(1-q^8)^2}\cdots,$$

oder auch

7. $\mathrm{Al}\,u = \sqrt{(kk')}.\frac{\sin\eta u}{\eta}.\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 2\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 4\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 6\eta K'}\right)\ldots$ und

8. $\mathrm{Bl}\,u = \sqrt{(kk')}.\frac{\cos\eta u}{\eta}.\left(1+\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 2\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 4\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 6\eta K'}\right)\ldots$

Aus den Formeln (1.) bis (8.) ergeben sich durch das bekannte Verfahren die Producte für die hyperbolischen Hülfs-Functionen.

§. 187.

Da $\mathrm{Al}\,\frac{1}{2}K = \mathrm{Bl}\,\frac{1}{2}K$ und $\mathrm{Gl}\,\frac{1}{2}K = \mathrm{Hl}\,\frac{1}{2}K$ ist, so gelangen wir noch zu einer neuen Umformung der unendlichen Producte, indem wir $u = \frac{1}{2}K$ setzen. Ist zur Abkürzung

$$\alpha = \mathrm{Al}(\tfrac{1}{2}K) = \mathrm{Bl}(\tfrac{1}{2}K) \quad \text{und} \quad \beta = \mathrm{Gl}(\tfrac{1}{2}K) = \mathrm{Hl}(\tfrac{1}{2}K),$$

so erhalten wir, da $\eta u = \frac{1}{4}\pi$, also $2\eta u = \frac{1}{2}\pi$ ist, wenn $u = \frac{1}{2}K$ genommen wird,

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} = \sqrt{2q}.(1+q^8)(1+q^{16})(1+q^{24})(1+q^{32})\ldots, \text{ und}$$

$$\frac{\beta}{\varepsilon} = (1+q^4)(1+q^{12})(1+q^{20})\ldots.$$

Dividirt man hierdurch die Gleichungen (2.) bis (5.) §. 171., so erhält man

$$\frac{\mathrm{Al}\,u}{\alpha} = \sqrt{2}.\sin\eta u.\frac{1-2q^4\cos 2\eta u+q^8}{1+q^8}.\frac{1-2q^8\cos 2\eta u+q^{16}}{1+q^{16}}.\frac{1-2q^{12}\cos 2\eta u+q^{24}}{1+q^{24}}$$

oder

$$\mathrm{Al}\,u = \alpha\sqrt{2}.\sin\eta u.\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,12\eta K'}\right)\ldots,$$

$$\mathrm{Bl}\,u = \alpha\sqrt{2}.\cos\eta u.\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,12\eta K'}\right)\ldots.$$

Die Factoren dieser Producte convergiren aufs rascheste gegen die Grenze Eins. Eben so erhält man noch

$$\mathrm{Gl}\,u = \beta.\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,10\eta K'}\right)\ldots,$$

$$\mathrm{Hl}\,u = \beta.\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,10\eta K'}\right)\ldots.$$

Es bleibt nur noch die Bestimmung von α und β übrig. Nach Formel (5.) §. 183. ist $\mathrm{lm}\,\frac{1}{2}K = \frac{1}{8}EK + \log\frac{\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K)}{\sqrt{k'}} = \frac{1}{8}EK + \log\frac{\beta}{\sqrt{k'}}$; und nach §. 73. ist $\mathrm{lm}\,\frac{1}{2}K = \frac{1}{8}EK + \log\sqrt[4]{\left(\frac{1+k'}{2\sqrt{k'^3}}\right)}$; also ist

$$\beta = \sqrt{k'}.\sqrt[4]{\frac{1+k'}{2\sqrt{k'^3}}} \quad \text{oder} \quad \beta = \sqrt[4]{\left(\frac{1+k'}{2}.\sqrt{k'}\right)}.$$

Da $\mathrm{Al}\,u = \sqrt{k}.\mathrm{sn}\,u.\mathrm{Hl}\,u$ ist, so ist $\alpha = \sqrt{k}.\mathrm{sn}\tfrac{1}{2}K.\beta$. Da aber $\mathrm{sn}\tfrac{1}{2}K = \sqrt{\frac{1}{1+k'}}$ ist, so ist $\alpha = \sqrt[4]{\frac{1-k'^2}{(1+k')^2}}.\beta = \beta\sqrt[4]{\frac{1-k'}{1+k'}}$ und also

$$\alpha = \sqrt[4]{(\tfrac{1}{2}(1-k').\sqrt{k'})}.$$

Werden diese Werthe substituirt, so haben wir die Producte:

$$1.\quad \mathrm{Al}\,u = \sqrt[4]{[(1-k').2\sqrt{k'}]}\sin\eta u.\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}4\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}8\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}12\eta K'}\right) \times\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}16\eta K'}\right)\ldots,$$

$$2.\quad \mathrm{Bl}\,u = \sqrt[4]{[(1-k').2\sqrt{k'}]}\cos\eta u.\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}4\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}8\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}12\eta K'}\right) \times\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}16\eta K'}\right)\ldots,$$

$$3.\quad \mathrm{Gl}.u = \sqrt[4]{\left[\frac{1+k'}{2}.\sqrt{k'}\right]}.\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}2\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}6\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}10\eta K'}\right) \times\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}14\eta K'}\right)\ldots,$$

$$4.\quad \mathrm{Hl}\,u = \sqrt[4]{\left[\frac{1+k'}{2}.\sqrt{k'}\right]}\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}2\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}6\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}10\eta K'}\right) \times\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}14\eta K'}\right)\ldots.$$

Vertauschen wir in diesen Formeln die beiden conjugirten Moduln, und setzen wir ui statt u, so erhalten wir noch

$$\mathfrak{Al}'u = \sqrt[4]{((1-k).2\sqrt{k})}.\mathfrak{Sin}\,\eta'u.\left(1-\frac{\mathfrak{Cos}2\eta' u}{\mathfrak{Cos}4\eta' K}\right)\left(1-\frac{\mathfrak{Cos}2\eta' u}{\mathfrak{Cos}8\eta' K}\right)\left(1-\frac{\mathfrak{Cos}2\eta' u}{\mathfrak{Cos}12\eta' K}\right) \times\left(1-\frac{\mathfrak{Cos}2\eta' u}{\mathfrak{Cos}16\eta' K}\right)\ldots,$$

$$\mathfrak{Bl}'u = \sqrt[4]{((1-k).2\sqrt{k})}.\mathfrak{Cos}\,\eta'u.\left(1+\frac{\mathfrak{Cos}2\eta' u}{\mathfrak{Cos}4\eta' K}\right)\left(1+\frac{\mathfrak{Cos}2\eta' u}{\mathfrak{Cos}8\eta' K}\right)\left(1+\frac{\mathfrak{Cos}2\eta' u}{\mathfrak{Cos}12\eta' K}\right) \times\left(1+\frac{\mathfrak{Cos}2\eta' u}{\mathfrak{Cos}16\eta' K}\right)\ldots,$$

$$\mathfrak{Gl}'u - \sqrt[4]{\left(\frac{1+k}{2}.\sqrt{k}\right)}.\left(1+\frac{\mathfrak{Cos}2\eta' u}{\mathfrak{Cos}2\eta' K}\right)\left(1+\frac{\mathfrak{Cos}2\eta' u}{\mathfrak{Cos}6\eta' K}\right)\left(1+\frac{\mathfrak{Cos}2\eta' u}{\mathfrak{Cos}10\eta' K}\right)\ldots,$$

$$\mathfrak{Hl}'u = \sqrt[4]{\left(\frac{1+k}{2}.\sqrt{k}\right)}.\left(1-\frac{\mathfrak{Cos}2\eta' u}{\mathfrak{Cos}2\eta' K}\right)\left(1-\frac{\mathfrak{Cos}2\eta' u}{\mathfrak{Cos}6\eta' K}\right)\left(1-\frac{\mathfrak{Cos}2\eta' u}{\mathfrak{Cos}10\eta' K}\right)\ldots.$$

Da nun bekanntlich

$$\mathfrak{Cos}A + \mathfrak{Cos}B = 2\,\mathfrak{Cos}\frac{A+B}{2}\,\mathfrak{Cos}\frac{A-B}{2} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{Cos}A - \mathfrak{Cos}B = 2\,\mathfrak{Sin}\frac{A+B}{2}\,\mathfrak{Sin}\frac{A-B}{2}$$

ist, so können die obigen Producte auch also dargestellt werden:

5. $\mathfrak{A}l'u = \sqrt[4]{((1-k)\,2\sqrt{k})}\;\mathfrak{Sin}\,\eta'u . \dfrac{\mathfrak{Sin}(2\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Sin}(2\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathfrak{Cos}\,4\eta'K}$
$\times \dfrac{\mathfrak{Sin}(4\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Sin}(4\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathfrak{Cos}\,8\eta'K} . \dfrac{\mathfrak{Sin}(6\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Sin}(6\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathfrak{Cos}\,12\eta'K} \cdots,$

6. $\mathfrak{B}l'u = \sqrt[4]{((1-k)\,2\sqrt{k})}\;\mathfrak{Cos}\,\eta'u . \dfrac{\mathfrak{Cos}(2\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Cos}(2\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathfrak{Cos}\,4\eta'K}$
$\times \dfrac{\mathfrak{Cos}(4\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Cos}(2\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathfrak{Cos}\,8\eta'K} . \dfrac{\mathfrak{Cos}(6\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Cos}(6\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathfrak{Cos}\,12\eta'K} \cdots,$

7. $\mathfrak{G}l'u = \sqrt[4]{\left(\frac{1+k}{2}.\sqrt{k}\right)} . \dfrac{\mathfrak{Cos}(\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Cos}(\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathfrak{Cos}\,2\eta'K}$
$\times \dfrac{\mathfrak{Cos}(3\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Cos}(3\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathfrak{Cos}\,6\eta'K} . \dfrac{\mathfrak{Cos}(5\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Cos}(5\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathfrak{Cos}\,10\eta'K} \cdots,$

8. $\mathfrak{H}l'u = \sqrt[4]{\left(\frac{1+k}{2}.\sqrt{k}\right)} . \dfrac{\mathfrak{Sin}(\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Sin}(\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathfrak{Cos}\,2\eta'K}$
$\times \dfrac{\mathfrak{Sin}(3\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Sin}(3\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathfrak{Cos}\,6\eta'K} . \dfrac{\mathfrak{Sin}(5\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Sin}(5\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathfrak{Cos}\,10\eta'K} \cdots$

Hiernach lassen sich die Werthe der hyperbolischen Hülfs-Functionen sehr leicht mittelst der Logarithmen berechnen.

Zusatz. Aus den vorstehenden Producten erhält man sofort

9. $\operatorname{sn} u = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\mathfrak{Tang}\,\eta'u . \{\mathfrak{Tang}(2\eta'K+\eta'u).\mathfrak{Tang}(2\eta'K-\eta'u)\}$
$\times \{\mathfrak{Tang}(4\eta'K+\eta'u).\mathfrak{Tang}(4\eta'K-\eta'u)\}$
$\times \{\mathfrak{Tang}(6\eta'K+\eta'u).\mathfrak{Tang}(6\eta'K-\eta'u)\} \cdots$

10. $\operatorname{snc} u = \dfrac{1}{\sqrt{k}} . \{\mathfrak{Tang}(\eta'K+\eta'u)\mathfrak{Tang}(\eta'K-\eta'u)\}$
$\times \{\mathfrak{Tang}(3\eta'K+\eta'u).\mathfrak{Tang}(3\eta'K-\eta'u)\}$
$\times \{\mathfrak{Tang}(5\eta'K+\eta'u).\mathfrak{Tang}(5\eta'K-\eta'u)\} \cdots$

und hiernach lassen sich $\operatorname{sn} u$ und $\operatorname{snc} u$ sehr bequem berechnen.

Ferner ist $\sqrt{k'}\operatorname{tn} u = \operatorname{tang}\eta u\left(\dfrac{\mathfrak{Cos}4\eta K'-\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}4\eta K'+\cos 2\eta u} . \dfrac{\mathfrak{Cos}8\eta K'-\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}8\eta K'+\cos 2\eta u} \cdots\right)$. Nimmt man also auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen und beachtet, dafs $\log\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{b}{a}\right)$ ist, so hat man

11. $\log \operatorname{tn} u = \log\left(\dfrac{\operatorname{tang}\eta u}{\sqrt{k'}}\right) - 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\dfrac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}4\eta K'}\right) - 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\dfrac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}8\eta K'}\right)$
$- 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\dfrac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}12\eta K'}\right) - \cdots$

Eben so findet man noch

12. $\log \operatorname{dn} u = \log\sqrt{k'} + 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\dfrac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}2\eta K'}\right) + 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\dfrac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}6\eta K'}\right)$
$+ 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\dfrac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}10\eta K'}\right) + \cdots$

Statt der Formeln (9.) und (10.) können auch die beiden folgenden genommen werden:

$$13.\quad \log \operatorname{sn} u = \log\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\sqrt{k}}\right) - 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K}\right) - 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta' K}\right) - 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,12\eta' K}\right) \ldots.$$

$$14.\quad \log \operatorname{sne} u = \log\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K}\right) - 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K}\right) - 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,10\eta' K}\right) - \ldots.$$

welche man erhält, wenn man in den beiden Formeln (11.) und (12.) ui für u setzt, und die beiden conjugirten Moduln mit einander vertauscht. Die Formeln (9.) bis (14.) sind wegen ihrer raschen Convergenz merkwürdig.

§. 188.

Entwickelung der acht Hülfs-Functionen in Reihen, welche nach Potenzial-Functionen des vervielfachten Argumentes fortschreiten.

Es ist nach §. 170. die Function

$$\frac{\mathfrak{Gl}' u}{g'} = (1 + 2p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + p^4)(1 + 2p^6\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + p^{12})(1 + 2p^{10}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + p^{20}) \ldots.$$

Setzt man wieder $e^{\eta' u} = x$, also $2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u = x^2 + x^{-2}$, so ist

$$\frac{\mathfrak{Gl}' u}{g'} = \{(1 + p^2x^2)(1 + p^6x^2)(1 + p^{10}x^2) \ldots.\}.\{(1 + p^2x^{-2})(1 + p^6x^{-2})(1 + p^{10}x^{-2}) \ldots.\}.$$

Entwickelt man das Product $(1 + p^2x^2)(1 + p^6x^2)(1 + p^2x^2) \ldots.$ nach steigenden Potenzen von x^2, so sind in der gefundenen Reihe alle Coefficienten positiv, und setzt man in ihr x^{-2} für x^2, so erhält man eine ähnliche Reihe, welche nach Potenzen von x^{-2} fortschreitet, und das Product beider Reihen hat also die Form

$$\mathfrak{Gl}' u = a + \overset{1}{a}(x^2 + x^{-2}) + \overset{2}{a}(x^4 + x^{-4}) + \overset{3}{a}(x^6 + x^{-6}) \ldots.$$

in welcher die unbekannten Coefficienten $a, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$ etc., welche von x unabhängig sind, zu ermitteln übrig bleiben. Man kann leicht eine Recursions-Formel zur Berechnung dieser Coefficienten ermitteln. Nach §. 173. ist $\mathfrak{Gl}'(u + 2K) = e^{\lambda(u+2K)^2 - \lambda u^2}.\mathfrak{Gl}' u$, wenn $\lambda = \frac{\pi}{4KK'}$, gesetzt wird; da aber $(u + 2K)^2 - u^2 = 4uK + 4K^2$, also $\lambda(u + 2K)^2 - \lambda u^2 = 2\eta'(K + u)$, folglich $e^{\lambda(u+2K)^2 - \lambda u^2} = e^{2\eta' K}.e^{2\eta' u} = \frac{x^2}{p^2}$ ist, so ist

$$\mathfrak{Gl}'(u + 2K) = \frac{x^2}{p^2}.\mathfrak{Gl}' u.$$

Setzt man $u+2K$ statt u, so verwandelt sich $x=e^{\eta' u}$ in $e^{\eta' u}.e^{2\eta' K}$ oder x in $\frac{x}{p^2}$; daher ist

$$\mathfrak{Gl}'(u+2K) = a + \frac{\overset{1}{a}}{p^4}x^2 + \frac{\overset{2}{a}}{p^8}x^4 + \frac{\overset{3}{a}}{p^{12}}x^6 + \dots$$
$$+\overset{1}{a}p^4x^{-2} + \overset{2}{a}p^8x^{-4} + \overset{3}{a}p^{12}x^{-6} + \dots,$$

und da $p^2.\mathfrak{Gl}'(u+2K) = x^2.\mathfrak{Gl}'u$ sein soll, so ist

$$\left.\begin{array}{l} \overset{1}{a} + ax^2 + \overset{1}{a}x^4 + \overset{2}{a}x^6 + \overset{3}{a}x^8 \dots \\ +\overset{2}{a}x^{-2} + \overset{3}{a}x^{-4} + \overset{4}{a}x^{-6} + \overset{5}{a}x^{-8} \dots \end{array}\right\}$$
$$= \left\{\begin{array}{l} ap^2 + \frac{\overset{1}{a}}{p^2}x^2 + \frac{\overset{2}{a}}{p^6}x^4 + \frac{\overset{3}{a}}{p^{10}}x^6 + \frac{\overset{4}{a}}{p^{14}}x^8 + \dots \\ +\overset{1}{a}p^6x^{-2} + \overset{2}{a}p^{10}x^{-4} + \overset{3}{a}p^{14}x^{-6} + \overset{4}{a}p^{18}x^{-8} + \dots \end{array}\right.$$

Diese Gleichung muſs in eine Identität übergehen. Identificiren wir die beiden oberen Horizontal-Reihen, und setzen also

$$\overset{1}{a} = a.p^2,\quad \overset{2}{a} = \overset{1}{a}.p^6,\quad \overset{3}{a} = \overset{2}{a}.p^{10},\quad \overset{4}{a} = \overset{3}{a}.p^{14} \text{ u. s. w.}$$

so sind von selbst auch die beiden unteren Horizontal-Reihen und also die ganzen Reihen selbst identisch. Aus den gefundenen Gleichungen können die unbekannten Coefficienten, mit Ausnahme des ersten a, welchen wir durch $\varphi(k')$ bezeichnen wollen, weil er nur von dem Modul k' abhängt, leicht berechnet werden. Wir erhalten durch Zusammensetzung:

$$\overset{1}{a} = p^2.\varphi(k'),\ \overset{2}{a} = p^8.\varphi(k'),\ \overset{3}{a} = p^{18}.\varphi(k'),\ \overset{4}{a} = p^{32}.\varphi(k'),\ \text{u. s. w.}$$

Der allgemeine Ausdruck dieser Coefficienten ist

$$\overset{n}{a} = p^{2nn}.\varphi(k').$$

Werden die gefundenen Werthe substituirt, so hat man

$$\frac{\mathfrak{Gl}'u}{\varphi(k')} = 1+p^2(x^2+x^{-2}) + p^8(x^4+x^{-4}) + p^{18}(x^6+x^{-6}) + p^{32}(x^8+x^{-8}) + \dots$$

oder

$$\frac{\mathfrak{Gl}'u}{\varphi(k')} = 1+2p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u + 2p^8\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u + 2p^{18}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'u + 2p^{32}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta'u + \dots$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist $2p^{\frac{nn}{2}}.\mathfrak{Cos}(n\eta'u)$, wenn durch n eine gerade Zahl bezeichnet wird. Da $\mathfrak{Gl}'(u+iK') = \mathfrak{Hl}'u$ ist, und $\eta'u$ sich in $\eta'u+\frac{\pi i}{2}$ verwandelt, wenn $u+iK'$ statt u gesetzt wird, so erhalten wir noch

$$\frac{\mathfrak{Hl}'u}{\varphi(k')} = 1-2p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u + 2p^8\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u - 2p^{18}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'u + 2p^{32}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta'u - + \dots$$

Vertauschen wir in diesen Formeln die beiden conjugirten Moduln mit einander, wodurch sich $\Phi(k')$ in $\Phi(k)$ verwandelt, und setzen wir ui statt u, so erhalten wir

$$\frac{\mathrm{Gl}\,u}{\varphi(k)} = 1 + 2p^2\cos 2\eta u + 2q^8\cos 4\eta u + 2q^{18}\cos 6\eta u + 2q^{32}\cos 8\eta u + \ldots,$$

$$\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\varphi(k)} = 1 - 2q^2\cos 2\eta u + 2q^8\cos 4\eta u - 2q^{18}\cos 6\eta u + 2q^{32}\cos 8\eta u - + \ldots$$

Setzen wir in diesen beiden Reihen $u = o$, so erhalten wir

$$\frac{1}{\varphi(k)} = 1 + 2q^2 + 2q^8 + 2q^{18} + 2q^{32} + 2q^{50} + 2q^{72} + \ldots,$$

$$\frac{\sqrt{k'}}{\varphi(k)} = 1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - 2q^{50} + 2q^{72} - + \ldots$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man

$$\frac{1+\sqrt{k'}}{2\varphi(k)} = 1 + 2q^8 + 2q^{32} + 2q^{72} + \ldots$$

Dieselbe Reihe findet man, wenn man in der Reihe für $\frac{1}{\varphi(k)}$ q^4 statt q setzt, und also §. 168. gemäfs den Modul k zweimal nach einander verkleinert.

Setzen wir aber $k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$, also $k_1' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$; ferner $k_2 = \frac{1-k_1'}{1+k_1'} = \left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2$, so ist $\frac{1+\sqrt{k'}}{2\varphi(k)} = \frac{1}{\varphi(k_2)}$. Bezeichnen wir die zu den Moduln k, k_1, k_2 gehörigen Modular-Quadranten mit K, K_1, K_2, wie in §. 55., so ist $K_1 = \frac{1+k'}{2}.K$ und $K_2 = \frac{1+k_1'}{2}.K_1 = \frac{(1+\sqrt{k'})^2}{2(1+k')}.K_1$, also $K_2 = \frac{(1+\sqrt{k'})^2}{4}.K$, oder

$$\sqrt{K_2} = \frac{1+\sqrt{k'}}{2}\sqrt{K}.$$

Wird diese Gleichung mit der vorigen verbunden, so erhält man

$$\Phi(k).\sqrt{K} = \Phi(k_2).\sqrt{K_2}.$$

Wird die Verkleinerung des Moduls weiter fortgesetzt, so ist überhaupt $\Phi(k).\sqrt{K} = \Phi(k_{2r}).\sqrt{K_{2r}}$, und wird r grofs genug genommen, so ist $k_{2r} = o$, also $K_{2r} = \frac{1}{2}\pi$, folglich ist $\Phi(k).\sqrt{K_2} = \Phi(o).\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$. Da nun

$$\frac{1}{\varphi(k_{2r})} = 1 + 2q^{4r} + 2q^{16r} + \ldots = 1$$

wird, so ist

$$\Phi(k).\sqrt{K} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi} \quad \text{oder} \quad \Phi(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2K}} = \sqrt{\eta} \quad \text{und} \quad \Phi(k') = \sqrt{\eta'}.$$

Hiernach ist also

$$1.\quad \sqrt{K} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}\,.(1+2q^2+2q^8+2q^{18}+2q^{32}+2q^{50}+2q^{72}+\ldots\ldots+2q^{2nn}\ldots\ldots),$$

$$2.\quad \sqrt{(k'K)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}\,.(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-2q^{50}+2q^{72}-+\ldots\ldots+(-1)^n.2q^{2nn}\ldots\ldots),$$

$$3.\quad \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{l}'u}{\sqrt{\eta'}} = 1+2p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+2p^8\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u+2p^{18}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'u+2p^{32}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta'u+2p^{50}\,\mathfrak{Cos}\,10\eta'u+\ldots\ldots,$$

$$4.\quad \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{l}'u}{\sqrt{\eta'}} = 1-2p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+2p^8\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-2p^{18}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'u+2p^{32}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta'u-2p^{50}\,\mathfrak{Cos}\,10\eta'u+\ldots\ldots,$$

$$5.\quad \frac{\mathrm{Gl}\,u}{\sqrt{\eta}} = 1+2q^2\cos 2\eta u+2q^8\cos 4\eta u+2q^{18}\cos 6\eta u+2q^{32}\cos 8\eta u+2q^{50}\cos 10\eta u+\ldots\ldots,$$

$$6.\quad \frac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{\eta}} = 1-2q^2\cos 2\eta u+2q^8\cos 4\eta u-2q^{18}\cos 6\eta u+2q^{32}\cos 8\eta u-2q^{50}\cos 10\eta u+-\ldots\ldots$$

Zusatz. Aus den Formeln (1.) und (2.) folgt durch Division:

$$\sqrt{k'} = \frac{1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-+\ldots\ldots}{1+2q^2+2q^8+2q^{18}+3q^{32}+\ldots\ldots}.$$

Nimmt man statt des Moduls k, dem §. 168. gemäfs, den nächst gröfseren, indem man $\sqrt{q}$ statt q setzt, so hat man $\frac{1-k}{1+k}$ für k' zu setzen, und es ist also

$$\sqrt{\frac{1-k}{1+k}} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-+\ldots\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\ldots\ldots}.$$

Setzt man nun $k=\sin\theta$, und nimmt auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen, so erhält man die merkwürdige Formel

$$7.\quad \mathfrak{L}\theta = 2\,\mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{2q+2q^9+2q^{25}+2q^{49}+2q^{81}+\ldots\ldots}{1+2q^4+2q^{16}+2q^{36}+2q^{64}+2q^{100}+\ldots\ldots}\right).$$

Setzt man aber noch $\frac{ik}{k'} = i\,\mathrm{tang}\,\theta$ statt k, also qi statt q, so erhält man

$$8.\quad \theta = 2\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{2q+2q^9+2q^{25}+2q^{49}+2q^{81}+\ldots\ldots}{1+2q^4+2q^{16}+2q^{36}+2q^{64}+2q^{100}+\ldots\ldots}\right).$$

Diese Formel ist jedoch von der vorigen kaum verschieden, da bekanntlich $\mathfrak{Tang}\,\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}\theta = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\theta$ ist.

§. 189.

Die nach Functionen des vervielfachten Arcus $\eta'u$ fortschreitenden Reihen für $\mathfrak{B}\mathfrak{l}'u$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{l}'u$ lassen sich leicht aus den früheren herleiten. Nach §. 173. ist

$$\mathfrak{G}\mathfrak{l}'(K-u) = e^{\eta'(\frac{1}{2}K-u)}.\,\mathfrak{B}\mathfrak{l}'u,\quad \text{oder auch}\quad \mathfrak{G}\mathfrak{l}'(K-u) = \frac{1}{x\sqrt{p}}.\,\mathfrak{B}\mathfrak{l}'u,$$

folglich

$$\mathfrak{B}\mathfrak{l}'u = x\sqrt{p}\,.\,\mathfrak{G}\mathfrak{l}'(K-u).$$

Setzt man aber in der Reihe

$$\frac{\mathfrak{Gl}'u}{\sqrt{\eta'}} = 1 + p^2(x^2 + x^{-2}) + p^8(x^4 + x^{-4}) + p^{18}(x^6 + x^{-6}) + \ldots.$$

wirklich $K - u$ statt u, also $\frac{1}{px}$ statt x, so erhält man

$$\frac{\mathfrak{Gl}'(K-u)}{\sqrt{\eta'}} = 1 + \begin{array}{l} x^{-2} + p^4 x^{-4} + p^{12} x^{-6} + p^{24} x^{-8} + \ldots. \\ p^4 x^2 + p^{12} x^4 + p^{24} x^6 + p^{40} x^8 + \ldots., \end{array}$$

also

$$\frac{\mathfrak{Bl}'u}{\sqrt{\eta'}} = x\sqrt{p}.\frac{\mathfrak{Gl}'(K-u)}{\sqrt{\eta'}} = \begin{array}{l} p^{\frac{1}{2}}x + p^{\frac{9}{2}}x^3 + p^{\frac{25}{2}}x^5 + p^{\frac{49}{2}}x^7 + \ldots. \\ + p^{\frac{1}{2}}x^{-1} + p^{\frac{9}{2}}x^{-3} + p^{\frac{25}{2}}x^{-5} + p^{\frac{49}{2}}x^{-7} + \ldots., \end{array}$$

oder

$$1.\quad \frac{\mathfrak{Bl}'u}{\sqrt{\eta'}} = 2p^{\frac{1}{2}}\mathfrak{Cos}\,\eta'u + 2p^{\frac{9}{2}}\mathfrak{Cos}\,3\eta'u + 2p^{\frac{25}{2}}\mathfrak{Cos}\,5\eta'u + 2p^{\frac{49}{2}}\mathfrak{Cos}\,7\eta'u + \ldots.$$

Setzt man in dieser Reihe noch $u + iK'$ statt u, also $\eta'u + \frac{1}{2}\pi i$ statt $\eta'u$, und erinnert sich, dafs nach §. 170. $\mathfrak{Bl}'(u + iK') = i.\mathfrak{Al}'u$ ist, so erhält man

$$2.\quad \frac{\mathfrak{Al}'u}{\sqrt{\eta'}} = 2p^{\frac{1}{2}}\mathfrak{Sin}\,\eta'u - 2p^{\frac{9}{2}}\mathfrak{Sin}\,3\eta'u + 2p^{\frac{25}{2}}\mathfrak{Sin}\,5\eta'u - 2p^{\frac{49}{2}}\mathfrak{Sin}\,7\eta'u + - \ldots.$$

Für die cyklischen Functionen erhält man hieraus sogleich

$$3.\quad \frac{\mathrm{Bl}\,u}{\sqrt{\eta}} = 2q^{\frac{1}{2}}\cos\eta u + 2q^{\frac{9}{2}}\cos 3\eta u + 2q^{\frac{25}{2}}\cos 5\eta u + 2q^{\frac{49}{2}}\cos 7\eta u + 2q^{\frac{81}{2}}\cos 9\eta u + \ldots.,$$

$$4.\quad \frac{\mathrm{Al}\,u}{\sqrt{\eta}} = 2q^{\frac{1}{2}}\sin\eta u - 2q^{\frac{9}{2}}\sin 3\eta u + 2q^{\frac{25}{2}}\sin 5\eta u - 2q^{\frac{49}{2}}\sin 7\eta u + 2q^{\frac{81}{2}}\sin 9\eta u - + \ldots.$$

Setzt man in der Reihe (3.) noch $u = o$, so erhält man

$$5.\quad \sqrt{(kK)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}.(2q^{\frac{1}{2}} + 2q^{\frac{9}{2}} + 2q^{\frac{25}{2}} + 2q^{\frac{49}{2}} + 2q^{\frac{81}{2}} + \ldots), \text{ also}$$

$$6.\quad \sqrt{\tang\theta} = \sqrt{\frac{k}{k'}} = \frac{2q^{\frac{1}{2}} + 2q^{\frac{9}{2}} + 2q^{\frac{25}{2}} + 2q^{\frac{49}{2}} + 2q^{\frac{81}{2}} + \ldots.}{1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - 2q^{50} + 2q^{72} - + \ldots.}.$$

Zusatz. Da $g' = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{(kk')}}{2\sqrt{p}}}$ ist, so ist $\frac{\sqrt{\eta'}}{g'} = \sqrt[6]{\frac{\eta'^3.p}{kk'}}$, und also

$$\frac{\sqrt{\eta'}}{g'} = \frac{1}{(1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})(1-p^{16})\ldots.}.$$

Multiplicirt man hiermit die Gleichungen (3.) und (4.) §. 188. und die Gleichungen (1.) und (2.) §. 189., so hat man, wenn man für $\frac{\mathfrak{Al}'u}{g'}$, $\frac{\mathfrak{Bl}'u}{g'}$, $\frac{\mathfrak{Gl}'u}{g'}$, $\frac{\mathfrak{Hl}'u}{g'}$ die Werthe aus §. 170., ferner $\frac{u}{\eta'}$ statt u setzt, die folgenden vier Gleichungen:

7. $2\sqrt{p}.\mathfrak{Sin}\,u(1-2p^4\mathfrak{Cos}2u+p^8)(1-2p^8\mathfrak{Cos}2u+p^{16})(1-2p^{12}\mathfrak{Cos}2u+p^{24})\ldots$
$$= \frac{2p^{\frac{1}{4}}\mathfrak{Sin}\,u-2p^{\frac{9}{4}}\mathfrak{Sin}\,3u+2p^{\frac{25}{4}}\mathfrak{Sin}\,5u-2p^{\frac{49}{4}}\mathfrak{Sin}\,7u+-\ldots}{(1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})(1-p^{16})\ldots},$$

8. $2\sqrt{p}.\mathfrak{Cos}\,u(1+2p^4\mathfrak{Cos}2u+p^8)(1+2p^8\mathfrak{Cos}2u+p^{16})(1+2p^{12}\mathfrak{Cos}2u+p^{24})\ldots$
$$= \frac{2p^{\frac{1}{4}}\mathfrak{Cos}\,u+2p^{\frac{9}{4}}\mathfrak{Cos}\,3u+2p^{\frac{25}{4}}\mathfrak{Cos}\,5u+2p^{\frac{49}{4}}\mathfrak{Cos}\,7u+\ldots}{(1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})(1-p^{16})\ldots},$$

9. $(1+2p^2\mathfrak{Cos}\,2u+p^4)(1+2p^6\mathfrak{Cos}\,2u+p^{12})(1+2p^{10}\mathfrak{Cos}\,2u+p^{20})\ldots$
$$= \frac{1+2p^2\mathfrak{Cos}\,2u+2p^8\mathfrak{Cos}\,4u+2p^{18}\mathfrak{Cos}\,6u+2p^{32}\mathfrak{Cos}\,8u+\ldots}{(1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})(1-p^{16})\ldots},$$

10. $(1-2p^2\mathfrak{Cos}\,2u+p^4)(1-2p^6\mathfrak{Cos}\,2u+p^{12})(1-2p^{10}\mathfrak{Cos}\,2u+p^{20})\ldots$
$$= \frac{1-2p^2\mathfrak{Cos}\,2u+2p^8\mathfrak{Cos}\,4u-2p^{18}\mathfrak{Cos}\,6u+2p^{32}\mathfrak{Cos}\,8u-+\ldots}{(1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})(1-p^{16})\ldots},$$

in welchen p und u beliebige von einander unabhängige Gröfsen sind, und wodurch eben so viele allgemeine Entwickelungs-Theoreme ausgedrückt werden.

§. 190.

Entwickelung particulärer Formeln, welche sich auf die Hülfs-Functionen beziehen.

Es ist $\text{Hl}(K-u) = \text{Gl}\,u$ und $\text{Gl}\,u = \frac{\text{dn}\,u}{\sqrt{k'}}.\text{Hl}\,u$; also ist $\text{Hl}(K-u) = \frac{\text{dn}\,u}{\sqrt{k'}}.\text{Hl}\,u$. Setzt man hierin $\frac{1}{2}K-u$ statt u, so erhält man $\text{Hl}(\frac{1}{2}K+u) = \frac{\text{dn}(\frac{1}{2}K-u)}{\sqrt{k'}}.\text{Hl}(\frac{1}{2}K-u)$. Da $\text{dn}(\frac{1}{2}K-u).\text{dn}(\frac{1}{2}K+u) = k'$ ist, so ist $\frac{\text{dn}(\frac{1}{2}K-u)}{\sqrt{k'}} = \sqrt{\frac{\text{dn}(\frac{1}{2}K-u)}{\text{dn}(\frac{1}{2}K+u)}}$, folglich
$$\sqrt{\frac{\text{Hl}(\frac{1}{2}K+u)}{\text{Hl}(\frac{1}{2}K-u)}} = \sqrt[4]{\frac{\text{dn}(\frac{1}{2}K-u)}{\text{dn}(\frac{1}{2}K+u)}}.$$
Da überhaupt $\frac{\text{dn}(a-b)}{\text{dn}(a+b)} = \frac{1+k^2\,\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a\,\text{sn}\,b\,\text{snc}\,b}{1-k^2\,\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a\,\text{sn}\,b\,\text{snc}\,b}$ ist, so reducirt sich das obige Verhältnifs, wenn man $b=u$, und $a=\frac{1}{2}K$, also $\text{sn}\,a = \text{snc}\,a = \sqrt{\frac{1}{1+k'}}$, also $k^2\,\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a = \frac{1-k'^2}{1+k'} = 1-k'$ setzt, auf
$$\sqrt{\frac{\text{Hl}(\frac{1}{2}K+u)}{\text{Hl}(\frac{1}{2}K-u)}} = \sqrt[4]{\frac{1+(1-k')\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u}{1-(1-k')\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u}}.$$
Nimmt man nun auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen, so erhält man

1. $\log\sqrt{\frac{\text{Hl}(\frac{1}{2}K+u)}{\text{Hl}(\frac{1}{2}K-u)}} = \log\sqrt{\frac{\text{Gl}(\frac{1}{2}K-u)}{\text{Gl}(\frac{1}{2}K+u)}} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}((1-k')\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u)$ und

$$2.\quad \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K+ui)}{\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K-ui)}} = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{Gl}(\frac{1}{2}K-ui)}{\mathrm{Gl}(\frac{1}{2}K+ui)}} = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctang}\left((1-k')\frac{\mathrm{tn}'u}{\mathrm{dn}'u}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\operatorname{arctang}\left(\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}\cdot\frac{\mathrm{cnc}'u}{\mathrm{cn}'u}\right).$$

Nach §. 185. ist

$$\log\mathfrak{Bl}'(\tfrac{1}{2}K+u) = \log\mathrm{Hl}(\tfrac{1}{2}K+u) + \frac{\pi(\frac{1}{2}K+u)^2}{4KK'},$$

und wird hiervon die Gleichung

$$\log\mathfrak{Bl}'(\tfrac{1}{2}K-u) = \log\mathrm{Hl}(\tfrac{1}{2}K-u) + \frac{\pi(\frac{1}{2}K-u)^2}{4KK'}$$

subtrahirt, so entsteht

$$\log\frac{\mathfrak{Bl}'(\frac{1}{2}K+u)}{\mathfrak{Bl}'(\frac{1}{2}K-u)} = \log\frac{\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K+u)}{\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K-u)} + \frac{\pi u}{2K'};$$

daher ist

$$3.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}'(\frac{1}{2}K+u)}{\mathfrak{Bl}'(\frac{1}{2}K-u)}} = \frac{\eta' u}{2} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{ArcTang}\left((1-k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u\right)$$

und

$$4.\quad \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}'(\frac{1}{2}K+ui)}{\mathfrak{Bl}'(\frac{1}{2}K-ui)}} = \frac{\eta' u}{2} + \operatorname{arctang}\left(\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}\cdot\frac{\mathrm{cnc}'u}{\mathrm{cn}'u}\right).$$

Nach den Formeln (3.) §. 170. ist

$$\log\mathfrak{Bl}'(\tfrac{1}{2}K+u) = \eta' u + \log\mathfrak{Gl}'(\tfrac{1}{2}K-u)$$

und

$$\log\mathfrak{Bl}'(\tfrac{1}{2}K-u) = -\eta' u + \log\mathfrak{Gl}'(\tfrac{1}{2}K+u);$$

daher ist

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}'(\frac{1}{2}K+u)}{\mathfrak{Bl}'(\frac{1}{2}K-u)}} = \eta' u + \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}'(\frac{1}{2}K-u)}{\mathfrak{Gl}'(\frac{1}{2}K+u)}},$$

folglich

$$5.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}'(\frac{1}{2}K-u)}{\mathfrak{Gl}'(\frac{1}{2}K+u)}} = -\frac{\eta' u}{2} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{ArcTang}\left((1-k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u\right) \text{ und}$$

$$6.\quad \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}'(\frac{1}{2}K-ui)}{\mathfrak{Gl}'(\frac{1}{2}K+ui)}} = -\frac{\eta' u}{2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctang}\left(\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}\cdot\frac{\mathrm{cnc}'u}{\mathrm{cn}'u}\right).$$

Es ist $\mathrm{Al}(K-u) = \mathrm{Bl}\,u$ und $\mathrm{Bl}\,u = \frac{\mathrm{Al}\,u}{\sqrt{k'}.\mathrm{tn}\,u}$, also ist $\mathrm{Al}(K-u) = \frac{1}{\sqrt{k'}.\mathrm{tn}\,u}.\mathrm{Al}\,u$, also $\mathrm{Al}(\frac{1}{2}K+u) = \sqrt{k'}.\mathrm{tn}(\frac{1}{2}K+u).\mathrm{Al}(\frac{1}{2}K-u) = \frac{1}{\sqrt{k'}.\mathrm{tn}(\frac{1}{2}K-u)}.\mathrm{Al}(\frac{1}{2}K-u)$, oder auch

$$\frac{\mathrm{Al}(\frac{1}{2}K+u)}{\mathrm{Al}(\frac{1}{2}K-u)} = \sqrt{\frac{\mathrm{tn}(\frac{1}{2}K+u)}{\mathrm{tn}(\frac{1}{2}K-u)}}.$$

Zieht man auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus und nimmt die Logarithmen, so hat man nach Formel (22.) §. 37.

$$\log\sqrt{\frac{\mathrm{Al}(\frac{1}{2}K+u)}{\mathrm{Al}(\frac{1}{2}K-u)}} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,u\,.\,\mathrm{snc}\,u}{\mathrm{sn}\,a\,.\,\mathrm{snc}\,a}\right) \quad \text{für} \quad a = \tfrac{1}{2}K.$$

Da aber $\mathrm{sn}\,a = \mathrm{snc}\,a = \sqrt{\frac{1}{1+k'}}$ ist, so erhalten wir

7. $\log\sqrt{\frac{\mathrm{Al}(\frac{1}{2}K+u)}{\mathrm{Al}(\frac{1}{2}K-u)}} = \log\sqrt{\frac{\mathrm{Bl}(\frac{1}{2}K-u)}{\mathrm{Bl}(\frac{1}{2}K+u)}} = \frac{1}{2}\mathfrak{ArcTang}((1+k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u)$,

also

8. $\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{Al}(\frac{1}{2}K+ui)}{\mathrm{Al}(\frac{1}{2}K-ui)}} = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{Bl}(\frac{1}{2}K-ui)}{\mathrm{Bl}(\frac{1}{2}K+ui)}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}\cdot\frac{\mathrm{cnc}'u}{\mathrm{cn}'u}\right)$

$= \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left((1+k')\cdot\frac{\mathrm{tn}'u}{\mathrm{dn}'u}\right)$.

Nach §. 185. ist

$$\log\mathfrak{Al}'(\tfrac{1}{2}K+u) = \frac{\pi}{4KK'}\cdot(\tfrac{1}{2}K+u)^2 + \log\mathrm{Al}(\tfrac{1}{2}K+u).$$

Hieraus folgt

$$\log\frac{\mathfrak{Al}'(\frac{1}{2}K+u)}{\mathfrak{Al}'(\frac{1}{2}K-u)} = \eta'u + \log\frac{\mathrm{Al}(\frac{1}{2}K+u)}{\mathrm{Al}(\frac{1}{2}K-u)};$$

also ist

9. $\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}'(\frac{1}{2}K+u)}{\mathfrak{Al}'(\frac{1}{2}K-u)}} = \frac{\eta'u}{2} + \frac{1}{2}\mathfrak{ArcTang}((1+k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u)$

und

10. $\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}'(\frac{1}{2}K+ui)}{\mathfrak{Al}'(\frac{1}{2}K-ui)}} = \frac{\eta'u}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}\cdot\frac{\mathrm{cnc}'u}{\mathrm{cn}'u}\right)$.

Da nach §. 170. $\log\mathfrak{Al}'(\frac{1}{2}K+u) = \eta'u + \log\mathfrak{Hl}'(\frac{1}{2}K-u)$ ist, so ist

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}'(\frac{1}{2}K+u)}{\mathfrak{Al}'(\frac{1}{2}K-u)}} = \eta'u + \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}'(\frac{1}{2}K-u)}{\mathfrak{Hl}'(\frac{1}{2}K+u)}},$$

und also

11. $\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}'(\frac{1}{2}K-u)}{\mathfrak{Hl}'(\frac{1}{2}K+u)}} = -\frac{\eta'u}{2} + \frac{1}{2}\mathfrak{ArcTang}((1+k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u)$

und

12. $\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}'(\frac{1}{2}K-ui)}{\mathfrak{Hl}'(\frac{1}{2}K+ui)}} = -\frac{\eta'u}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}\cdot\frac{\mathrm{cnc}'u}{\mathrm{cn}'u}\right)$.

In §. 187. wurden schon die Werthe

13. $\begin{cases} \mathrm{Al}\,\frac{1}{2}K = \mathrm{Bl}\,\frac{1}{2}K = \sqrt[4]{\left(\frac{1-k'}{2}\sqrt{k'}\right)}, \\ \mathrm{Gl}\,\frac{1}{2}K = \mathrm{Hl}\,\frac{1}{2}K = \sqrt[4]{\left(\frac{1+k'}{2}\cdot\sqrt{k'}\right)} \end{cases}$

ermittelt. Setzen wir nun in den Formeln (2.) §. 185. das Argument $u=\frac{1}{2}K$, so erhalten wir

14. $\begin{cases} \mathfrak{Bl}'\,\frac{1}{2}K = \mathfrak{Gl}'\,\frac{1}{2}K = e^{\frac{\eta'K}{8}}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{1+k'}{2}\cdot\sqrt{k'}\right)} \text{ und} \\ \mathfrak{Al}'\,\frac{1}{2}K = \mathfrak{Hl}'\,\frac{1}{2}K = e^{\frac{\eta'K}{8}}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{1-k'}{2}\cdot\sqrt{k'}\right)}. \end{cases}$

Wir entwickeln nun der Vollständigkeit wegen auch noch die Differential-Verhältnisse der Logarithmen der Hülfs-Functionen des Argumentes u für den besonderen Werth $u=\frac{1}{2}K$. Ist $u=\frac{1}{2}K$, so ist nach §. 66. $\mathrm{el}\,u =$

$\text{elc}\,u = \frac{1}{2}E + \frac{1-k'}{2}$. Setzen wir nun auch in den Formeln (1.) bis (4.) §. 184. das Argument $u = \frac{1}{2}K$, so erhalten wir für $u = \frac{1}{2}K$:

$$15.\quad \begin{cases} \frac{\partial \log \text{Al}\,u}{\partial u} = \frac{1}{2}E + \frac{1-k'}{2} - \frac{1}{2}E + k' = \frac{1+k'}{2}, \\ \frac{\partial \log \text{Bl}\,u}{\partial u} = \frac{1}{2}E + \frac{1-k'}{2} - \frac{1}{2}E - 1 = -\frac{1+k'}{2}, \\ \frac{\log \text{Gl}\,u}{\partial u} = \frac{1}{2}E + \frac{1-k'}{2} - \frac{1}{2}E - \frac{k^2}{1+k'} = -\frac{1-k'}{2}, \\ \frac{\partial \log \text{Hl}\,u}{\partial u} = \frac{1}{2}E + \frac{1-k'}{2} - \frac{1}{2}E = \frac{1-k'}{2} \end{cases}$$

Wird auch in den Formeln (5.) bis (8.) §. 206. das Argument $u = \frac{1}{2}K$ genommen, so entstehen die Gleichungen

$$16.\quad \begin{cases} \frac{\partial \log \mathfrak{A}\text{l}'u}{\partial u} = \frac{1+k'}{2} + \frac{1}{2}\eta', & \frac{\partial \log \mathfrak{G}\text{l}'u}{\partial u} = -\frac{1-k'}{2} + \frac{1}{2}\eta', \\ \frac{\partial \log \mathfrak{B}\text{l}'u}{\partial u} = \frac{1-k'}{2} + \frac{1}{2}\eta', & \frac{\partial \log \mathfrak{H}\text{l}'u}{\partial u} = -\frac{1+k'}{2} + \frac{1}{2}\eta', \end{cases}$$

wenn man beachtet, dafs $1 - \frac{E'}{K'} = \frac{E}{K} - \frac{\pi}{2KK'} = \frac{E}{K} - \frac{\eta'}{K}$ ist.

§. 191.

Allgemeine Relationen zwischen den Hülfs-Functionen mehrtheiliger Argumente und den Functionen der Theile.

$$\text{lm}(a+b) + \text{lm}(a-b) = 2\,\text{lm}\,a + 2\,\text{lm}\,b + \log(1 - k^2\,\text{sn}^2 a\,\text{sn}^2 b).$$

Substituirt man die nach Formel (5.) §. 183. bestimmten Werthe der Modular-Logarithmen in dieser Formel, so erhält man

$$\frac{E}{K}\left\{\frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}\right\} + \log\left\{\frac{\text{Hl}(a+b).\text{Hl}(a-b)}{k'}\right\}$$
$$= \frac{E}{K}(a^2+b^2) + \log\left\{\frac{\text{Hl}^2 a.\text{Hl}^2 b}{k'^2}\right\} + \log(1 - k^2\,\text{sn}^2 a\,\text{sn}^2 b),$$

und diese Gleichung reducirt sich auf

$$1.\quad \begin{cases} \text{Hl}(a+b).\text{Hl}(a-b) = \frac{\text{Hl}^2 a.\text{Hl}^2 b}{k'}.(1 - k^2\,\text{sn}^2 a\,\text{sn}^2 b) \text{ oder} \\ \text{Hl}(a+b).\text{Hl}(a-b) = \frac{\text{Hl}^2 a.\text{Hl}^2 b - \text{Al}^2 a.\text{Al}^2 b}{k'}. \end{cases}$$

Setzt man in dieser Formel $K - a$ statt a, so verwandelt sie sich zunächst in $\text{Gl}(a+b).\text{Gl}(a-b) = \frac{\text{Gl}^2 a.\text{Hl}^2 b - \text{Bl}^2 a.\text{Al}^2 b}{k'}$. Substituirt man hierin, dem Zusatze zu §. 171. gemäfs, die Werthe $\text{Hl}^2 b = k'.\text{Gl}^2 b + k.\text{Al}^2 b$ und $\text{Bl}^2 a = k.\text{Gl}^2 a - k'.\text{Al}^2 a$, so erhält man die einfachere Formel

$$2. \quad \begin{cases} \mathrm{Gl}(a+b).\mathrm{Gl}(a-b) = \mathrm{Gl}^2 a.\mathrm{Gl}^2 b + \mathrm{Al}^2 a.\mathrm{Al}^2 b, \\ \mathrm{Gl}(a+b).\mathrm{Gl}(a-b) = \mathrm{Gl}^2 a.\mathrm{Gl}^2 b\left(1+\frac{k'^2}{k^2}\,\mathrm{cnc}^2 a.\mathrm{cnc}^2 b\right). \end{cases}$$

Da $\mathrm{lm}(a \pm b) = \left(1-\frac{E'}{K'}\right).\frac{(a\pm b)^2}{2} + \log\left(\frac{\mathfrak{Bl}'(a\pm b)}{\sqrt{k'}}\right)$ ist, so findet man, wie die Formel (1.) gefunden wurde, noch

$$\mathfrak{Bl}'(a+b).\mathfrak{Bl}'(a-b) = \frac{\mathfrak{Bl}'^2 a.\mathfrak{Bl}'^2 b}{k'}.(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b).$$

Vertauscht man hierin die beiden conjugirten Modulu mit einander, so entsteht, wenn ai statt a und bi statt b gesetzt wird,

$$3. \quad \begin{cases} \mathrm{Bl}(a+b).\mathrm{Bl}(a-b) = \frac{\mathrm{Bl}^2 a.\mathrm{Bl}^2 b - \mathrm{Al}^2 a.\mathrm{Al}^2 b}{k} \quad \text{oder} \\ \mathrm{Bl}(a+b).\mathrm{Bl}(a-b) = \frac{\mathrm{Bl}^2 a.\mathrm{Bl}^2 b}{k}.(1-k'^2.\mathrm{tn}^2 a\,\mathrm{tn}^2 b). \end{cases}$$

Es kann diese Formel auch leicht aus der Formel (1.) hergeleitet werden. Es ist nach §. 171.

$$\frac{\mathrm{Bl}(a+b).\mathrm{Bl}(a-b)}{\mathrm{Hl}(a+b).\mathrm{Hl}(a-b)} = \frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}(a+b).\mathrm{cn}(a-b) = \frac{\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{cn}^2 b - k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}.\frac{k}{k'};$$

und auch

$$\frac{\mathrm{Bl}^2 a.\mathrm{Bl}^2 b}{\mathrm{Hl}^2 a.\mathrm{Hl}^2 b} = \frac{k^2}{k'^2}.\mathrm{cn}^2 a.\mathrm{cn}^2 b;$$

also ist

$$\frac{\mathrm{Bl}(a+b).\mathrm{Bl}(a-b)}{\mathrm{Hl}(a+b).\mathrm{Hl}(a-b)} = \frac{\mathrm{Bl}^2 a.\mathrm{Bl}^2 b}{\mathrm{Hl}^2 a.\mathrm{Hl}^2 b}.\frac{k'}{k}.\frac{(1-k'^2\,\mathrm{tn}^2 a\,\mathrm{tn}^2 b)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b},$$

und wird hiermit die Gleichung (1.) multiplicirt, so erhält man die Formel (3.)

Da $\mathrm{Al}(a+b).\mathrm{Al}(a-b) = k\,\mathrm{sn}(a+b)\,\mathrm{sn}(a-b).\mathrm{Hl}(a+b).\mathrm{Hl}(a-b)$ $= \frac{k(\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 b)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}.\mathrm{Hl}(a+b).\mathrm{Hl}(a-b)$ ist, so erhält man, wenn diese Gleichung mit (1.) multiplicirt wird,

$$4. \quad \begin{cases} \mathrm{Al}(a+b).\mathrm{Al}(a-b) = \frac{\mathrm{Hl}^2 a.\mathrm{Hl}^2 b}{k'}(k\,\mathrm{sn}^2 a - k\,\mathrm{sn}^2 b) \quad \text{oder} \\ \mathrm{Al}(a+b).\mathrm{Al}(a-b) = \frac{\mathrm{Al}^2 a.\mathrm{Hl}^2 b - \mathrm{Al}^2 b.\mathrm{Hl}^2 a}{k'} = \frac{\mathrm{Al}^2 a.\mathrm{Bl}^2 b - \mathrm{Bl}^2 a.\mathrm{Al}^2 b}{k} \\ \qquad = \mathrm{Al}^2 a.\mathrm{Gl}^2 b - \mathrm{Al}^2 b.\mathrm{Gl}^2 a \end{cases}$$

§. 192.

Wir leiten noch einige allgemeinere Relationen her, auf folgende Weise. Es ist nach §. 183.

$$\mathrm{lm}\,a + \mathrm{lm}\,b + \mathrm{lm}\,c = \frac{E}{K}.\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right) + \log\frac{\mathrm{Hl}\,a.\mathrm{Hl}\,b.\mathrm{Hl}\,c}{\sqrt{k'^3}},$$

$$\mathrm{lm}(a+b+c) = \frac{E}{K}\cdot\frac{(a+b+c)^2}{2} + \log\frac{\mathrm{Hl}(a+b+c)}{\sqrt{k'}},$$

also ist

$$\mathrm{lm}\,a + \mathrm{lm}\,b + \mathrm{lm}\,c + \mathrm{lm}(a+b+c)$$
$$= \frac{E}{K}(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc) + \log\frac{\mathrm{Hl}\,a.\mathrm{Hl}\,b.\mathrm{Hl}\,c.\mathrm{Hl}(a+b+c)}{\sqrt{k'^4}}$$

Addirt man ferner die drei Gleichungen

$$\mathrm{lm}(a+b) = \frac{E}{K}\cdot\frac{(a+b)^2}{2} + \log\left(\frac{\mathrm{Hl}(a+b)}{\sqrt{k'}}\right),$$
$$\mathrm{lm}(a+c) = \frac{E}{K}\cdot\frac{(a+c)^2}{2} + \log\left(\frac{\mathrm{Hl}(a+c)}{\sqrt{k'}}\right),$$
$$\mathrm{lm}(b+c) = \frac{E}{K}\cdot\frac{(b+c)^2}{2} + \log\left(\frac{\mathrm{Hl}(b+c)}{\sqrt{k'}}\right),$$

so erhält man

$$\mathrm{lm}(a+b) + \mathrm{lm}(a+c) + \mathrm{lm}(b+c)$$
$$= \frac{E}{K}(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc) + \log\frac{\mathrm{Hl}(a+b).\mathrm{Hl}(a+c).\mathrm{Hl}(b+c)}{\sqrt{k'^3}}$$

Wird von dieser Gleichung die obige subtrahirt, so erhält man, der Gleichung (10.) §. 73. gemäfs,

$$\log\frac{\sqrt{k'}\ \mathrm{Hl}(a+b).\mathrm{Hl}(a+c).\mathrm{Hl}(b+c)}{\mathrm{Hl}\,a.\mathrm{Hl}\,b.\mathrm{Hl}\,c.\mathrm{Hl}(a+b+c)} = \log(1+k^2\,\mathrm{sn}\,a.\mathrm{sn}\,b.\mathrm{sn}\,c.\mathrm{sn}(a+b+c)),$$

oder auch

$$1.\quad\left\{\begin{aligned}&\mathrm{Hl}(a+b).\mathrm{Hl}(a+c).\mathrm{Hl}(b+c)\\&=\frac{\mathrm{Hl}\,a.\mathrm{Hl}\,b.\mathrm{Hl}\,c.\mathrm{Hl}(a+b+c)}{\sqrt{k'}}.(1+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,c.\mathrm{sn}(a+b+c)\quad\text{und}\\&\mathrm{Hl}(a+b).\mathrm{Hl}(a+c).\mathrm{Hl}(b+c)\\&=\frac{\mathrm{Hl}\,a.\mathrm{Hl}\,b.\mathrm{Hl}\,c.\mathrm{Hl}(a+b+c)+\mathrm{Al}\,a.\mathrm{Al}\,b.\mathrm{Al}\,c.\mathrm{Al}(a+b+c)}{\sqrt{k'}}.\end{aligned}\right.$$

Ganz eben so leiten wir aus der Formel (7.) §. 183. die Gleichung

$$\mathfrak{Bl}'(a+b).\mathfrak{Bl}'(a+c).\mathfrak{Bl}'(b+c)$$
$$= \frac{\mathfrak{Bl}'a.\mathfrak{Bl}'b.\mathfrak{Bl}'c.\mathfrak{Bl}'(a+b+c)}{\sqrt{k'}}.(1+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,c\,\mathrm{sn}(a+b+c))$$

her, welche sich, wenn man die conjugirten Moduln vertauscht und ferner ai statt a, bi statt b und ci statt c setzt, in

$$2.\quad\left\{\begin{aligned}&\mathrm{Bl}(a+b).\mathrm{Bl}(a+c).\mathrm{Bl}(b+c)\\&=\frac{\mathrm{Bl}\,a.\mathrm{Bl}\,b.\mathrm{Bl}\,c.\mathrm{Bl}(a+b+c)}{\sqrt{k}}.(1+k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{tn}\,b\,\mathrm{tn}\,c.\mathrm{tn}(a+b+c))\quad\text{und}\\&\mathrm{Bl}(a+b).\mathrm{Bl}(a+c).\mathrm{Bl}(b+c)\\&=\frac{\mathrm{Bl}\,a.\mathrm{Bl}\,b.\mathrm{Bl}\,c.\mathrm{Bl}(a+b+c)+\mathrm{Al}\,a.\mathrm{Al}\,b.\mathrm{Al}\,c.\mathrm{Al}(a+b+c)}{\sqrt{k}}\end{aligned}\right.$$

verwandelt. Die in den vorstehenden Gleichungen auf der rechten Seite befindlichen zweigliedrigen Ausdrücke lassen sich noch auf andere Art darstellen. Da nämlich, der Formel (2.) §. 40. gemäfs,

$$1+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,c\,\mathrm{sn}(a+b+c)$$
$$=\frac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{dn}\,c\,\mathrm{dn}(a+b+c)}{k'^2}-\frac{k^2}{k'^2}\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{cn}\,c.\mathrm{cn}(a+b+c)$$

ist, so erhalten wir, wenn die Modular-Functionen durch die cyklischen Hülfs-Functionen ersetzt werden:

$$3.\quad\begin{cases}\mathrm{Hl}\,a.\mathrm{Hl}\,b.\mathrm{Hl}\,c.\mathrm{Hl}(a+b+c)+\mathrm{Al}\,a.\mathrm{Al}\,b.\mathrm{Al}\,c.\mathrm{Al}(a+b+c)\\ =\mathrm{Gl}\,a.\mathrm{Gl}\,b.\mathrm{Gl}\,c.\mathrm{Gl}(a+b+c)-\mathrm{Bl}\,a.\mathrm{Bl}\,b.\mathrm{Bl}\,c.\mathrm{Bl}(a+b+c),\ \text{und}\\ \mathrm{Bl}\,a.\mathrm{Bl}\,b.\mathrm{Bl}\,c.\mathrm{Bl}(a+b+c)+\mathrm{Al}\,a.\mathrm{Al}\,b.\mathrm{Al}\,c.\mathrm{Al}(a+b+c)\\ =\mathrm{Gl}\,a.\mathrm{Gl}\,b.\mathrm{Gl}\,c.\mathrm{Gl}(a+b+c)-\mathrm{Hl}\,a.\mathrm{Hl}\,b.\mathrm{Hl}\,c.\mathrm{Hl}(a+b+c).\end{cases}$$

Zu denselben Resultaten gelangt man aber auch, wenn man in der Formel (1.) $K-a$ statt a, $K-b$ statt b und $K-c$ statt c setzt. Die Gleichung (2.) verwandelt sich aber wieder in sich selbst.

Zusatz. Setzt man in der Gleichung (3.) das Argument $c=o$, so hat man

$$\sqrt{k'}.\mathrm{Hl}\,a.\mathrm{Hl}\,b.\mathrm{Hl}(a+b)+\sqrt{k}.\mathrm{Bl}\,a.\mathrm{Bl}\,b.\mathrm{Bl}(a+b)=\mathrm{Gl}\,a.\mathrm{Gl}\,b.\mathrm{Gl}(a+b).$$

§. 193.

Reihen für die cyklischen und hyperbolischen Amplituden, welche nach Potenzial-Functionen der vervielfachten Arcus ηu und $\eta' u$ fortschreiten.

Integrirt man die mit ∂u multiplicirte Reihe (17.) §. 179., indem man sich erinnert, dafs $\partial\,\mathrm{am}\,u=\mathrm{dn}\,u.\partial u$ ist, so erhält man

$$1.\quad \mathrm{am}\,u=\eta u+\frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}+\tfrac{1}{2}.\frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'}+\tfrac{1}{3}.\frac{\sin 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'}+\tfrac{1}{4}.\frac{\sin 8\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'}+\dots$$

Wird hierin $K-u$ statt u gesetzt, so verwandelt sich die Reihe in

$$2.\quad \mathrm{amc}\,u=\tfrac{1}{2}\pi-\eta u+\frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}-\tfrac{1}{2}.\frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'}+\tfrac{1}{3}.\frac{\sin 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'}-\tfrac{1}{4}.\frac{\sin 8\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'}+\dots$$

Multiplicirt man die Reihe (19.) §. 179. mit ∂u, so giebt die Integration, wenn man sich erinnert, dafs $\partial l\Phi=\frac{\partial\varphi}{\mathfrak{Cos}\,\varphi}$ ist, die Reihe

$$3.\quad \mathfrak{am}\,u=l(\eta' u)+2p.\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K}-\frac{2p^3}{3}.\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K}+\frac{2p^5}{5}.\frac{\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K}-\frac{2p^7}{7}.\frac{\mathfrak{Sin}\,7\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta' K}+-\dots,$$

und die Integration der Reihe (20.) §. 179. giebt

$$4.\quad \mathrm{amc}\,u = \tfrac{1}{2}\pi - 2\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} + \tfrac{2}{3}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} - \tfrac{2}{5}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K} + \tfrac{2}{7}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,7\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta' K} - \tfrac{2}{9}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,9\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,9\eta' K} + - \ldots$$

In der Reihe (3.) kann das Anfangsglied $l(\eta' u)$ auch nach der Formel $l(\eta' u) = \frac{1}{2}\pi - \mathrm{arctang}(e^{-\eta' u})$ berechnet werden.

Da $\partial\,\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u = \dfrac{\partial\,\mathrm{am}\,u}{\mathrm{cn}\,u} = \dfrac{\partial u}{\mathrm{snc}\,u}$ ist, so erhält man durch die Integration der Reihe (6.) §. 179.

$$5.\quad \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u = \mathfrak{L}(\eta u) + 2q\cdot\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} - \frac{2q^3}{3}\cdot\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \frac{2q^5}{5}\cdot\frac{\sin 5\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta K'} - \frac{2q^7}{7}\cdot\frac{\sin 7\eta u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta K'} + - \ldots,\ \text{also}$$

$$6.\quad \mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u = \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \eta u) + 2q\cdot\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} + \frac{2q^3}{3}\cdot\frac{\cos 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \frac{2q^5}{5}\cdot\frac{\cos 5\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta K'} + \frac{2q^7}{7}\cdot\frac{\cos 7\eta u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta K'} + \ldots$$

Die Reihe (8.) §. 179. giebt integrirt

$$7.\quad \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u = \eta' u + \frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,6\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,8\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta' K} + \ldots,$$

und die Integration der Reihe (7.) §. 179. giebt zunächst

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u = \mathrm{const.} - \log\mathfrak{Sin}\,\eta' u - p^2\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} - \frac{p^4}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} - \frac{p^6}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K} - \frac{p^8}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta' K} - \ldots$$

Die Ermittelung der Constante erfordert eine besondere Untersuchung. Setzt man in der gefundenen Reihe $K-u$ statt u, so muſs die Reihe (7.) hervorgehen. Es sei wieder $e^{\eta' u} = x$, also

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u = \mathrm{const.} + \log\frac{2}{x-x^{-1}} - \frac{p^4(x^2+x^{-2})}{1+p^4} - \frac{p^8}{2}\cdot\frac{(x^4+x^{-4})}{1+p^8} - \frac{p^{12}}{3}\cdot\frac{x^6+x^{-6}}{1+p^{12}} - \ldots$$

Wird nun $K-u$ statt u gesetzt, wodurch sich x in $\dfrac{1}{px}$ verwandelt, so erhalten wir

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u = \mathrm{const.} + \frac{2px}{1+p^2x^2} - \frac{p^2x^{-2}}{1+p^4} - \frac{p^4.x^{-4}}{2(1+p^8)} - \frac{p^6.x^{-6}}{3(1+p^{12})} - \ldots - \frac{p^6x^2}{1+p^4} - \frac{p^{12}.x^4}{2(1+p^8)} - \frac{p^{18}.x^6}{3(1+p^{12})} - \ldots$$

Da $\log\left(\dfrac{2px}{1-p^2x^2}\right) = \log(2px) + p^2x^2 + \dfrac{p^4x^4}{2} + \dfrac{p^6x^6}{3} + \ldots$ und ferner

$p^2x^2 - \frac{p^6x^2}{1+p^4} = \frac{p^2x^2}{1+p^4}$, $\frac{p^4x^4}{2} - \frac{p^{12}x^4}{2(1+p^8)} = \frac{p^4x^4}{2(1+p^8)}$ u. s. w. ist, so entsteht die Reihe

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u = \text{const.} + \log(2p) + \eta' u + \frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} + \dots,$$

welche mit (7.) übereinstimmt, wenn const. $= -\log(2p)$ ist. Daher haben wir

$$8.\quad \mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u = \log\left(\frac{1}{2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}\right) - p^2\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} - \frac{p^4}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} - \frac{p^6}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K} - \frac{p^8}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta' K} - - \dots$$

Da $\partial\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u) = -\frac{\partial\,\mathrm{amc}\,u}{\mathrm{snc}\,u} = \frac{k'\partial u}{\mathrm{cn}\,u}$ und $\partial\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\,u) = -\frac{k'\partial u}{\mathrm{cnc}\,u}$ ist, so giebt die Integration der Reihe (13.) §. 179.

$$9.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u) = \mathfrak{L}(\eta u) \quad - 2q\cdot\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} + \frac{2q^3}{3}\cdot\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'} - \frac{2q^5}{5}\cdot\frac{\sin 5\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'} + \frac{2q^7}{7}\cdot\frac{\sin 7\eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K'} - + \dots,$$

$$10.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\,u) = \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \eta u) - 2q\cdot\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} - \frac{2q^3}{3}\cdot\frac{\cos 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'} - \frac{2q^5}{5}\cdot\frac{\cos 5\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'} - \frac{2q^7}{7}\cdot\frac{\cos 7\eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K'} - - \dots$$

Die Integration der Reihe (15.) §. 179. giebt

$$11.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u) = 2\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} + \tfrac{2}{5}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K} + \tfrac{2}{7}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,7\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta' K} + \dots,$$

und durch dasselbe Verfahren, wie bei Herleitung der Reihe (8.), findet man hieraus

$$12.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\,u) = \log\frac{1}{\mathfrak{Tang}\,\frac{1}{2}(\eta' u)} - 2p\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} - \frac{2p^3}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,3\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} - \frac{2p^5}{5}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,5\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K} - - \dots,$$

§. 194.

Da $\partial\,\mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{dn}\left(ku, \frac{1}{k}\right).k\,\partial u = k\,\mathrm{cn}\,u.\partial u$ ist, so giebt die Integration der Reihe (9.) §. 179.

$$13.\quad \mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = 2\cdot\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'} + \tfrac{2}{5}\cdot\frac{\sin 5\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'} + \tfrac{2}{7}\cdot\frac{\sin 7\eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K'} + \dots,\ \text{also}$$

$$14.\quad \mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right) = 2\cdot\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} - \tfrac{2}{3}\cdot\frac{\cos 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'} + \tfrac{2}{5}\cdot\frac{\cos 5\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'} - \tfrac{2}{7}\cdot\frac{\cos 7\eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K'} + - \dots$$

Die Reihe (11.) §. 179. giebt

$$15.\quad \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = l(\eta' u) - 2p \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} + \frac{2p^3}{3} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} - \frac{2p^5}{5} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K} + \frac{2p^7}{7} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,7\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta' K} - + \ldots$$

und die Integration von (12.) in §. 179. giebt, wenn die Constante auf ähnliche Art wie bei der Formel (8.) ermittelt wird,

$$16.\quad \operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right) = \tfrac{1}{2}\pi - 2 \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} + \tfrac{2}{3} \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\,3\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} - \tfrac{2}{5} \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\,5\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K} + \tfrac{2}{7} \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\,7\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta' K} - + \ldots$$

Die Constante läfst sich hier auch leicht dadurch bestimmen, dafs man $u = K$ setzt.

Da $\partial \mathfrak{L} \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \dfrac{\partial \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)}{\operatorname{cn}\left(ku, \frac{1}{k}\right)} = \dfrac{k \operatorname{cn} u . \partial u}{\operatorname{dn} u} = k \operatorname{sno} u . \partial u$ ist,

so erhält man

$$17.\quad \mathfrak{L} \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = 2 \cdot \frac{\sin \eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} - \tfrac{2}{3} \cdot \frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \tfrac{2}{5} \cdot \frac{\sin 5\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta K'} - \tfrac{2}{7} \cdot \frac{\sin 7\eta u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta K'} + - \ldots \text{ und}$$

$$18.\quad \mathfrak{L} \operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right) = 2 \cdot \frac{\cos \eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} + \tfrac{2}{3} \cdot \frac{\cos 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \tfrac{2}{5} \cdot \frac{\cos 5\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta K'} + \tfrac{2}{7} \cdot \frac{\cos 7\eta u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta K'} + + \ldots,$$

$$19.\quad \mathfrak{L} \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \eta' u - \frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,6\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K} + \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,8\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta' K} - + \ldots,$$

$$20.\quad \mathfrak{L} \operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right) = \log\left(\frac{1}{2p\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u}\right) + p^2 \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} - \frac{p^4}{2} \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} + \frac{p^6}{3} \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K} - \frac{p^8}{4} \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta' K} + - \ldots$$

Die Constante $\log \frac{1}{2p}$ findet sich, indem man $u = K$ setzt.

Da $\partial \mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)\right) = -\dfrac{\partial \operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)}{\operatorname{sn}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)} = \dfrac{k \operatorname{cnc} u . \partial u}{k \operatorname{snc} u}$

$= \dfrac{\partial u}{\operatorname{tnc} u} = k' \operatorname{tn} u . \partial u$ ist, so findet sich

$$\mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi-\operatorname{am}\left(k(K-u),\tfrac{1}{k}\right)\right)$$
$$=C+\log\frac{1}{\cos\eta u}+q^2\cdot\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}-\frac{q^4}{2}\cdot\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'}+\frac{q^6}{3}\cdot\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'}-+\dots$$

Da $\mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi-\operatorname{am}\left(k(K-u),\tfrac{1}{k}\right)\right)=\log\sqrt{\frac{1+\operatorname{dnc}u}{1-\operatorname{dnc}u}}$ ist, so erhält man zur Bestimmung der Constante C die Gleichung

$$\log\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}=C+\frac{2q^4}{1+q^4}-\frac{2}{2}\cdot\frac{q^8}{1+q^8}+\frac{2}{3}\cdot\frac{q^{12}}{1+q^{12}}-\dots,$$

welche aber noch einfacher dargestellt werden kann. Nach Formel (10.) §. 175. ist für $u=o$

$$\log\sqrt{\frac{1}{k}}=\log\frac{1}{2\sqrt{q}}+\frac{2q^2}{1+q^2}-\frac{2}{2}\cdot\frac{q^4}{1+q^4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{q^6}{1+q^6}+\dots$$

Setzt man hierin q^2 statt q, wodurch sich der Modul k in den kleineren $\frac{1-k'}{1+k'}$ verwandelt, so entsteht

$$\log\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}=\log\frac{1}{2q}+\frac{2q^4}{1+q^4}-\frac{2}{2}\cdot\frac{q^8}{1+q^8}+\frac{2}{3}\cdot\frac{q^{12}}{1+q^{12}}-\frac{2}{4}\cdot\frac{q^{16}}{1+q^{16}}\dots,$$

woraus zu ersehen, daſs $C=\log\frac{1}{2q}$ ist. Daher ist

$$21.\quad \mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi-\operatorname{am}\left(k(K-u),\tfrac{1}{k}\right)\right)=\log\left(\frac{1}{2q\cos\eta u}\right)+\frac{q^2\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}-\frac{q^4}{2}\cdot\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'}$$
$$+\frac{q^6}{3}\cdot\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'}-\frac{q^8}{4}\cdot\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'}+\dots \text{ und}$$

$$22.\quad \mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi-\operatorname{am}\left(ku,\tfrac{1}{k}\right)\right)=\log\left(\frac{1}{2q\sin\eta u}\right)-q^2\cdot\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}-\frac{q^4}{2}\cdot\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'}$$
$$-\frac{q^6}{3}\cdot\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'}-\frac{q^8}{4}\cdot\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'}-\dots$$

Auſserdem finden sich noch die Reihen

$$23.\quad \mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi-\operatorname{am}\left(k(K-u),\tfrac{1}{k}\right)\right)=2\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K}+\frac{2}{5}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,5\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K}$$
$$+\frac{2}{7}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,7\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta' K}+\dots$$

$$24.\quad \mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi-\operatorname{am}\left(ku,\tfrac{1}{k}\right)\right)=\log\frac{1}{\mathfrak{Tang}\frac{\eta' u}{2}}+2p\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K}+\frac{2p^3}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K}$$
$$+\frac{2p^5}{5}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,5\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K}+\dots$$

Um zu beweisen, daſs in der Formel (23.) die Constante $=o$ ist, dient die Gleichung

$$\log\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}=\frac{4p}{1-p^2}+\frac{4}{3}\cdot\frac{p^3}{1-p^6}+\frac{4}{5}\cdot\frac{p^5}{1-p^{10}}+\dots$$

Die Reihe (24.) läfst sich auch aus der Reihe (12.) §. 193. dadurch herleiten, dafs man ku für u und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k setzt.

§. 195.

Die cyklischen und hyperbolischen Amplituden dargestellt als unendliche Reihen von Arcus.

Da

$$\mathrm{am}\,u = \eta u + \frac{2q^2\sin 2\eta u}{1+q^4} + \tfrac{2}{2}.\frac{q^4\sin 4\eta u}{1+q^8} + \tfrac{2}{3}.\frac{q^6\sin 6\eta u}{1+q^{12}} + \tfrac{2}{4}.\frac{q^8\sin 8\eta u}{1+q^{16}} + \ldots.$$

ist, so erhält man, weil $\frac{q^2}{1+q^4} = q^2 - q^6 + q^{10} - q^{14} \ldots.$ ist,

$$\begin{aligned}\mathrm{am}\,u = \eta u &+ 2q^2\sin 2\eta u + \tfrac{2}{2}q^4\sin 4\eta u + \tfrac{2}{3}q^6\sin 6\eta u \ldots.\\ &- 2q^6\sin 2\eta u + \tfrac{2}{2}q^{12}\sin 4\eta u - \tfrac{2}{3}q^{18}\sin 6\eta u \ldots.\\ &+ 2q^{10}\sin 2\eta u + \tfrac{2}{2}q^{20}\sin 4\eta u + \tfrac{2}{3}q^{30}\sin 6\eta u \ldots.\\ &- 2q^{14}\sin 2\eta u - \tfrac{2}{2}q^{28}\sin 4\eta u - \tfrac{2}{3}q^{42}\sin 6\eta u \ldots.\\ &\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Die einzelnen Horizontal-Reihen lassen sich nach §. 56. des ersten Theiles summiren. Es ist namentlich

$$2q^2\sin 2\eta u + \tfrac{2}{2}q^4\sin 4\eta u + \tfrac{2}{3}q^6\sin 6\eta u \ldots. = 2\,\mathrm{arctang}\left(\frac{q^2\sin 2\eta u}{1-q^2\cos 2\eta u}\right),$$

und also

$$1.\quad \mathrm{am}\,u = \eta u + 2\,\mathrm{arctang}\left(\frac{q^2\sin 2\eta u}{1-q^2\cos 2\eta u}\right) - 2\,\mathrm{arctang}\left(\frac{q^6\sin 2\eta u}{1-q^6\cos 2\eta u}\right)$$
$$+ 2\,\mathrm{arctang}\left(\frac{q^{10}\sin 2\eta u}{1-q^{10}\cos 2\eta u}\right) - 2\,\mathrm{arctang}\left(\frac{q^{14}\sin 2\eta u}{1-q^{14}\cos 2\eta u}\right) + - \ldots. \text{ und}$$

$$2.\quad \mathrm{amc}\,u = \tfrac{1}{2}\pi - \eta u + 2\,\mathrm{arctang}\left(\frac{q^2\sin 2\eta u}{1+q^2\cos 2\eta u}\right) - 2\,\mathrm{arctang}\left(\frac{q^6\sin 2\eta u}{1+q^6\cos 2\eta u}\right)$$
$$+ 2\,\mathrm{arctang}\left(\frac{q^{10}\sin 2\eta u}{1+q^{10}\cos 2\eta u}\right) - + \ldots.$$

Die Reihe (1.) formen wir noch um. Es ist

$$\frac{q^2\sin 2\eta u}{1-q^2\cos 2\eta u} = \frac{2q^2\sin\eta u\cos\eta u}{(1-q^2)\cos^2\eta u + (1+q^2)\sin^2\eta u} = \frac{2q^2\,\mathrm{tang}\,\eta u}{1-q^2+(1+q^2)\,\mathrm{tang}^2\eta u}.$$

Setzt man $\frac{2q^2\,\mathrm{tang}\,\eta u}{1-q^2+(1+q^2)\,\mathrm{tang}^2\eta u} = \mathrm{tang}\,A$, so ist $\mathrm{tang}(A+\eta u) = \frac{1+q^2}{1-q^2}\mathrm{tang}\,\eta u = \frac{\mathrm{tang}\,\eta u}{\mathfrak{Tang}\,\eta K'}$, also $A = \mathrm{arctang}\left(\frac{\mathrm{tang}\,\eta u}{\mathfrak{Tang}\,\eta K'}\right) - \eta u$. Auf gleiche Weise können auch die folgenden Glieder umgeformt werden, und es ist also

$$\begin{aligned}\mathrm{am}\,u = \eta u &+ 2\,\mathrm{arctang}\left(\frac{\mathrm{tang}\,\eta u}{\mathfrak{Tang}\,\eta K'}\right) - 2\,\mathrm{arctang}\left(\frac{\mathrm{tang}\,\eta u}{\mathfrak{Tang}\,3\eta K'}\right)\\ &- 2\eta u \qquad\qquad\qquad\quad + 2\eta u\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 2\,\mathrm{arctang}\left(\frac{\mathrm{tang}\,\eta u}{\mathfrak{Tang}\,5\eta K'}\right) - + \ldots.,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 2\eta u \qquad\qquad\qquad + - \ldots.\end{aligned}$$

Diese Reihe kann wie folgt dargestellt werden:

$$3.\quad \text{am}\,u = \pm\eta u + 2\,\text{arc tang}\left(\frac{\text{tang}\,\eta u}{\mathfrak{Tang}\,\eta K'}\right) - 2\,\text{arc tang}\left(\frac{\text{tang}\,\eta u}{\mathfrak{Tang}\,3\eta K'}\right) + 2\,\text{arc tang}\left(\frac{\text{tang}\,\eta u}{\mathfrak{Tang}\,5\eta K'}\right) - + \ldots,$$

wenn $\pm$ in $-$ verwandelt wird, falls das letzte Glied der Reihe positiv ist, hingegen $\pm$ in $+$, wenn das letzte Glied der Reihe, welches in Rechnung gezogen wird, negativ ist. Hiernach läfst sich also am u aus u noch bequemer berechnen, als nach der Reihe (1.) oder (2.).

Da

$$\text{am}\,u = l(\eta'u) + \frac{4p^2}{1-p^2}\mathfrak{Sin}\,\eta'u - \frac{4p^6}{3(1-p^6)}\mathfrak{Sin}\,3\eta'u + \frac{4p^{10}}{5(1-p^{10})}\mathfrak{Sin}\,5\eta'u - + \ldots$$

ist; ferner $\frac{4p^2}{1-p^2} = 4p^2 + 4p^4 + 4p^6 + \ldots$: so erhält man durch Entwickelung der einzelnen Glieder:

$$\begin{aligned} \text{am}\,u = l(\eta'u) &+ 4p^2\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u - \tfrac{4}{3}p^6\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'u + \tfrac{4}{5}p^{10}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'u - + \ldots \\ &+ 4p^4\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u - \tfrac{4}{3}p^{12}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'u + \tfrac{4}{5}p^{20}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'u - + \ldots \\ &+ 4p^6\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u - \tfrac{4}{3}p^{18}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'u + \tfrac{4}{5}p^{30}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'u - + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w.

Da aber $4p^2\mathfrak{Sin}\,\eta'u - \frac{4}{3}p^6\mathfrak{Sin}\,3\eta'u + \frac{4}{5}p^{10}\mathfrak{Sin}\,5\eta'u - \frac{4}{7}p^{14}\mathfrak{Sin}\,7\eta'u + - \ldots$ $= 2\,\text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta'K}\right)$ ist, so erhält man durch Summation der einzelnen Horizontal-Reihen:

$$4.\quad \text{am}\,u = l(\eta'u) + 2\,\text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta'K}\right) + 2\,\text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta'K}\right) + 2\,\text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta'K}\right) + \ldots$$

Da dem Zusatze zu §. 23. gemäfs

$$l(2\eta'K+\eta'u) - l(2\eta'K-\eta'u) = 2\,\text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta'K}\right)$$

ist, so kann die vorige Reihe auch also dargestellt werden:

$$\begin{aligned} 5.\quad \text{am}\,u = {} & l(\eta'u) + l(2\eta'K+\eta'u) + l(4\eta'K+\eta'u) + l(6\eta'K+\eta'u) + l(8\eta'K+\eta'u) + + \ldots \\ & - l(2\eta'K-\eta'u) - l(4\eta'K-\eta'u) - l(6\eta'K-\eta'u) - l(8\eta'K-\eta'u) - - \ldots \end{aligned}$$

Die Entwickelung der Reihe (4.) §. 193. giebt

$$\begin{aligned} \text{amc}\,u = \tfrac{1}{2}\pi &- 4p\;\mathfrak{Sin}\,\eta'u + \tfrac{4}{3}p^3\;\mathfrak{Sin}\,3\eta'u - \tfrac{4}{5}p^5\;\mathfrak{Sin}\,5\eta'u + - \ldots \\ &- 4p^3\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u + \tfrac{4}{3}p^9\;\mathfrak{Sin}\,3\eta'u - \tfrac{4}{5}p^{15}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'u + - \ldots \\ &- 4p^5\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u + \tfrac{4}{3}p^{15}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'u - \tfrac{4}{5}p^{25}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'u + - \ldots \end{aligned}$$

u. s. w.,

und die Summation der einzelnen Horizontal-Reihen giebt

$$6.\quad \text{amc}\,u = \tfrac{1}{2}\pi - 2\,\text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K}\right) - 2\,\text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K}\right)$$

$$- 2\,\text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K}\right) - 2\,\text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta' K}\right) - - \ldots.$$

Durch Anwendung der Longitudinal-Function kann diese Reihe einfacher also dargestellt werden:

$$7.\quad \text{amc}\,u =$$

$$\tfrac{1}{2}\pi - l(\eta' K + \eta' u) - l(3\eta' K + \eta' u) - l(5\eta' K + \eta' u) - l(7\eta' K + \eta' u) - - \ldots.$$

$$- l(\eta' K - \eta' u) + l(3\eta' K - \eta' u) + l(5\eta' K - \eta' u) + l(7\eta' K - \eta' u) + + \ldots.$$

Vertauscht man in der Reihe (4.) die beiden conjugirten Moduln und setzt ui statt u, so entsteht

$$8.\quad \mathfrak{L}\,\text{am}\,u = \mathfrak{L}(\eta u) + 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin \eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}\right) + 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin \eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'}\right)$$

$$+ 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin \eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'}\right) + \ldots.$$

und

$$9.\quad \mathfrak{L}\,\text{amc}\,u = \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \eta u) + 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\cos \eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}\right) + 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\cos \eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'}\right)$$

$$+ 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\cos \eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'}\right) + \ldots.$$

Durch dasselbe Verfahren verwandelt sich die Reihe (3.) in

$$10.\quad \mathfrak{L}\,\text{am}\,u = \pm \eta' u + 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\mathfrak{Tang}\,\eta' K}\right) - 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\mathfrak{Tang}\,3\eta' K}\right)$$

$$+ \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\mathfrak{Tang}\,3\eta' K}\right) - + \ldots.;$$

und in Beziehung auf das Vorzeichen $\pm$ gilt dieselbe Bemerkung, wie bei der Formel (3.). Es ist übrigens auch

$$11.\quad \mathfrak{L}\,\text{am}\,u = \eta' u + 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{p^2\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{1 - p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}\right) - 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{p^4\,\mathfrak{Sin}\,4\eta' u}{1 - p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}\right)$$

$$+ 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{p^6\,\mathfrak{Sin}\,6\eta' u}{1 - p^6\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}\right) - + \ldots.$$

Stellen wir die Reihe (8.) §. 193. entwickelt also dar:

$$\mathfrak{L}\,\text{amc}\,u = \log\left(\frac{1}{2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}\right) - 2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u - \frac{2p^8}{2}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u - \frac{2p^{12}}{3}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u - \ldots.$$

$$+ 2p^8\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + \frac{2p^{16}}{2}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u + \frac{2p^{24}}{3}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u + \ldots.$$

$$- 2p^{12}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u - \frac{2p^{24}}{2}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u - \frac{2p^{36}}{3}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u - \ldots.$$

u. s. w.

und benutzen die Formel

$$-2p^4\,\mathfrak{Cos}2\eta'u-\frac{2p^8}{2}\mathfrak{Cos}4\eta'u-\frac{2p^{12}}{3}\mathfrak{Cos}6\eta'u-\dots=\log(1-2p^4\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^8),$$

so entsteht die Reihe

12. $\mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u=$

$$\log\left\{\frac{1}{2p\,\mathfrak{Sin}\eta'u}\cdot\frac{1-2p^4\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^8}{1-2p^8\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^{16}}\cdot\frac{1-2p^{12}\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^{24}}{1-2p^{16}\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^{32}}\cdot\frac{1-2p^{20}\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^{40}}{1-2p^{24}\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^{48}}\dots\right\}.$$

Da $\mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u=\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{snc}\,u}{1-\mathrm{snc}\,u}}$ ist, so erhält man, wenn $u=iK'$, also $\eta'u=\frac{1}{2}\pi i$ gesetzt wird,

$$\log\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}=\log\left\{\frac{1}{2p}\cdot\frac{1+2p^4+p^8}{1+2p^8+p^{16}}\cdot\frac{1+2p^{12}+p^{24}}{1+2p^{16}+p^{32}}\cdot\frac{1+2p^{20}+p^{40}}{1+2p^{24}+p^{48}}\dots\right\}.$$

Wird diese Gleichung von der vorigen subtrahirt, so entsteht, da

$$\frac{1-2p^4\,\mathfrak{Cos}^2\eta'u+p^8}{1+2p^4+p^8}=1-\frac{4p^4\,\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{(1+p^4)^2}=1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 2\eta'K}$$

ist, durch eine gleichmäfsige Umformung aller Factoren:

13. $\mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u=$

$$\log\left\{\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\cdot\frac{1}{\mathfrak{Sin}\eta'u}\cdot\frac{1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 2\eta'K}}{1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 4\eta'K}}\cdot\frac{1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 6\eta'K}}{1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 8\eta'K}}\cdot\frac{1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 10\eta'K}}{1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 12\eta'K}}\dots\right\}.$$

Setzt man in der Reihe (8.) noch $k'u$ statt u und $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k, so verwandelt sich $\mathrm{am}\,u$ in $\frac{1}{2}\pi-\mathrm{amc}\,u$, und es ist also

14. $$\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{amc}\,u)=\mathfrak{L}(\eta u)-2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}2\eta K'}\right)+2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}4\eta K'}\right)-2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}6\eta K'}\right)+-\dots,$$

15. $$\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{am}\,u)=\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\eta u)-2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}2\eta K'}\right)+2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}6\eta K'}\right)-2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}6\eta K'}\right)+-\dots.$$

Da nach Formel (11.) §. 193.

$$\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{amc}\,u)=\frac{4p\,\mathfrak{Sin}\eta'u}{1+p^2}+\frac{4}{3}\cdot\frac{p^3\,\mathfrak{Sin}3\eta'u}{1+p^6}+\frac{4}{5}\cdot\frac{p^5\,\mathfrak{Sin}5\eta'u}{1+p^{10}}+\dots$$

ist, so erhält man durch Entwicklung

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{amc}\,u)=\;&4p\;\mathfrak{Sin}\eta'u+\tfrac{4}{3}p^3\;\mathfrak{Sin}3\eta'u+\tfrac{4}{5}p^5\;\mathfrak{Sin}5\eta'u+\dots\\&-4p^3\,\mathfrak{Sin}\eta'u-\tfrac{4}{3}p^9\;\mathfrak{Sin}3\eta'u-\tfrac{4}{5}p^{15}\,\mathfrak{Sin}5\eta'u-\dots\\&+4p^5\,\mathfrak{Sin}\eta'u+\tfrac{4}{3}p^{15}\,\mathfrak{Sin}3\eta'u+\tfrac{4}{5}p^{25}\,\mathfrak{Sin}5\eta'u+\dots;\end{aligned}$$

u. s. w.

und da $2p\,\mathfrak{Sin}\eta'u+\frac{2}{3}p^3\mathfrak{Sin}3\eta'u+\frac{2}{5}p^5\mathfrak{Sin}5\eta'u+\dots=\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\eta'u}{\mathfrak{Sin}\eta'K}\right)$

ist, so erhält man durch Summation der einzelnen Horizontal-Reihen

$$16. \quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u) =$$

$$2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\eta' u}{\mathrm{Sin}\,\eta' K}\right) - 2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\eta' u}{\mathrm{Sin}\,3\eta' K}\right) + 2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\eta' u}{\mathrm{Sin}\,5\eta' K}\right)$$
$$- 2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\eta' u}{\mathrm{Sin}\,7\eta' K}\right) + - \ldots.$$

Da der Formel (12.) §. 193. gemäfs

$$\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{am} u)$$
$$= \log \frac{1}{\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(\eta' u)} - \frac{4p^2\,\mathrm{Cos}\,\eta' u}{1+p^2} - \frac{4p^6\,\mathrm{Cos}\,3\eta' u}{3(1+p^6)} - \frac{4p^{10}\,\mathrm{Cos}\,5\eta' u}{5(1+p^{10})} - \ldots.$$

ist, so erhält man durch Entwickelung zunächst

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{am} u) = \log \frac{1}{\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(\eta' u)} &- 4p^2\,\mathrm{Cos}\,\eta' u - \tfrac{4}{3}p^6\,\mathrm{Cos}\,3\eta' u - \tfrac{4}{5}p^{10}\,\mathrm{Cos}\,5\eta' u - \ldots.\\ &+ 4p^4\,\mathrm{Cos}\,\eta' u + \tfrac{4}{3}p^{12}\,\mathrm{Cos}\,3\eta' u + \tfrac{4}{5}p^{20}\,\mathrm{Cos}\,5\eta' u + \ldots.\\ &- 4p^6\,\mathrm{Cos}\,\eta' u - \tfrac{4}{3}p^{18}\,\mathrm{Cos}\,3\eta' u - \tfrac{4}{5}p^{30}\,\mathrm{Cos}\,5\eta' u - \ldots.\end{aligned}$$

u. s. w.

Da aber

$$2p^2\,\mathrm{Cos}\,\eta' u + \tfrac{2}{3}p^6\,\mathrm{Cos}\,3\eta' u + \tfrac{2}{5}p^{10}\,\mathrm{Cos}\,5\eta' u + \ldots. = \mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Cos}\,\eta' u}{\mathrm{Cos}\,2\eta' K}\right) \text{ und}$$

$$\log \frac{1}{\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(\eta' u)} = \log \frac{1+e^{-\eta' u}}{1-e^{-\eta' u}} = 2\,\mathrm{Arc\,Tang}(e^{-\eta' u})$$

ist, so erhält man die Reihe

$$17. \quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{am} u)$$
$$= 2\,\mathrm{Arc\,Tang}(e^{-\eta' u}) - 2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Cos}\,\eta' u}{\mathrm{Cos}\,2\eta' K}\right) + 2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Cos}\,\eta' u}{\mathrm{Cos}\,4\eta' K}\right)$$
$$- 2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Cos}\,\eta' u}{\mathrm{Cos}\,6\eta' K}\right) + - \ldots.$$

Da $\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi - x) = \log \frac{1+e^{-\mathfrak{L}x}}{1-e^{-\mathfrak{L}x}}$, also $\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi - lx) = \log \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$ ist, so kann auch $\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi - l(\eta' u))$ für das Anfangsglied $2\,\mathrm{Arc\,Tang}(e^{-\eta' u})$ gesetzt werden.

§. 196.

Nach Formel (13.) §. 194. ist

$$\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{4q\sin\eta u}{1+q^2} + \tfrac{4}{3}.\frac{q^3\sin 3\eta u}{1+q^6} + \tfrac{4}{5}.\frac{q^5\sin 5\eta u}{1+q^{10}} + \ldots.,$$

und also

$$\begin{aligned}\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \;& 4q\sin\eta u + \tfrac{4}{3}q^3\sin 3\eta u + \tfrac{4}{5}q^5\sin 5\eta u + \ldots.\\ &- 4q^3\sin\eta u - \tfrac{4}{3}q^9\sin 3\eta u - \tfrac{4}{5}q^{15}\sin 5\eta u - \ldots.\\ &+ 4q^5\sin\eta u + \tfrac{4}{3}q^{15}\sin 3\eta u + \tfrac{4}{5}q^{25}\sin 5\eta u + \ldots.\end{aligned}$$

u. s. w.

Da aber $2q\sin\eta u+\frac{2}{3}q^3\sin 3\eta u+\frac{2}{5}q^5\sin 5\eta u+\ldots = \text{arc tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'}\right)$ ist, so erhält man

$$18.\quad \text{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right)$$
$$=2\,\text{arc tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'}\right)-2\,\text{arc tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'}\right)+2\,\text{arc tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta K'}\right)$$
$$-2\,\text{arc tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta K'}\right)+-\ldots,$$

$$19.\quad \text{am}\left(k(K-u),\frac{1}{k}\right)$$
$$=2\,\text{arc tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'}\right)-2\,\text{arc tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'}\right)+2\,\text{arc tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta K'}\right)$$
$$-2\,\text{arc tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta K'}\right)+-\ldots,$$

Nach Formel (15.) §. 194. ist

$$\text{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right)=l(\eta'u)-\frac{4p^2}{1+p^2}\mathfrak{Sin}\,\eta'u+\frac{4p^6}{3(1+p^6)}\mathfrak{Sin}\,3\eta'u$$
$$-\frac{4p^{10}}{5(1+p^{10})}\mathfrak{Sin}\,5\eta'u+-\ldots,$$

und folglich

$$\text{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right)=l(\eta'u)-4p^2\mathfrak{Sin}\,\eta'u+\tfrac{4}{3}p^6\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'u-\tfrac{4}{5}p^{10}\mathfrak{Sin}\,5\eta'u+-\ldots$$
$$+4p^4\mathfrak{Sin}\,\eta'u-\tfrac{4}{3}p^{12}\mathfrak{Sin}\,3\eta'u+\tfrac{4}{5}p^{20}\mathfrak{Sin}\,5\eta'u-+\ldots$$
$$-4p^6\mathfrak{Sin}\,\eta'u+\tfrac{4}{3}p^{18}\mathfrak{Sin}\,3\eta'u-\tfrac{4}{5}p^{30}\mathfrak{Sin}\,5\eta'u+-\ldots$$

u. s. w.

Werden die einzelnen Horizontal-Reihen summirt, so erhält man

$$20.\quad \text{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right)=l(\eta'u)-2\,\text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta'K}\right)+2\,\text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta'K}\right)$$
$$-2\,\text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta'K}\right)+-\ldots,$$

oder auch nach §. 22.

$$\text{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right)=l(\eta'u)-l(2\eta'K+\eta'u)+l(4\eta'K+\eta'u)-l(6\eta'K+\eta'u)+-\ldots$$
$$+l(2\eta'K-\eta'u)-l(4\eta'K-\eta'u)+l(6\eta'K-\eta'u)-+\ldots$$

Auf ähnliche Art findet man

$$21.\quad \text{am}\left(k(K-u),\frac{1}{k}\right)=\tfrac{1}{2}\pi-2\,\text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,\eta'K}\right)+2\,\text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta'K}\right)$$
$$-2\,\text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta'K}\right)+-\ldots$$

Da

$$2\,\text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,\eta'K}\right)=\pi-2\,\text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta'K}{\mathfrak{Cos}\,\eta'u}\right)=\pi-\{l(\eta'K+\eta'u)+l(\eta'K+\eta'u)\}$$

ist, so kann man die vorige Reihe auch also darstellen:

$$\operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right) = \pm\tfrac{1}{2}\pi + l(\eta' K + \eta' u) - l(3\eta' K + \eta' u) + l(5\eta' K + \eta' u) - + \ldots$$
$$+ l(\eta' K - \eta' u) - l(3\eta' K - \eta' u) + l(5\eta' K - \eta' u) - + \ldots;$$

und in dieser Reihe mufs das obere Zeichen vor dem Anfangsgliede $\pm\frac{1}{2}\pi$ genommen werden, wenn man die Reihe mit zwei negativen Gliedern abbricht: hingegen das untere Zeichen, wenn man die Reihe mit zwei positiven Gliedern abbricht. Die einzelnen Glieder in der vorstehenden Reihe, wie auch in den Reihen (4.), (7.) und (20.) können auch entweder nach der Formel

$$l\varphi = \tfrac{1}{2}\pi - 2\operatorname{arctang}(e^{-\varphi}), \text{ oder nach der Formel}$$
$$l\varphi = 2\operatorname{arctang}(\mathfrak{Tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi)$$

berechnet werden. Will man nur logarithmische Tafeln, nicht also die der cyklischen und hyperbolischen Functionen anwenden, so kann man, zumal dann, wenn φ ziemlich grofs ist, auch von der Reihe

$$l\varphi = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{2}{e^{\varphi}} + \frac{2}{3.e^{3\varphi}} - \frac{2}{5.e^{5\varphi}} + \frac{2}{7.e^{7\varphi}} - + \ldots.$$

Gebrauch machen, da dieselbe so sehr rasch convergirt.

Auf gleiche Art findet man noch die Reihen

$$22. \begin{cases} \mathfrak{L}\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = 2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'}\right) + 2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'}\right) \\ \qquad + 2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'}\right) + \ldots \\ \mathfrak{L}\operatorname{am}\left(k(K-u)\frac{1}{k}\right) = 2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'}\right) + 2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'}\right) \\ \qquad + 2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'}\right) + \ldots \end{cases}$$

$$23. \quad \mathfrak{L}\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) =$$
$$\eta' u - 2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{p^2\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{1+p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}\right) + 2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{p^6\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{1+p^6\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}\right)$$
$$- 2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{p^{10}\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{1+p^{10}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}\right) + - \ldots$$

Da

$$\frac{p^2\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{1+p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u} = \frac{2p^2\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{(1+p^2)\mathfrak{Cos}^2\eta' u - (1-p^2)\mathfrak{Sin}^2\eta' u} = \frac{2p^2\,\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{1+p^2-(1-p^2)\mathfrak{Tang}^2\eta' u}$$
$$= \frac{\left(1 - \frac{1-p^2}{1+p^2}\right)\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{1 - \frac{1-p^2}{1+p^2}\mathfrak{Tang}^2\eta' u} = \mathfrak{Tang}\left(\eta' u - \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{1-p^2}{1+p^2}\mathfrak{Tang}\,\eta' u\right)\right)$$

$p^2x^2 - \frac{p^6x^2}{1+p^4} = \frac{p^2x^2}{1+p^4}$, $\frac{p^4x^4}{2} - \frac{p^{12}x^4}{2(1+p^8)} = \frac{p^4x^4}{2(1+p^8)}$ u. s. w. ist, so entsteht die Reihe

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u = \text{const.} + \log(2p) + \eta' u + \frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} + \dots,$$

welche mit (7.) übereinstimmt, wenn const. $= -\log(2p)$ ist. Daher haben wir

$$8.\quad \mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u = \log\left(\frac{1}{2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}\right) - p^2\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} - \frac{p^4}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} - \frac{p^6}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K} - \frac{p^8}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta' K} - - \dots.$$

Da $\partial\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u) = -\frac{\partial\,\mathrm{amc}\,u}{\mathrm{snc}\,u} = \frac{k'\partial u}{\mathrm{cn}\,u}$ und $\partial\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\,u) = -\frac{k'\partial u}{\mathrm{cnc}\,u}$ ist, so giebt die Integration der Reihe (13.) §. 179.

$$9.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u) = \mathfrak{L}(\eta u) - 2q\cdot\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} + \frac{2q^3}{3}\cdot\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'} - \frac{2q^5}{5}\cdot\frac{\sin 5\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'} + \frac{2q^7}{7}\cdot\frac{\sin 7\eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K'} - + \dots,$$

$$10.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\,u) = \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \eta u) - 2q\cdot\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} - \frac{2q^3}{3}\cdot\frac{\cos 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'} - \frac{2q^5}{5}\cdot\frac{\cos 5\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'} - \frac{2q^7}{7}\cdot\frac{\cos 7\eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K'} - - \dots.$$

Die Integration der Reihe (15.) §. 179. giebt

$$11.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u) = 2\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} + \tfrac{2}{5}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K} + \tfrac{2}{7}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,7\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta' K} + \dots,$$

und durch dasselbe Verfahren, wie bei Herleitung der Reihe (8.), findet man hieraus

$$12.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\,u) = \log\frac{1}{\mathfrak{Tang}\,\frac{1}{2}(\eta' u)} - 2p\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} - \frac{2p^3}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,3\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} - \frac{2p^5}{5}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,5\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K} - - \dots,$$

§. 194.

Da $\partial\,\mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{dn}\left(ku, \frac{1}{k}\right).k\,\partial u = k\,\mathrm{cn}\,u.\partial u$ ist, so giebt die Integration der Reihe (9.) §. 179.

$$13.\quad \mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = 2\cdot\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'} + \tfrac{2}{5}\cdot\frac{\sin 5\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'} + \tfrac{2}{7}\cdot\frac{\sin 7\eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K'} + \dots,$$ also

$$14.\quad \mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right) = 2\cdot\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} - \tfrac{2}{3}\cdot\frac{\cos 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'} + \tfrac{2}{5}\cdot\frac{\cos 5\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'} - \tfrac{2}{7}\cdot\frac{\cos 7\eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K'} + - \dots.$$

Die Reihe (11.) §. 179. giebt

$$15.\quad \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = l(\eta' u) - 2p.\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} + \frac{2p^3}{3}.\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} - \frac{2p^5}{5}.\frac{\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K} + \frac{2p^7}{7}.\frac{\mathfrak{Sin}\,7\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta' K} - + \ldots.$$

und die Integration von (12.) in §. 179. giebt, wenn die Constante auf ähnliche Art wie bei der Formel (8.) ermittelt wird,

$$16.\quad \operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right) = \tfrac{1}{2}\pi - 2.\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} + \tfrac{2}{3}.\frac{\mathfrak{Cos}\,3\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} - \tfrac{2}{5}.\frac{\mathfrak{Cos}\,5\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K} + \tfrac{2}{7}.\frac{\mathfrak{Cos}\,7\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta' K} - + \ldots.$$

Die Constante läßt sich hier auch leicht dadurch bestimmen, daß man $u = K$ setzt.

$$\text{Da}\quad \partial\mathfrak{L}\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{\partial \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)}{\operatorname{cn}\left(ku, \frac{1}{k}\right)} = \frac{k \operatorname{cn} u.\partial u}{\operatorname{dn} u} = k \operatorname{snc} u.\partial u \quad \text{ist,}$$

so erhält man

$$17.\quad \mathfrak{L}\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = 2.\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} - \tfrac{2}{3}.\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \tfrac{2}{5}.\frac{\sin 5\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta K'} - \tfrac{2}{7}.\frac{\sin 7\eta u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta K'} + - \ldots. \quad \text{und}$$

$$18.\quad \mathfrak{L}\operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right) = 2.\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} + \tfrac{2}{3}.\frac{\cos 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \tfrac{2}{5}.\frac{\cos 5\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta K'} + \tfrac{2}{7}.\frac{\cos 7\eta u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta K'} + + \ldots.,$$

$$19.\quad \mathfrak{L}\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \eta' u - \frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} + \tfrac{1}{2}.\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} - \tfrac{1}{3}.\frac{\mathfrak{Sin}\,6\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K} + \tfrac{1}{4}.\frac{\mathfrak{Sin}\,8\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta' K} - + \ldots.,$$

$$20.\quad \mathfrak{L}\operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right) = \log\left(\frac{1}{2p\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u}\right) + p^2.\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} - \frac{p^4}{2}.\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} + \frac{p^6}{3}.\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K} - \frac{p^8}{4}.\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta' K} + - \ldots.$$

Die Constante $\log\frac{1}{2p}$ findet sich, indem man $u = K$ setzt.

$$\text{Da}\quad \partial\mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)\right) = -\frac{\partial \operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)}{\operatorname{sn}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)} = \frac{k \operatorname{cnc} u.\partial u}{k \operatorname{snc} u}$$

$= \frac{\partial u}{\operatorname{tnc} u} = k' \operatorname{tn} u.\partial u$ ist, so findet sich

$$\mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{am}\left(k(K-u), \tfrac{1}{k}\right)\right)$$
$$= C + \log\frac{1}{\cos\eta u} + q^2.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 2\eta K'} - \frac{q^4}{2}.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 4\eta K'} + \frac{q^6}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 6\eta K'} - + \ldots.$$

Da $\mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{am}\left(k(K-u), \tfrac{1}{k}\right)\right) = \log\sqrt{\frac{1+\operatorname{dnc} u}{1-\operatorname{dnc} u}}$ ist, so erhält man zur Bestimmung der Constante C die Gleichung

$$\log\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}} = C + \frac{2q^4}{1+q^4} - \tfrac{2}{3}.\frac{q^8}{1+q^8} + \tfrac{2}{3}.\frac{q^{12}}{1+q^{12}} - \ldots.,$$

welche aber noch einfacher dargestellt werden kann. Nach Formel (10.) §. 175. ist für $u = o$

$$\log\sqrt{\frac{1}{k}} = \log\frac{1}{2\sqrt{q}} + \frac{2q^2}{1+q^2} - \tfrac{2}{2}.\frac{q^4}{1+q^4} + \tfrac{2}{3}.\frac{q^6}{1+q^6} + \ldots.$$

Setzt man hierin q^2 statt q, wodurch sich der Modul k in den kleineren $\frac{1-k'}{1+k'}$ verwandelt, so entsteht

$$\log\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}} = \log\frac{1}{2q} + \frac{2q^4}{1+q^4} - \tfrac{2}{2}.\frac{q^8}{1+q^8} + \tfrac{2}{3}.\frac{q^{12}}{1+q^{12}} - \tfrac{2}{4}.\frac{q^{16}}{1+q^{16}} \ldots.,$$

woraus zu ersehen, dafs $C = \log\frac{1}{2q}$ ist. Daher ist

21. $$\mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{am}\left(k(K-u), \tfrac{1}{k}\right)\right) = \log\left(\frac{1}{2q\cos\eta u}\right) + \frac{q^2\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 2\eta K'} - \frac{q^4}{2}.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 4\eta K'}$$
$$+ \frac{q^6}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 6\eta K'} - \frac{q^8}{4}.\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 8\eta K'} + \ldots. \text{ und}$$

22. $$\mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{am}\left(ku, \tfrac{1}{k}\right)\right) = \log\left(\frac{1}{2q\sin\eta u}\right) - q^2.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 2\eta K'} - \frac{q^4}{2}.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 4\eta K'}$$
$$- \frac{q^6}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 6\eta K'} - \frac{q^8}{4}.\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 8\eta K'} - \ldots.$$

Aufserdem finden sich noch die Reihen

23. $$\mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{am}\left(k(K-u), \tfrac{1}{k}\right)\right) = 2.\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} + \tfrac{2}{3}.\frac{\mathfrak{Cos}\,3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} + \tfrac{2}{5}.\frac{\mathfrak{Cos}\,5\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K}$$
$$+ \tfrac{2}{7}.\frac{\mathfrak{Cos}\,7\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta' K} + \ldots.$$

24. $$\mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{am}\left(ku, \tfrac{1}{k}\right)\right) = \log\frac{1}{\mathfrak{Tang}\frac{\eta' u}{2}} + 2p.\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} + \frac{2p^3}{3}.\frac{\mathfrak{Cos}\,3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K}$$
$$+ \frac{2p^5}{5}.\frac{\mathfrak{Cos}\,5\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K} + \ldots.$$

Um zu beweisen, dafs in der Formel (23.) die Constante $= o$ ist, dient die Gleichung

$$\log\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}} = \frac{4p}{1-p^2} + \tfrac{4}{3}.\frac{p^3}{1-p^6} + \tfrac{4}{5}.\frac{p^5}{1-p^{10}} + \ldots.$$

Die Reihe (24.) läſst sich auch aus der Reihe (12.) §. 193. dadurch herleiten, daſs man ku für u und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k setzt.

§. 195.

Die cyklischen und hyperbolischen Amplituden dargestellt als unendliche Reihen von Arcus.

Da

$$\operatorname{am} u = \eta u + \frac{2q^2 \sin 2\eta u}{1+q^4} + \tfrac{2}{2}.\frac{q^4 \sin 4\eta u}{1+q^8} + \tfrac{2}{3}.\frac{q^6 \sin 6\eta u}{1+q^{12}} + \tfrac{2}{4}.\frac{q^8 \sin 8\eta u}{1+q^{16}} + \dots$$

ist, so erhält man, weil $\frac{q^2}{1+q^4} = q^2 - q^6 + q^{10} - q^{14} \dots$ ist,

$$\begin{aligned}\operatorname{am} u = \eta u &+ 2q^2 \sin 2\eta u + \tfrac{2}{2}q^4 \sin 4\eta u + \tfrac{2}{3}q^6 \sin 6\eta u \dots \\ &- 2q^6 \sin 2\eta u + \tfrac{2}{2}q^{12} \sin 4\eta u - \tfrac{2}{3}q^{18} \sin 6\eta u \dots \\ &+ 2q^{10} \sin 2\eta u + \tfrac{2}{2}q^{20} \sin 4\eta u + \tfrac{2}{3}q^{30} \sin 6\eta u \dots \\ &- 2q^{14} \sin 2\eta u - \tfrac{2}{2}q^{28} \sin 4\eta u - \tfrac{2}{3}q^{42} \sin 6\eta u \dots \\ &\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Die einzelnen Horizontal-Reihen lassen sich nach §. 56. des ersten Theiles summiren. Es ist namentlich

$$2q^2 \sin 2\eta u + \tfrac{2}{2}q^4 \sin 4\eta u + \tfrac{2}{3}q^6 \sin 6\eta u \dots = 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{q^2 \sin 2\eta u}{1-q^2 \cos 2\eta u}\right),$$

und also

$$1.\quad \operatorname{am} u = \eta u + 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{q^2 \sin 2\eta u}{1-q^2 \cos 2\eta u}\right) - 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{q^6 \sin 2\eta u}{1-q^6 \cos 2\eta u}\right)$$
$$+ 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{q^{10} \sin 2\eta u}{1-q^{10} \cos 2\eta u}\right) - 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{q^{14} \sin 2\eta u}{1-q^{14} \cos 2\eta u}\right) + - \dots \text{ und}$$

$$2.\quad \operatorname{amc} u = \tfrac{1}{2}\pi - \eta u + 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{q^2 \sin 2\eta u}{1+q^2 \cos 2\eta u}\right) - 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{q^6 \sin 2\eta u}{1+q^6 \cos 2\eta u}\right)$$
$$+ 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{q^{10} \sin 2\eta u}{1+q^{10} \cos 2\eta u}\right) - + \dots$$

Die Reihe (1.) formen wir noch um. Es ist

$$\frac{q^2 \sin 2\eta u}{1-q^2 \cos 2\eta u} = \frac{2q^2 \sin \eta u \cos \eta u}{(1-q^2)\cos^2 \eta u + (1+q^2)\sin^2 \eta u} = \frac{2q^2 \operatorname{tang} \eta u}{1-q^2+(1+q^2)\operatorname{tang}^2 \eta u}.$$

Setzt man $\frac{2q^2 \operatorname{tang} \eta u}{1-q^2+(1+q^2)\operatorname{tang}^2 \eta u} = \operatorname{tang} A$, so ist $\operatorname{tang}(A+\eta u) = \frac{1+q^2}{1-q^2}\operatorname{tang} \eta u = \frac{\operatorname{tang} \eta u}{\mathfrak{Tang}\, \eta K'}$, also $A = \operatorname{arctang}\left(\frac{\operatorname{tang} \eta u}{\mathfrak{Tang}\, \eta K'}\right) - \eta u$. Auf gleiche Weise können auch die folgenden Glieder umgeformt werden, und es ist also

$$\begin{aligned}\operatorname{am} u = \eta u &+ 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{\operatorname{tang} \eta u}{\mathfrak{Tang}\, \eta K'}\right) - 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{\operatorname{tang} \eta u}{\mathfrak{Tang}\, 3\eta K'}\right) \\ &- 2\eta u \qquad\qquad\qquad\quad + 2\eta u \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{\operatorname{tang} \eta u}{\mathfrak{Tang}\, 5\eta K'}\right) - + \dots, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 2\eta u \qquad\qquad\qquad + - \dots\end{aligned}$$

Diese Reihe kann wie folgt dargestellt werden:

3. $\text{am}\,u = \pm\eta u + 2\,\text{arctang}\left(\frac{\text{tang}\,\eta u}{\mathfrak{Tang}\,\eta K'}\right) - 2\,\text{arctang}\left(\frac{\text{tang}\,\eta u}{\mathfrak{Tang}\,3\eta K'}\right)$
$$+ 2\,\text{arctang}\left(\frac{\text{tang}\,\eta u}{\mathfrak{Tang}\,5\eta K'}\right) - + \ldots,$$

wenn $\pm$ in $-$ verwandelt wird, falls das letzte Glied der Reihe positiv ist, hingegen $\pm$ in $+$, wenn das letzte Glied der Reihe, welches in Rechnung gezogen wird, negativ ist. Hiernach läfst sich also $\text{am}\,u$ aus u noch bequemer berechnen, als nach der Reihe (1.) oder (2.).

Da

$$\text{am}\,u = l(\eta' u) + \frac{4p^2}{1-p^2}\mathfrak{Sin}\,\eta' u - \frac{4p^6}{3(1-p^6)}\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \frac{4p^{10}}{5(1-p^{10})}\mathfrak{Sin}\,5\eta' u - + \ldots$$

ist; ferner $\frac{4p^2}{1-p^2} = 4p^2 + 4p^4 + 4p^6 + \ldots$: so erhält man durch Entwickelung der einzelnen Glieder:

$$\begin{aligned}\text{am}\,u = l(\eta' u) &+ 4p^2\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u - \tfrac{4}{3}p^6\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \tfrac{4}{5}p^{10}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u - + \ldots\\ &+ 4p^4\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u - \tfrac{4}{3}p^{12}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \tfrac{4}{5}p^{20}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u - + \ldots\\ &+ 4p^6\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u - \tfrac{4}{3}p^{18}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \tfrac{4}{5}p^{30}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u - + \ldots\end{aligned}$$

u. s. w.

Da aber $4p^2\mathfrak{Sin}\,\eta' u - \tfrac{4}{3}p^6\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \tfrac{4}{5}p^{10}\mathfrak{Sin}\,5\eta' u - \tfrac{4}{7}p^{14}\mathfrak{Sin}\,7\eta' u + - \ldots$ $= 2\,\text{arctang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K}\right)$ ist, so erhält man durch Summation der einzelnen Horizontal-Reihen:

4. $\text{am}\,u = l(\eta' u) + 2\,\text{arctang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K}\right) + 2\,\text{arctang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K}\right)$
$$+ 2\,\text{arctang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K}\right) + \ldots$$

Da dem Zusatze zu §. 23. gemäfs

$$l(2\eta' K + \eta' u) - l(2\eta' K - \eta' u) = 2\,\text{arctang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K}\right)$$

ist, so kann die vorige Reihe auch also dargestellt werden:

5. $\text{am}\,u =$

$$\begin{aligned}&l(\eta' u) + l(2\eta' K + \eta' u) + l(4\eta' K + \eta' u) + l(6\eta' K + \eta' u) + l(8\eta' K + \eta' u) + + \ldots\\ &\quad - l(2\eta' K - \eta' u) - l(4\eta' K - \eta' u) - l(6\eta' K - \eta' u) - l(8\eta' K - \eta' u) - - \ldots\end{aligned}$$

Die Entwickelung der Reihe (4.) §. 193. giebt

$$\begin{aligned}\text{amc}\,u = \tfrac{1}{2}\pi &- 4p\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u + \tfrac{4}{3}p^3\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u - \tfrac{4}{5}p^5\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u + - \ldots\\ &- 4p^3\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u + \tfrac{4}{3}p^9\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u - \tfrac{4}{5}p^{15}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u + - \ldots\\ &- 4p^5\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u + \tfrac{4}{3}p^{15}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u - \tfrac{4}{5}p^{25}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u + - \ldots\end{aligned}$$

u. s. w.,

und die Summation der einzelnen Horizontal-Reihen giebt

$$6.\quad \operatorname{amc} u = \tfrac{1}{2}\pi - 2\operatorname{arctang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K}\right) - 2\operatorname{arctang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K}\right)$$
$$- 2\operatorname{arctang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K}\right) - 2\operatorname{arctang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta' K}\right) - - \ldots.$$

Durch Anwendung der Longitudinal-Function kann diese Reihe einfacher also dargestellt werden:

$$7.\quad \operatorname{amc} u =$$
$$\tfrac{1}{2}\pi - l(\eta' K + \eta' u) - l(3\eta' K + \eta' u) - l(5\eta' K + \eta' u) - l(7\eta' K + \eta' u) - - \ldots.$$
$$- l(\eta' K - \eta' u) + l(3\eta' K - \eta' u) + l(5\eta' K - \eta' u) + l(7\eta' K - \eta' u) + + \ldots.$$

Vertauscht man in der Reihe (4.) die beiden conjugirten Moduln und setzt ui statt u, so entsteht

$$8.\quad \mathfrak{L}\operatorname{am} u = \mathfrak{L}(\eta u) + 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}\right) + 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'}\right)$$
$$+ 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'}\right) + \ldots.$$

und

$$9.\quad \mathfrak{L}\operatorname{amc} u = \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \eta u) + 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}\right) + 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'}\right)$$
$$+ 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'}\right) + \ldots.$$

Durch dasselbe Verfahren verwandelt sich die Reihe (3.) in

$$10.\quad \mathfrak{L}\operatorname{am} u = \pm\eta' u + 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\mathfrak{Tang}\,\eta' K}\right) - 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\mathfrak{Tang}\,3\eta' K}\right)$$
$$+ \mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\mathfrak{Tang}\,3\eta' K}\right) - + \ldots.;$$

und in Beziehung auf das Vorzeichen $\pm$ gilt dieselbe Bemerkung, wie bei der Formel (3.). Es ist übrigens auch

$$11.\quad \mathfrak{L}\operatorname{am} u = \eta' u + 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{p^2\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{1 - p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}\right) - 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{p^4\,\mathfrak{Sin}\,4\eta' u}{1 - p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}\right)$$
$$+ 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{p^6\,\mathfrak{Sin}\,6\eta' u}{1 - p^6\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}\right) - + \ldots.$$

Stellen wir die Reihe (8.) §. 193. entwickelt also dar:

$$\mathfrak{L}\operatorname{amc} u = \log\left(\frac{1}{2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}\right) - 2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u - \frac{2p^8}{2}\mathfrak{Cos}\,4\eta' u - \frac{2p^{12}}{3}\mathfrak{Cos}\,6\eta' u - \ldots.$$
$$+ 2p^8\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + \frac{2p^{16}}{2}\mathfrak{Cos}\,4\eta' u + \frac{2p^{24}}{3}\mathfrak{Cos}\,6\eta' u + \ldots.$$
$$- 2p^{12}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u - \frac{2p^{24}}{2}\mathfrak{Cos}\,4\eta' u - \frac{2p^{36}}{3}\mathfrak{Cos}\,6\eta' u - \ldots.$$

u. s. w.

und benutzen die Formel

$$-2p^4\,\mathfrak{Cos}2\eta'u-\frac{2p^8}{2}\mathfrak{Cos}4\eta'u-\frac{2p^{12}}{3}\mathfrak{Cos}6\eta'u-\ldots = \log(1-2p^4\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^8),$$

so entsteht die Reihe

$$12.\quad \mathfrak{L}\,\mathrm{amc}u =$$

$$\log\left\{\frac{1}{2p\,\mathfrak{Sin}\eta'u}\cdot\frac{1-2p^4\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^8}{1-2p^8\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^{16}}\cdot\frac{1-2p^{12}\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^{24}}{1-2p^{16}\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^{32}}\cdot\frac{1-2p^{20}\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^{40}}{1-2p^{24}\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^{48}}\ldots\right\}.$$

Da $\mathfrak{L}\,\mathrm{amc}u = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{snc}\,u}{1-\mathrm{snc}\,u}}$ ist, so erhält man, wenn $u = iK'$, also $\eta'u = \frac{1}{2}\pi i$ gesetzt wird,

$$\log\sqrt{\frac{1+k}{1-k}} = \log\left\{\frac{1}{2p}\cdot\frac{1+2p^4+p^8}{1+2p^8+p^{16}}\cdot\frac{1+2p^{12}+p^{24}}{1+2p^{16}+p^{32}}\cdot\frac{1+2p^{20}+p^{40}}{1+2p^{24}+p^{48}}\ldots\right\}.$$

Wird diese Gleichung von der vorigen subtrahirt, so entsteht, da

$$\frac{1-2p^4\,\mathfrak{Cos}^2\eta'u+p^8}{1+2p^4+p^8} = 1-\frac{4p^4\,\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{(1+p^4)^2} = 1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 2\eta'K}$$

ist, durch eine gleichmäfsige Umformung aller Factoren:

$$13.\quad \mathfrak{L}\,\mathrm{amc}u =$$

$$\log\left\{\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\cdot\frac{1}{\mathfrak{Sin}\eta'u}\cdot\frac{1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 2\eta'K}}{1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 4\eta'K}}\cdot\frac{1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 6\eta'K}}{1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 8\eta'K}}\cdot\frac{1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 10\eta'K}}{1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 12\eta'K}}\ldots\right\}.$$

Setzt man in der Reihe (8.) noch $k'u$ statt u und $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k, so verwandelt sich $\mathrm{am}u$ in $\frac{1}{2}\pi-\mathrm{amc}u$, und es ist also

$$14.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{amc}u) = \mathfrak{L}(\eta u)-2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}2\eta K'}\right)+2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}4\eta K'}\right)$$
$$-2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}6\eta K'}\right)+-\ldots,$$

$$15.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{am}u) = \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\eta u)-2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}2\eta K'}\right)+2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}6\eta K'}\right)$$
$$-2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}6\eta K'}\right)+-\ldots$$

Da nach Formel (11.) §. 193.

$$\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{amc}u) = \frac{4p\,\mathfrak{Sin}\eta'u}{1+p^2}+\tfrac{4}{3}\cdot\frac{p^3\,\mathfrak{Sin}3\eta'u}{1+p^6}+\tfrac{4}{5}\cdot\frac{p^5\,\mathfrak{Sin}5\eta'u}{1+p^{10}}+\ldots$$

ist, so erhält man durch Entwicklung

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{amc}u) = {} & 4p\,\mathfrak{Sin}\eta'u+\tfrac{4}{3}p^3\,\mathfrak{Sin}3\eta'u+\tfrac{4}{5}p^5\,\mathfrak{Sin}5\eta'u+\ldots\\ & -4p^3\,\mathfrak{Sin}\eta'u-\tfrac{4}{3}p^9\,\mathfrak{Sin}3\eta'u-\tfrac{4}{5}p^{15}\,\mathfrak{Sin}5\eta'u-\ldots\\ & +4p^5\,\mathfrak{Sin}\eta'u+\tfrac{4}{3}p^{15}\,\mathfrak{Sin}3\eta'u+\tfrac{4}{5}p^{25}\,\mathfrak{Sin}5\eta'u+\ldots;\end{aligned}$$

u. s. w.

und da $2p\,\mathfrak{Sin}\eta'u+\frac{2}{3}p^3\,\mathfrak{Sin}3\eta'u+\frac{2}{5}p^5\,\mathfrak{Sin}5\eta'u+\ldots = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\eta'u}{\mathfrak{Sin}\eta'K}\right)$

ist, so erhält man durch Summation der einzelnen Horizontal-Reihen

$$16.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{am}\,u)=$$

$$2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\eta' u}{\mathrm{Sin}\,\eta' K}\right)-2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\eta' u}{\mathrm{Sin}\,3\eta' K}\right)+2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\eta' u}{\mathrm{Sin}\,5\eta' K}\right)$$
$$-2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\eta' u}{\mathrm{Sin}\,7\eta' K}\right)+-\ldots.$$

Da der Formel (12.) §. 193. gemäfs

$$\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{am}\,u)$$
$$=\log\frac{1}{\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(\eta' u)}-\frac{4p^2\,\mathrm{Cos}\,\eta' u}{1+p^4}-\frac{4p^6\,\mathrm{Cos}\,3\eta' u}{3(1+p^6)}-\frac{4p^{10}\,\mathrm{Cos}\,5\eta' u}{5(1+p^{10})}-\ldots.$$

ist, so erhält man durch Entwickelung zunächst

$$\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{am}\,u)=\log\frac{1}{\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(\eta' u)}-4p^2\,\mathrm{Cos}\,\eta' u-\tfrac{4}{3}p^6\,\mathrm{Cos}\,3\eta' u-\tfrac{4}{5}p^{10}\,\mathrm{Cos}\,5\eta' u-\ldots.$$
$$+4p^4\,\mathrm{Cos}\,\eta' u+\tfrac{4}{3}p^{12}\,\mathrm{Cos}\,3\eta' u+\tfrac{4}{5}p^{20}\,\mathrm{Cos}\,5\eta' u+\ldots.$$
$$-4p^6\,\mathrm{Cos}\,\eta' u-\tfrac{4}{3}p^{18}\,\mathrm{Cos}\,3\eta' u-\tfrac{4}{5}p^{30}\,\mathrm{Cos}\,5\eta' u-\ldots.$$

u. s. w.

Da aber

$$2p^2\,\mathrm{Cos}\,\eta' u+\tfrac{2}{3}p^6\,\mathrm{Cos}\,3\eta' u+\tfrac{2}{5}p^{10}\,\mathrm{Cos}\,5\eta' u+\ldots.=\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Cos}\,\eta' u}{\mathrm{Cos}\,2\eta' K}\right)\ \text{und}$$
$$\log\frac{1}{\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(\eta' u)}=\log\frac{1+e^{-\eta' u}}{1-e^{-\eta' u}}=2\,\mathrm{Arc\,Tang}(e^{-\eta' u})$$

ist, so erhält man die Reihe

$$17.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{am}\,u)$$
$$=2\,\mathrm{Arc\,Tang}(e^{-\eta' u})-2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Cos}\,\eta' u}{\mathrm{Cos}\,2\eta' K}\right)+2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Cos}\,\eta' u}{\mathrm{Cos}\,4\eta' K}\right)$$
$$-2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Cos}\,\eta' u}{\mathrm{Cos}\,6\eta' K}\right)+-\ldots.$$

Da $\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi-x)=\log\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}$, also $\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi-lx)=\log\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$ ist, so kann auch $\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi-l(\eta' u))$ für das Anfangsglied $2\,\mathrm{Arc\,Tang}(e^{-\eta' u})$ gesetzt werden.

§. 196.

Nach Formel (13.) §. 194. ist

$$\mathrm{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right)=\frac{4q\sin\eta u}{1+q^2}+\tfrac{4}{3}.\frac{q^3\sin 3\eta u}{1+q^6}+\tfrac{4}{5}.\frac{q^5\sin 5\eta u}{1+q^{10}}+\ldots.,$$

und also

$$\mathrm{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right)=\ \ 4q\sin\eta u+\tfrac{4}{3}q^3\sin 3\eta u+\tfrac{4}{5}q^5\sin 5\eta u+\ldots.$$
$$-4q^3\sin\eta u-\tfrac{4}{3}q^9\sin 3\eta u-\tfrac{4}{5}q^{15}\sin 5\eta u-\ldots.$$
$$+4q^5\sin\eta u+\tfrac{4}{3}q^{15}\sin 3\eta u+\tfrac{4}{5}q^{25}\sin 5\eta u+\ldots.$$

u. s. w.

Da aber $2q\sin\eta u+\frac{2}{3}q^3\sin 3\eta u+\frac{2}{5}q^5\sin 5\eta u+\ldots = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'}\right)$ ist, so erhält man

$$18.\quad \operatorname{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right)$$
$$= 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'}\right)-2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'}\right)+2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta K'}\right)$$
$$-2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta K'}\right)+-\ldots,$$

$$19.\quad \operatorname{am}\left(k(K-u),\frac{1}{k}\right)$$
$$= 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'}\right)-2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'}\right)+2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta K'}\right)$$
$$-2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta K'}\right)+-\ldots,$$

Nach Formel (15.) §. 194. ist

$$\operatorname{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right) = l(\eta' u)-\frac{4p^2}{1+p^2}\mathfrak{Sin}\,\eta' u+\frac{4p^6}{3(1+p^6)}\mathfrak{Sin}\,3\eta' u$$
$$-\frac{4p^{10}}{5(1+p^{10})}\mathfrak{Sin}\,5\eta' u+-\ldots,$$

und folglich

$$\operatorname{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right) = l(\eta' u)-4p^2\mathfrak{Sin}\,\eta' u+\tfrac{4}{3}p^6\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u-\tfrac{4}{5}p^{10}\mathfrak{Sin}\,5\eta' u+-\ldots$$
$$+4p^4\mathfrak{Sin}\,\eta' u-\tfrac{4}{3}p^{12}\mathfrak{Sin}\,3\eta' u+\tfrac{4}{5}p^{20}\mathfrak{Sin}\,5\eta' u-+\ldots$$
$$-4p^6\mathfrak{Sin}\,\eta' u+\tfrac{4}{3}p^{18}\mathfrak{Sin}\,3\eta' u-\tfrac{4}{5}p^{30}\mathfrak{Sin}\,5\eta' u+-\ldots$$

u. s. w.

Werden die einzelnen Horizontal-Reihen summirt, so erhält man

20.
$$\operatorname{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right) = l(\eta' u)-2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K}\right)+2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K}\right)$$
$$-2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K}\right)+-\ldots,$$

oder auch nach §. 22.

$$\operatorname{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right) = l(\eta' u)-l(2\eta' K+\eta' u)+l(4\eta' K+\eta' u)-l(6\eta' K+\eta' u)+-\ldots$$
$$+l(2\eta' K-\eta' u)-l(4\eta' K-\eta' u)+l(6\eta' K-\eta' u)-+\ldots$$

Auf ähnliche Art findet man

$$21.\quad \operatorname{am}\left(k(K-u),\frac{1}{k}\right) = \tfrac{1}{2}\pi-2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K}\right)+2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K}\right)$$
$$-2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K}\right)+-\ldots$$

Da

$$2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K}\right) = \pi-2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' K}{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}\right) = \pi-\{l(\eta' K+\eta' u\}+l(\eta' K+\eta' u)]$$

ist, so kann man die vorige Reihe auch also darstellen:

$$\mathrm{am}\left(k(K-u),\frac{1}{k}\right)=\pm\tfrac{1}{2}\pi+l(\eta'K+\eta'u)-l(3\eta'K+\eta'u)+l(5\eta'K+\eta'u)-+\dots$$
$$+l(\eta'K-\eta'u)-l(3\eta'K-\eta'u)+l(5\eta'K-\eta'u)-+\dots;$$

und in dieser Reihe mufs das obere Zeichen vor dem Anfangsgliede $\pm\frac{1}{2}\pi$ genommen werden, wenn man die Reihe mit zwei negativen Gliedern abbricht: hingegen das untere Zeichen, wenn man die Reihe mit zwei positiven Gliedern abbricht. Die einzelnen Glieder in der vorstehenden Reihe, wie auch in den Reihen (4.), (7.) und (20.) können auch entweder nach der Formel

$$l\varphi=\tfrac{1}{2}\pi-2\,\mathrm{arctang}(e^{-\varphi}),$$ oder nach der Formel
$$l\varphi=2\,\mathrm{arctang}(\mathfrak{Tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi)$$

berechnet werden. Will man nur logarithmische Tafeln, nicht also die der cyklischen und hyperbolischen Functionen anwenden, so kann man, zumal dann, wenn φ ziemlich grofs ist, auch von der Reihe

$$l\varphi=\tfrac{1}{2}\pi-\frac{2}{e^{\varphi}}+\frac{2}{3.e^{3\varphi}}-\frac{2}{5.e^{5\varphi}}+\frac{2}{7.e^{7\varphi}}-+\dots$$

Gebrauch machen, da dieselbe so sehr rasch convergirt.

Auf gleiche Art findet man noch die Reihen

$$22.\begin{cases}\mathfrak{L}\mathrm{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right)=2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'}\right)+2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'}\right)\\ \qquad+2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'}\right)+\dots\\ \mathfrak{L}\mathrm{am}\left(k(K-u)\frac{1}{k}\right)=2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'}\right)+2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'}\right)\\ \qquad+2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'}\right)+\dots\end{cases}$$

$$23.\quad\mathfrak{L}\mathrm{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right)=$$
$$\eta'u-2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{p^2\,\mathfrak{Sin}\,2\eta'u}{1+p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}\right)+2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{p^6\,\mathfrak{Sin}\,2\eta'u}{1+p^6\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}\right)$$
$$-2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{p^{10}\,\mathfrak{Sin}\,2\eta'u}{1+p^{10}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}\right)+-\dots$$

Da

$$\frac{p^2\,\mathfrak{Sin}\,2\eta'u}{1+p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}=\frac{2p^2\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u}{(1+p^2)\mathfrak{Cos}^2\eta'u-(1-p^2)\mathfrak{Sin}^2\eta'u}=\frac{2p^2\,\mathfrak{Tang}\,\eta'u}{1+p^2-(1-p^2)\mathfrak{Tang}^2\eta'u}$$
$$=\frac{\left(1-\frac{1-p^2}{1+p^2}\right)\mathfrak{Tang}\,\eta'u}{1-\frac{1-p^2}{1+p^2}\mathfrak{Tang}^2\,\eta'u}=\mathfrak{Tang}\left(\eta'u-\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{1-p^2}{1+p^2}\mathfrak{Tang}\,\eta'u\right)\right)$$

etc., so ist auch

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) =$$

$$\eta' u - \eta' u + 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\mathfrak{Cot}\,\eta' K}\right) + 2\eta' u - 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\mathfrak{Cot}\,3\eta' K}\right) + - \ldots \text{ oder}$$

$$24.\quad \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \pm \eta' u + 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\mathfrak{Cot}\,\eta' K}\right) - 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\mathfrak{Cot}\,3\eta' K}\right) + 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\mathfrak{Cot}\,5\eta' K}\right) - + \ldots$$

In der folgenden Gleichung gilt das obere Vorzeichen des Anfangsgliedes $\pm \eta' u$, wenn man die Reihe mit einem negativen Gliede abbricht, und das untere Vorzeichen, wenn man die Reihe mit einem positiven Gliede abbricht:

$$25.\quad \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right) =$$

$$\log\left\{\frac{1}{2p\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u}\cdot\frac{1+2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^8}{1+2p^8\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{16}}\cdot\frac{1+2p^{12}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{24}}{1+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{32}}\cdot\frac{1+2p^{20}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{40}}{1+2p^{24}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{48}}\cdots\right\},$$

$$26.\quad \begin{cases} \mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)\right) = \\ \log\left(\frac{1}{2q\sin\eta u}\cdot\frac{1-2q^4\cos 2\eta u+q^8}{1-2q^8\cos 2\eta u+q^{16}}\cdot\frac{1-2q^{12}\cos 2\eta u+q^{24}}{1-2q^{16}\cos 2\eta u+q^{32}}\cdot\frac{1-2q^{20}\cos 2\eta u+q^{40}}{1-2q^{24}\cos 2\eta u+q^{48}}\cdots\right), \\ \mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)\right) = \\ \log\left(\frac{1}{2q\cos\eta u}\cdot\frac{1+2q^4\cos 2\eta u+q^8}{1+2q^8\cos 2\eta u+q^{16}}\cdot\frac{1+2q^{12}\cos 2\eta u+q^{24}}{1+2q^{16}\cos 2\eta u+q^{32}}\cdot\frac{1+2q^{20}\cos 2\eta u+q^{40}}{1+2q^{24}\cos 2\eta u+q^{48}}\cdots\right), \end{cases}$$

$$27.\quad \mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)\right) =$$

$$2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(e^{-\eta' u}\right) + 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K}\right) + 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K}\right) + 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K}\right) + \ldots,$$

$$28.\quad \mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi = \mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)\right) =$$

$$2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K}\right) + 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K}\right) + 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K}\right) + \ldots$$

§. 197.

Die Amplituden als Arcus, deren Tangenten Brüche sind, mit unendlichen Reihen für den Zähler und Nenner.

Da $\mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{snc}\,u}{1-\mathrm{snc}\,u}}$, $\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \eta u) = \log\sqrt{\frac{1+\cos\eta u}{1-\cos\eta u}} = \log\cot g\frac{\eta u}{2}$ und $2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}\right) = \log\frac{1+2q^2\cos\eta u+q^4}{1-2q^2\cos\eta u+q^4}$ ist, so ist nach For-

mel (9.) §. 195.

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{snc} u}{1-\operatorname{snc} u}} = \cot\tfrac{1}{2}(\eta u)\cdot\frac{1+2q^2\cos\eta u+q^4}{1-2q^2\cos\eta u+q^4}\cdot\frac{1+2q^4\cos\eta u+q^8}{1-2q^4\cos\eta u+q^8}\cdot\frac{1+2q^6\cos\eta u+q^{12}}{1-2q^6\cos\eta u+q^{12}}\cdots$$

Setzt man in der Formel (8.) §. 189. $\sqrt{q}$ statt p und $\frac{1}{2}(\eta u i)$ statt u, so erhält man

$$2\sqrt[4]{q}.\cos\tfrac{1}{2}(\eta u).(1+2q^2\cos\eta u+q^4)(1+2q^4\cos\eta u+q^8)(1+2q^6\cos\eta u+q^{12})\ldots$$
$$= \frac{2q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{1}{2}(\eta u)+2q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{1}{2}(3\eta u)+2q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{1}{2}(5\eta u)+2q^{\frac{49}{4}}\cos\frac{1}{2}(7\eta u)\ldots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}.$$

Setzt man hierin $\pi-\eta u$ statt ηu, so erhält man eine ähnliche Gleichung; die Division giebt also

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{snc} u}{1-\operatorname{snc} u}} = \frac{q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{1}{2}(\eta u)+q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{1}{2}(3\eta u)+q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{1}{2}(5\eta u)+q^{\frac{49}{4}}\cos\frac{1}{2}(7\eta u)++\ldots}{q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{1}{2}(\eta u)-q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{1}{2}(3\eta u)+q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{1}{2}(5\eta u)+q^{\frac{49}{4}}\sin\frac{1}{2}(7\eta u)+-\ldots}.$$

Setzt man hierin $K-u$ statt u, so erhält man

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{sn} u}{1-\operatorname{sn} u}} = \frac{q^{\frac{1}{4}}\cos(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}(\eta u))+q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{3}{2}(\frac{1}{2}\pi-\eta u)+q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{5}{2}(\frac{1}{2}\pi-\eta u)\ldots}{q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi-\eta u)-q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{3}{2}(\frac{1}{2}\pi-\eta u)+q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{5}{2}(\frac{1}{2}\pi-\eta u)\ldots}.$$

Bezeichnet man diesen Bruch durch $\frac{P+Q}{P-Q}$, so ist $\mathfrak{L}\operatorname{am} u = \log\frac{P+Q}{P-Q} = 2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{Q}{P}\right)$, also

$$1.\quad \mathfrak{L}\operatorname{am} u =$$
$$2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{1}{2}(\eta u)+q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{1}{2}(3\eta u)-q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{1}{2}(5\eta u)-q^{\frac{49}{4}}\sin\frac{1}{2}(7\eta u)++--\ldots}{q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{1}{2}(\eta u)-p^{\frac{9}{4}}\cos\frac{1}{2}(3\eta u)-q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{1}{2}(5\eta u)+q^{\frac{49}{4}}\cos\frac{1}{2}(7\eta u)+--\ldots}\right).$$

Setzt man qi statt q, so erhält man

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{cn} u}{1-\operatorname{cn} u}} = \cot\tfrac{1}{2}(\eta u)\,\frac{1-2q^2\cos\eta u+q^4}{1+2q^2\cos\eta u+q^4}\cdot\frac{1+2q^4\cos\eta u+q^8}{1-2q^4\cos\eta u+q^8}\cdot\frac{1-2q^6\cos\eta u+q^{12}}{1+2q^6\cos\eta u+q^{12}}\cdots$$

und die Formel (1.) verwandelt sich in

$$2.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\operatorname{amc} u) =$$
$$2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{1}{2}(\eta u)-q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{1}{2}(3\eta u)+q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{1}{2}(5\eta u)-q^{\frac{49}{4}}\sin\frac{1}{2}(7\eta u)+-\ldots}{q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{1}{2}(\eta u)+q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{1}{2}(3\eta u)+q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{1}{2}(5\eta u)+q^{\frac{49}{4}}\cos\frac{1}{2}(7\eta u)+\ldots}\right).$$

Die Formel (12.) §. 195. kann auch wie folgt dargestellt werden:

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{snc} u}{1-\operatorname{snc} u}} = \frac{1}{2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}\cdot\frac{1-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^8}{1-2p^8\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{16}}\cdot\frac{1-2p^{12}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{24}}{1-2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{32}}\cdots$$

Da aber nach Formel (10.) §. 189.

$$(1-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^8)(1-2p^{12}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{24})(1-2p^{20}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{40})\ldots$$
$$= \frac{1-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u-2p^{36}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u+-\ldots}{(1-p^8)(1-p^{16})(1-p^{24}\ldots}$$

und nach Formel (7.) §. 189.

$$2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u(1-2p^8\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{16})(1-2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{32})(1-2p^{24}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{48})\ldots.$$
$$=\frac{2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-2p^9\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'u+2p^{25}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'u+2p^{49}\,\mathfrak{Sin}\,7\eta'u\ldots.}{(1-p^8)(1-p^{16})(1-p^{24})\ldots.}$$

ist, so erhält man

$$3.\quad \mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u=\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{snc}\,u}{1-\mathrm{snc}\,u}}$$
$$=\log\frac{1-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-2p^{36}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'u+2p^{64}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta'u-+\ldots.}{2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-2p^9\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'u+2p^{25}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'u-2p^{49}\,\mathfrak{Sin}\,7\eta'u+-\ldots.}.$$

Die Formel (10.) §. 195. läfst sich wie folgt darstellen:

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{sn}\,u}{1-\mathrm{sn}\,u}}=\sqrt{\frac{1\pm\mathfrak{Tang}\,\eta'u}{1\mp\mathfrak{Tang}\,\eta'u}}\cdot\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta'K+\mathfrak{Tang}\,\eta'u}{\mathfrak{Tang}\,\eta'K-\mathfrak{Tang}\,\eta'u}\cdot\frac{\mathfrak{Tang}\,3\eta'K-\mathfrak{Tang}\,\eta'u}{\mathfrak{Tang}\,3\eta'K+\mathfrak{Tang}\,\eta'u}\cdot\frac{\mathfrak{Tang}\,5\eta'K+\mathfrak{Tang}\,\eta'u}{\mathfrak{Tang}\,5\eta'K-\mathfrak{Tang}\,\eta'u}\ldots$$

Da hier die Factoren nicht nach dem früheren Verfahren vereinigt werden können, so formen wir die Formel um, indem wir sie zunächst wie folgt darstellen:

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u=\log\frac{1-p^4(x^2+x^{-2})+p^{16}(x^4+x^{-4})-p^{36}(x^6+x^{-6})+-\ldots.}{p(x-x^{-1})-p^9(x^3-x^{-3})+p^{25}(x^5-x^{-5})-+\ldots.},$$

$e^{\eta'u}=x$ setzend. Wird nun $K-u$ für u, also $\frac{1}{px}$ für x gesetzt, so erhält man

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u=$$
$$\eta'u+\log\left\{\frac{1-2p^4\,\mathfrak{Cos}(2\eta'K-2\eta'u)+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}(4\eta'K-4\eta'u)-2p^{36}\,\mathfrak{Cos}(6\eta'K-6\eta'u)+-\ldots.}{1-2p^4\,\mathfrak{Cos}(2\eta'K+2\eta'u)+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}(4\eta'K+4\eta'u)-2p^{36}\,\mathfrak{Cos}(6\eta'K+6\eta'u)+-\ldots.}\right\}.$$

Diese Formel läfst sich auch also darstellen:

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u=$$
$$\eta'u+2\,\mathfrak{ArcTang}\left\{\frac{2p^4\,\mathfrak{Sin}\,2\eta'K.\,\mathfrak{Sin}\,2\eta'u-2p^{16}\,\mathfrak{Sin}\,4\eta'K.\,\mathfrak{Sin}\,4\eta'u+2p^{36}\,\mathfrak{Sin}\,6\eta'K.\,\mathfrak{Sin}\,6\eta'u-+\ldots.}{1-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'K.\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'K.\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-2p^{36}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'K.\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'u+-\ldots.}\right\},$$

oder auch

$$4.\quad \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u=$$
$$\eta'u+2\,\mathfrak{ArcTang}\left\{\frac{p^2(1-p^4)\,\mathfrak{Sin}\,2\eta'u-p^{12}(1-p^8)\,\mathfrak{Sin}\,4\eta'u+p^{30}(1-p^{12})\,\mathfrak{Sin}\,6\eta'u-+\ldots.}{1-p^2(1+p^4)\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{12}(1+p^8)\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-p^{30}(1+p^{12})\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'u+-\ldots.}\right\}.$$

Es ist der Formel (16.) §. 195. gemäfs

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{cnc}\,u}{1-\mathrm{cnc}\,u}}=\frac{1+2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-p^2}{1-2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-p^2}\cdot\frac{1-2p^3\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-p^6}{1+2p^3\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-p^6}\cdot\frac{1+2p^5\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-p^{10}}{1-2p^5\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-p^{10}}\ldots.;$$

ferner ist nach Formel (10.) §. 189.

$$(1-2p\,\mathfrak{Cos}\,u+p^2)(1-2p^3\,\mathfrak{Cos}\,u+p^6)(1-2p^5\,\mathfrak{Cos}\,u+p^{10})\ldots.$$
$$=\frac{1-2p\,\mathfrak{Cos}\,u+2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2u-2p^9\,\mathfrak{Cos}\,3u+p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4u-+\ldots.}{(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\ldots.}.$$

Setzt man in dieser Formel pi statt p und $\eta'u+\frac{1}{2}\pi i$ statt u, wodurch sich $\mathfrak{Cos}\,u$ in $i\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u$ verwandelt, so erhält man

$$(1+2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u-p^2)(1-2p^3\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u-p^6)(1+2p^5\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u-p^{10})\ldots$$
$$=\frac{1+2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u-2p^9\,\mathfrak{Sin}\,3\eta u+p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u+p^{25}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u--\ldots}{(1+p^2)(1-p^4)(1+p^6)\ldots}.$$

Setzt man in dieser Formel $-u$ statt u, und dividirt die vorige Formel durch die neue, so erhält man

$$\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{amc}\,u)=$$
$$\log\frac{1+2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u-2p^9\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u+2p^{25}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u--++\ldots}{1-2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+2p^9\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u-2p^{25}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u-\ldots}.$$

Stellt man das Glied auf der rechten Seite durch $\log\frac{P+Q}{P-Q}$ vor, so hat man

$$5.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{amc}\,u)=$$
$$2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u-2p^9\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u+2p^{25}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u-2p^{49}\,\mathfrak{Sin}\,7\eta' u+-\ldots}{1-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u-2p^{36}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u+2p^{64}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta' u-+\ldots}\right).$$

Die Formel (17.) §. 195. läſst sich also darstellen:

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{cn}\,u}{1-\mathrm{cn}\,u}}=\mathfrak{Cot}\,\tfrac{1}{2}(\eta u).\frac{1-2p^2\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u+p^4}{1+2p^2\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u+p^4}.\frac{1+2p^4\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u+p^8}{1-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u+p^8}.\frac{1-2p^6\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u+p^{12}}{1+2p^6\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u+p^{12}}\ldots$$

Da aber nach dem Zusatze zu §. 189.

$$2\sqrt[4]{p}.\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\eta u).(1+2p^2\mathfrak{Cos}\,\eta' u+p^4)(1+2p^4\mathfrak{Cos}\,\eta' u+p^8)(1+2p^6\mathfrak{Cos}\,\eta' u+p^{12})\ldots$$
$$=\frac{2p^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\eta' u)+2p^{\frac{9}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}(3\eta' u)+2p^{\frac{25}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}(5\eta' u)+\ldots}{(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\ldots}\quad\text{und}$$

$$2\sqrt[4]{p}.\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\eta' u).(1-2p^2\mathfrak{Cos}\,\eta' u+p^4)(1-2p^4\mathfrak{Cos}\,\eta' u+p^8)(1-2p^6\mathfrak{Cos}\,\eta' u+p^{12})\ldots$$
$$=\frac{2p^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\eta' u)-2p^{\frac{9}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}(3\eta' u)+2p^{\frac{25}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}(5\eta' u)-+\ldots}{(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\ldots}$$

ist, so erhält man, wenn man die erste Gleichung durch die zweite dividirt, und dann pi für p setzt,

$$6.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{am}\,u)=\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{cn}\,u}{1-\mathrm{cn}\,u}}=$$
$$\log\left\{\frac{p^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\eta' u)-p^{\frac{9}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}(3\eta' u)-p^{\frac{25}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}(5\eta' u)+p^{\frac{49}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}(7\eta' u)+--\ldots}{p^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\eta' u)+p^{\frac{9}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}(3\eta' u)-p^{\frac{25}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}(5\eta' u)-p^{\frac{49}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}(7\eta' u)++\ldots}\right\},$$

oder auch

$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\mathrm{am}\,u$$
$$=\frac{p^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\eta' u)+p^{\frac{9}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}(3\eta' u)-p^{\frac{25}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}(5\eta' u)-p^{\frac{49}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}(7\eta' u)++--\ldots}{p^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\eta' u)-p^{\frac{9}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}(3\eta' u)-p^{\frac{25}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}(5\eta' u)+p^{\frac{49}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}(7\eta' u)+--\ldots};$$

und diese Formel verwandelt sich, wenn ui statt u gesetzt wird, und die beiden conjugirten Moduln mit einander vertauscht werden, in

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}u$$
$$=\frac{q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{1}{2}(\eta u)+q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{1}{2}(3\eta u)-q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{1}{2}(5\eta u)-q^{\frac{49}{4}}\sin\frac{1}{2}(7\eta u)++\dots}{q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{1}{2}(\eta u)-q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{1}{2}(3\eta u)-q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{1}{2}(5\eta u)-q^{\frac{49}{4}}\cos\frac{1}{2}(7\eta u)+--\dots},$$

Stellt man die obige Formel (5.) durch $\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi-\operatorname{amc}u)=2\,\mathfrak{Arc\,Tang}(U)$ vor, so ist rückwärts $U=\mathfrak{Tang}\,\frac{1}{2}\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi-\operatorname{amc}u)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi-\operatorname{amc}u)$, daher ist

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\operatorname{amc}u)$$
$$=\frac{2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-2p^{9}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'u+2p^{25}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'u-2p^{49}\,\mathfrak{Sin}\,7\eta'u+-\dots}{1-2p^{4}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-2p^{36}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'u+2p^{64}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta'u-+\dots},$$

und die Formel (2.) kann noch also dargestellt werden:

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\operatorname{amc}u)$$
$$=\frac{q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{1}{2}(\eta u)-q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{1}{2}(3\eta u)+q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{1}{2}(5\eta u)-q^{\frac{49}{4}}\sin\frac{1}{2}(7\eta u)+-\dots}{q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{1}{2}(\eta u)+q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{1}{2}(3\eta u)+q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{1}{2}(5\eta u)+q^{\frac{49}{4}}\cos\frac{1}{2}(7\eta u)+-\dots}.$$

Daher ist rückwärts

7. $\operatorname{amc}u=$

$$\tfrac{1}{2}\pi-2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{1}{2}(\eta u)-q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{1}{2}(3\eta u)+q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{1}{2}(5\eta u)-q^{\frac{49}{4}}\sin\frac{1}{2}(7\eta u)+-\dots}{q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{1}{2}(\eta u)+q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{1}{2}(3\eta u)+q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{1}{2}(5\eta u)+q^{\frac{49}{4}}\cos\frac{1}{2}(7\eta u)+-\dots}\right),$$

8. $\operatorname{amc}u=$

$$\tfrac{1}{2}\pi-2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-2p^{9}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'u+2p^{25}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'u-2p^{49}\,\mathfrak{Sin}\,7\eta'u+-\dots}{1-2p^{4}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-2p^{36}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'u+2p^{64}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta'u-+\dots}\right),$$

9. $\operatorname{am}u=$

$$2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{1}{2}(\eta u)+q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{1}{2}(3\eta u)-q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{1}{2}(5\eta u)-q^{\frac{49}{4}}\sin\frac{1}{2}(7\eta u)++\dots}{q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{1}{2}(\eta u)-q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{1}{2}(3\eta u)-q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{1}{2}(5\eta u)+q^{\frac{49}{4}}\cos\frac{1}{2}(7\eta u)+-\dots}\right),$$

10. $\operatorname{am}u=$

$$2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{p^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(\eta'u)+p^{\frac{9}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(3\eta'u)-p^{\frac{25}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(5\eta'u)-p^{\frac{49}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(7\eta'u)++\dots}{p^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}(\eta'u)-p^{\frac{9}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}(3\eta'u)-p^{\frac{25}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}(5\eta'u)+p^{\frac{49}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}(7\eta'u)+-\dots}\right).$$

Für $\operatorname{am}u=2\operatorname{arc\,tang}(U)$ kann auch $\mathfrak{L}\operatorname{am}u=2\,\mathfrak{Arc\,Tang}(U)$ geschrieben werden: daher dienen die Formeln (9.) und (10.) auch zur Bestimmung von $\mathfrak{L}\operatorname{am}u$, wenn man nur die Vorsylben arc tang in $\mathfrak{Arc\,Tang}$ abändert.

Da $\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi-\operatorname{amc}u)=\log\sqrt{\frac{1+\operatorname{cnc}u}{1-\operatorname{cnc}u}}=\log\cot\frac{1}{2}\operatorname{amc}u$ ist, so kann statt der Formel (8.) auch genommen werden

$$\operatorname{amc}u=$$
$$2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1-2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-2p^{4}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+2p^{9}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'u+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-2p^{25}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'u\dots}{1+2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-2p^{4}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u-2p^{9}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'u+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u+2p^{25}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'u\dots}\right).$$

§. 198.

Setzt man in der Formel (10.) pi statt p, so erhält man

$$11. \quad \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) =$$

$$2 \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{p^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\eta' u) - p^{\frac{9}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}(3\eta' u) + p^{\frac{25}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}(5\eta' u) - p^{\frac{49}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}(7\eta' u) + - \ldots}{p^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\eta' u) + p^{\frac{9}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}(3\eta' u) + p^{\frac{25}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}(5\eta' u) + p^{\frac{49}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}(7\eta' u) + + \ldots}\right),$$

und auf der linken Seite kann man $\mathfrak{L}\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$ statt $\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$ setzen, wenn man auf der rechten Seite die Vorsylben arc tang in $\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}$ verwandelt. Vertauscht man in der Formel (8.) die conjugirten Moduln mit einander, indem man ui statt i setzt, so erhält man

$$\mathfrak{L}\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) =$$

$$2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{2q \sin\eta u - 2q^9 \sin 3\eta u + 2q^{25} \sin 5\eta u - 2q^{49} \sin 7\eta u + - \ldots}{1 - 2q^4 \cos 2\eta u + 2q^{16} \cos 4\eta u - 2q^{36} \cos 6\eta u + 2q^{64} \cos 8\eta u - + \ldots}\right),$$

oder auch

$$12. \quad \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) =$$

$$2 \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2q \sin\eta u - 2q^9 \sin 3\eta u + 2q^{25} \sin 5\eta u - 2q^{49} \sin 7\eta u + - \ldots}{1 - 2q^4 \cos 2\eta u + 2q^{16} \cos 4\eta u - 2q^{36} \cos 6\eta u + 2q^{64} \cos 8\eta u - + \ldots}\right).$$

Es kann aber die vorhergehende Formel auch also dargestellt werden:

$$\sqrt{\left(\frac{1 + k \operatorname{sn} u}{1 - k \operatorname{sn} u}\right)} = \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)\right)$$

$$= \frac{1 + 2q \sin\eta u - 2q^4 \cos 2\eta u - 2q^9 \sin 3\eta u + 2q^{16} \cos 4\eta u + 2q^{25} \sin 5\eta u \ldots}{1 - 2q \sin\eta u - 2q^4 \cos 2\eta u + 2q^9 \sin 3\eta u + 2q^{16} \cos 4\eta u - 2q^{25} \sin 5\eta u \ldots},$$

oder

$$13. \quad \sqrt{\frac{1 + k \operatorname{snc} u}{1 - k \operatorname{snc} u}}$$

$$= \frac{1 + 2q \cos\eta u + 2q^4 \cos 2\eta u + 2q^9 \cos 3\eta u + 2q^{16} \cos 4\eta u + 2q^{25} \cos 5\eta u \ldots}{1 - 2q \cos\eta u + 2q^4 \cos 2\eta u - 2q^9 \cos 3\eta u + 2q^{16} \cos 4\eta u - 2q^{25} \cos 5\eta u \ldots}$$

$$= \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\operatorname{am}\left(k(K - u), \frac{1}{k}\right)\right).$$

Da $\sqrt{\frac{1 - \operatorname{dn} u}{1 + \operatorname{dn} u}} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$ ist, so kann die Formel (11.) auch also dargestellt werden:

$$14. \quad \sqrt{\frac{1 - \operatorname{dn} u}{1 + \operatorname{dn} u}}$$

$$= \frac{p^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\eta' u) - p^{\frac{9}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}(3\eta' u) + p^{\frac{25}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}(5\eta' u) - p^{\frac{49}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}(7\eta' u) + - \ldots}{p^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\eta' u) + p^{\frac{9}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}(3\eta' u) + p^{\frac{25}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}(5\eta' u) + p^{\frac{49}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}(7\eta' u) + + \ldots},$$

und eben so verwandelt sich (12.) in

$$15.\quad \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}} = \frac{2q\ \sin\eta u - 2q^9\ \sin 3\eta u + 2q^{25}\sin 5\eta u - 2q^{49}\sin 7\eta u + - \ldots.}{1-2q^4\cos 2\eta u + 2q^{16}\cos 4\eta u - 2q^{36}\cos 6\eta u + 2q^{64}\cos 8\eta u - + \ldots,}.$$

Setzt man in (13.) ui statt u, indem man die conjugirten Moduln vertauscht, so erhält man

$$16.\quad \sqrt{\frac{1-\operatorname{dnc} u}{1+\operatorname{dnc} u}} = \frac{1-2p\,\mathfrak{Cos}\eta' u + 2p^4\,\mathfrak{Cos}2\eta' u - 2p^9\,\mathfrak{Cos}3\eta' u + 2p^{16}\,\mathfrak{Cos}5\eta' u - + \ldots.}{1+2p\,\mathfrak{Cos}\eta' u + 2p^4\,\mathfrak{Cos}2\eta' u + 2p^9\,\mathfrak{Cos}3\eta' u + 2p^{16}\,\mathfrak{Cos}5\eta' u + + \ldots},$$

und da $\log\sqrt{\frac{1+\operatorname{dnc} u}{1-\operatorname{dnc} u}} = \mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)\right)$ ist, so ist

$$\mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)\right)$$

$$= 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{2p\ \mathfrak{Cos}\,\eta' u + 2p^9\ \mathfrak{Cos}\,3\eta' u + 2p^{25}\,\mathfrak{Cos}\,5\eta' u + \ldots}{1+2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + 2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u + 2p^{36}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u + \ldots}\right),$$

oder auch

$$17.\quad \operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi - 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2p\ \mathfrak{Cos}\,\eta' u + 2p^9\ \mathfrak{Cos}\,3\eta' u + 2p^{25}\,\mathfrak{Cos}\,5\eta' u + \ldots}{1+2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + 2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u + 2p^{36}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u + \ldots}\right).$$

§. 199.

Zweite Darstellung der Modular-Functionen in unendlichen Reihen.

Da $\partial\mathfrak{L}\operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right) = -k\operatorname{sn} u.\partial u$ ist, so erhält man, wenn man die Formel (22.) §. 196. differenziirt, die Reihe

$$1.\quad k\operatorname{sn} u = \frac{2\eta\,\mathfrak{Cos}\,\eta K'.\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\eta K' - \cos^2\eta u} + \frac{2\eta\,\mathfrak{Cos}\,3\eta K'.\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 5\eta K' - \cos^2\eta u} + \frac{2\eta\,\mathfrak{Cos}\,5\eta K'.\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 5\eta K' - \cos^2\eta u} + \ldots.$$

Die Formeln (25.) und (24.) §. 196. geben, differenziirt,

$$2.\quad k\operatorname{sn} u =$$

$$\eta'\mathfrak{Tang}\,\eta' u - \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}4\eta' K + \mathfrak{Cos}2\eta' u} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}8\eta' K + \mathfrak{Cos}2\eta' u} - \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}12\eta' K + \mathfrak{Cos}2\eta' u} + - \ldots,$$

$$3.\quad k\operatorname{snc} u =$$

$$\pm\eta' + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' K}{\mathfrak{Cos}2\eta' K + \mathfrak{Cos}2\eta' u} - \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,6\eta' K}{\mathfrak{Cos}6\eta' K + \mathfrak{Cos}2\eta' u} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,10\eta' K}{\mathfrak{Cos}10\eta' K + \mathfrak{Cos}2\eta' u} - + \ldots,$$

und in dieser Reihe gilt das obere Vorzeichen vor $\pm\eta$, wenn man die Reihe mit einem negativen Gliede, und das untere Vorzeichen, wenn man sie mit einem positiven Gliede abbricht. Da $\partial\log\sqrt{\frac{1+\operatorname{snc} u}{1-\operatorname{snc} u}} = \partial\,\mathfrak{L}\operatorname{amc} u = -\frac{\partial u}{\operatorname{sn} u}$ ist, so geben die Formeln (9.), (12.) und (10.) §. 195., differenziirt,

4. $$\frac{1}{\operatorname{sn} u} = \frac{\eta}{\sin \eta u} + \frac{2\eta \operatorname{Cos} 2\eta K' . \sin \eta u}{\operatorname{Cos}^2 2\eta K' - \cos^2 \eta u} + \frac{2\eta \operatorname{Cos} 4\eta K' . \sin \eta u}{\operatorname{Cos}^2 4\eta K' - \cos^2 \eta u} + \frac{2\eta \operatorname{Cos} 6\eta K' . \sin \eta u}{\operatorname{Cos}^2 6\eta K' - \cos^2 \eta u} + \dots,$$

5. $$\frac{1}{\operatorname{sn} u} = \frac{\eta'}{\operatorname{Tang} \eta' u} + \frac{2\eta' \operatorname{Sin} 2\eta' u}{\operatorname{Cos} 4\eta' K - \operatorname{Cos} 2\eta' u} - \frac{2\eta' \operatorname{Sin} 2\eta' u}{\operatorname{Cos} 8\eta' K - \operatorname{Cos} 2\eta' u} + \frac{2\eta' \operatorname{Sin} 2\eta' u}{\operatorname{Cos} 12\eta' K - \operatorname{Cos} 2\eta' u} - + \dots,$$

6. $$\frac{1}{\operatorname{snc} u} = \pm \eta' + \frac{\eta' \operatorname{Sin} 2\eta' K}{\operatorname{Sin}(\eta' K + \eta' u) \operatorname{Sin}(\eta' K - \eta' u)} - \frac{\eta' \operatorname{Sin} 6\eta' K}{\operatorname{Sin}(3\eta' K + \eta' u) \operatorname{Sin}(3\eta' K - \eta' u)} + \frac{\eta' \operatorname{Sin} 10\eta' K}{\operatorname{Sin}(5\eta' K + \eta' u) \operatorname{Sin}(5\eta' K - \eta' u)} - + \dots$$

Auch in dieser Reihe mufs das Vorzeichen vor dem Anfangsgliede η' immer dem Vorzeichen des Gliedes entgegengesetzt sein, mit welchem man die Reihe abbricht. Die Reihen (2.), (3.), (5.) gestatten noch eine einfachere Darstellung, da man ihre Nenner in Producte verwandeln kann. Es ist

$$k \operatorname{sn} u = \eta' \operatorname{Tang} \eta' u - \frac{\eta' \operatorname{Sin} 2\eta' u}{\operatorname{Cos}(2\eta' K + \eta' u) \operatorname{Cos}(2\eta' K - \eta' u)} + \frac{\eta' \operatorname{Sin} 2\eta' u}{\operatorname{Cos}(4\eta' K + \eta' u) \operatorname{Cos}(4\eta' K - \eta' u)} - \frac{\eta' \operatorname{Sin} 2\eta' u}{\operatorname{Cos}(6\eta' K + \eta' u) \operatorname{Cos}(6\eta' K - \eta' u)} + - \dots,$$

$$k \operatorname{snc} u = \pm \eta' + \frac{\eta' \operatorname{Sin} 2\eta' K}{\operatorname{Cos}(\eta' K + \eta' u) \operatorname{Cos}(\eta' K - \eta' u)} - \frac{\eta' \operatorname{Sin} 6\eta' K}{\operatorname{Cos}(3\eta' K + \eta' u) \operatorname{Cos}(3\eta' K - \eta' u)} + \frac{\eta' \operatorname{Sin} 10\eta' K}{\operatorname{Cos}(5\eta' K + \eta' u) \operatorname{Cos}(5\eta' K - \eta' u)} - + \dots,$$

$$\frac{1}{\operatorname{sn} u} = \frac{\eta'}{\operatorname{Tang} \eta' u} + \frac{\eta' \operatorname{Sin} 2\eta' u}{\operatorname{Sin}(2\eta' K + \eta' u) \operatorname{Sin}(2\eta' K - \eta' u)} - \frac{\eta' \operatorname{Sin} 2\eta' u}{\operatorname{Sin}(4\eta' K + \eta' u) \operatorname{Sin}(4\eta' K - \eta' u)} + \frac{\eta' \operatorname{Sin} 2\eta' u}{\operatorname{Sin}(6\eta' K + \eta' u) \operatorname{Cos}(6\eta' K - \eta' u)} - + \dots$$

Da $\partial \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = k \operatorname{cn} u . \partial u$ ist, so geben die Reihen (18.), (20.) und (21.) §. 195., differenziirt,

7. $$k \operatorname{cn} u = \frac{2\eta \operatorname{Sin} \eta K' . \cos \eta u}{\operatorname{Sin}^2 \eta K' + \sin^2 \eta u} - \frac{2\eta \operatorname{Sin} 3\eta K' . \cos \eta u}{\operatorname{Sin}^2 3\eta K' + \sin^2 \eta u} + \frac{2\eta \operatorname{Sin} 5\eta K' . \cos \eta u}{\operatorname{Sin}^2 6\eta K' + \sin^2 \eta u} - + \dots,$$

8. $$k \operatorname{cn} u = \frac{\eta'}{\operatorname{Cos} \eta' u} + \frac{2\eta' \operatorname{Cos} 2\eta' K . \operatorname{Cos} \eta' u}{\operatorname{Cos}(2\eta' K + \eta' u) \operatorname{Cos}(2\eta' K - \eta' u)} + \frac{2\eta' \operatorname{Cos} 4\eta' K . \operatorname{Cos} \eta' u}{\operatorname{Cos}(4\eta' K + \eta' u) \operatorname{Cos}(4\eta' K - \eta' u)} - \frac{2\eta' \operatorname{Cos} 6\eta' K . \operatorname{Cos} \eta' u}{\operatorname{Cos}(6\eta' K + \eta' u) \operatorname{Cos}(6\eta' K - \eta' u)} + - \dots,$$

9. $$k \operatorname{cnc} u = \frac{2\eta' \operatorname{Sin} \eta' K . \operatorname{Sin} \eta' u}{\operatorname{Cos}(\eta' K + \eta' u) \operatorname{Cos}(\eta' K - \eta' u)} - \frac{2\eta' \operatorname{Sin} 3\eta' K . \operatorname{Sin} \eta' u}{\operatorname{Cos}(3\eta' K + \eta' u) \operatorname{Cos}(3\eta' K - \eta' u)} + \frac{2\eta' \operatorname{Sin} 5\eta' K . \operatorname{Sin} \eta' u}{\operatorname{Cos}(5\eta' K + \eta' u) \operatorname{Cos}(5\eta' K - \eta' u)} - + \dots$$

Da $\partial\,\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u) = \frac{k'}{\mathrm{cn}\,u}.\,\partial u$ ist, so geben die Reihen (14.), (16.) und (17.) §. 195., differenziirt,

$$10.\quad \frac{k'}{\mathrm{cn}\,u} = \frac{\eta}{\cos\eta u} - \frac{2\eta\,\mathfrak{Cos}\,2\eta K'.\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\,2\eta K' - \sin^2\eta u} + \frac{2\eta\,\mathfrak{Cos}\,4\eta K'.\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\,4\eta K' - \sin^2\eta u} - \frac{2\eta\,\mathfrak{Cos}\,6\eta K'.\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\,6\eta K' - \sin^2\eta u} + - \ldots,$$

$$11.\quad \frac{k'}{\mathrm{cn}\,u} = \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,\eta' K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}(\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Sin}(\eta' K - \eta' u)} - \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}(3\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Sin}(3\eta' K - \eta' u)} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}(5\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Sin}(5\eta' K - \eta' u)} - + \ldots,$$

$$12.\quad \frac{k'}{\mathrm{cnc}\,u} = \frac{\eta'}{\mathfrak{Sin}\,\eta' u} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}(2\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Sin}(2\eta' K - \eta' u)} - \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}(4\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Sin}(4\eta' K - \eta' u)} - \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}(6\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Sin}(6\eta' K - \eta' u)} + - \ldots$$

Differenziirt man die Formeln (3.), (4.) und (6.) §. 195., so erhält man

$$13.\quad \mathrm{dn}\,u = \pm\eta + \frac{\eta\,\mathfrak{Sin}\,2\eta K'}{\mathfrak{Sin}^2\,\eta K' + \sin^2\eta u} - \frac{\eta\,\mathfrak{Sin}\,6\eta K'}{\mathfrak{Sin}^2\,3\eta K' + \sin^2\eta u} + \frac{\eta\,\mathfrak{Sin}\,10\eta K'}{\mathfrak{Sin}^2\,5\eta K' + \sin^2\eta u} - + \ldots,$$

$$14.\quad \mathrm{dn}\,u = \frac{\eta'}{\mathfrak{Cos}\,\eta' u} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}(2\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Cos}(2\eta' K - \eta' u)} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}(4\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Cos}(4\eta' K - \eta' u)} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}(6\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Cos}(6\eta' K - \eta' u)} + \ldots,$$

$$15.\quad \mathrm{dnc}\,u = \frac{2\,\mathfrak{Cos}\,\eta' K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u.}{\mathfrak{Cos}(\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Cos}(\eta' K - \eta' u)} + \frac{2\,\mathfrak{Cos}\,3\eta' K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}(3\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Cos}(3\eta' K - \eta' u)} + \frac{2\,\mathfrak{Cos}\,5\eta' K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}(5\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Cos}(5\eta' K - \eta' u)} + \ldots$$

Da endlich $\partial \log \sqrt{\frac{1+\mathrm{dnc}\,u}{1-\mathrm{dnc}\,u}} = \mathfrak{L}\left(\frac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)\right) = k'\,\mathrm{tn}\,u.\,\partial u$ ist, so erhalten wir

$$16.\quad k'\,\mathrm{tn}\,u = \eta\,\mathrm{tang}\,\eta u - \frac{2\eta\,\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K' + \cos 2\eta u} + \frac{2\eta\,\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K' + \cos 2\eta u} - \frac{2\eta\,\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,12\eta K' + \cos 2\eta u} + - \ldots,$$

$$17.\quad k'\,\mathrm{tn}\,u = \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,\eta' K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}(\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Sin}(\eta' K - \eta' u)} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,3\eta' K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}(3\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Sin}(3\eta' K - \eta' u)} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,5\eta' K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}(5\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Sin}(5\eta' K - \eta' u)} + \ldots,$$

$$18.\quad k'\,\mathrm{tnc}\,u = \frac{\eta'}{\mathfrak{Sin}\,\eta' u} - \frac{2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}(2\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Sin}(2\eta' K - \eta' u)} - \frac{2\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}(4\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Sin}(4\eta' K - \eta' u)} - \frac{2\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}(6\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Sin}(6\eta' K - \eta' u)} - \ldots$$

§. 200.

Die Differenzial-Verhältnisse der Logarithmen der acht Hülfs-Functionen, als eben so viele neue oder abgeleitete Functionen.

Da $\mathrm{Al}\,o = o$ und $\mathrm{Al}(K) = \sqrt{k}$ ist, so wächst $\mathrm{Al}(u)$ und mithin auch $\log \mathrm{Al}(u)$ zwischen den Grenzen $u = o$ und $u = K$ gleichzeitig mit u; und gleichzeitig nimmt $\mathrm{Bl}(u)$ und mithin auch $\log \mathrm{Bl}(u)$ ab. Hieraus folgt, dafs $\frac{\partial \log \mathrm{Al}\,u}{\partial u}$ zwischen den genannten Grenzen positiv und $\frac{\partial \log \mathrm{Bl}(u)}{\partial u}$ zwischen denselben Grenzen negativ ist. Wir setzen also

$$1.\quad \begin{cases} \mathrm{A}(u) = \dfrac{\partial \log \mathrm{Al}\,u}{\partial u} = \dfrac{1}{\mathrm{Al}\,u}\cdot\dfrac{\partial \mathrm{Al}\,u}{\partial u}, \\ \mathrm{B}(u) = -\dfrac{\partial \log \mathrm{Bl}\,u}{\partial u} = \dfrac{-1}{\mathrm{Bl}\,u}\cdot\dfrac{\partial \mathrm{Bl}\,u}{\partial u}. \end{cases}$$

Da $\mathrm{Hl}\,o = \sqrt{k'}$ und $\mathrm{Hl}(K) = 1$ ist, so wächst also $\log \mathrm{Hl}\,u$ zwischen den genannten Grenzen, und $\mathrm{Gl}(u)$ nimmt gleichzeitig ab. Daher setzen wir

$$2.\quad \begin{cases} \mathrm{G}(u) = -\dfrac{\partial \log \mathrm{Gl}(u)}{\partial u} = -\dfrac{1}{\mathrm{Gl}\,u}\cdot\dfrac{\partial \mathrm{Gl}\,u}{\partial u}, \\ \mathrm{H}(u) = \dfrac{\partial \log \mathrm{Hl}(u)}{\partial u} = \dfrac{1}{\mathrm{Hl}\,u}\cdot\dfrac{\partial \mathrm{Hl}\,u}{\partial u}. \end{cases}$$

Die Reihen (6.) §. 174. geben hiernach

$$3.\quad \begin{cases} \mathrm{A}(u) = \dfrac{\eta}{\mathrm{tang}\,\eta u} + \dfrac{2\eta^2.q^2.\sin 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \dfrac{2\eta q^4.\sin 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} + \dfrac{2\eta q^6.\sin 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} + \dfrac{2\eta q^8.\sin 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} + \ldots, \\ \mathrm{B}(u) = \eta\,\mathrm{tang}\,\eta u + \dfrac{2\eta q^2.\sin 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} - \dfrac{2\eta q^4.\sin 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} + \dfrac{2\eta q^6.\sin 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} - \dfrac{2\eta q^8.\sin 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} + - \ldots \\ \mathrm{G}(u) = \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} - \dfrac{2\eta \sin 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} + \dfrac{2\eta \sin 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} - \dfrac{2\eta \sin 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} + - \ldots, \\ \mathrm{H}(u) = \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \dfrac{2\eta \sin 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} + \dfrac{2\eta \sin 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} + \dfrac{2\eta \sin 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} + + \ldots, \end{cases}$$

so dafs wieder $\mathrm{A}(K-u) = \mathrm{B}(u)$, $\mathrm{B}(K-u) = \mathrm{A}(u)$, $\mathrm{G}(K-u) = \mathrm{H}(u)$ und $\mathrm{H}(K-u) = \mathrm{G}(u)$ ist. Die Formeln (1.), (2.), (3.), (4.) §. 187. geben

$$4.\quad \begin{cases} \mathrm{A}(u) = \dfrac{\eta}{\mathrm{tang}\,\eta u} + \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K' - \cos 2\eta u} + \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K' - \cos 2\eta u} \\ \qquad\qquad + \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,12\eta K' - \cos 2\eta u} + \ldots, \\ \mathrm{B}(u) = \eta\,\mathrm{tang}\,\eta u + \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K' + \cos 2\eta u} + \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K' + \cos 2\eta u} \\ \qquad\qquad + \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,12\eta K' + \cos 2\eta u} + \ldots, \\ \mathrm{G}(u) = \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K' + \cos 2\eta u} + \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K' + \cos 2\eta u} + \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,10\eta K' + \cos 2\eta u} + \ldots, \\ \mathrm{H}(u) = \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K' - \cos 2\eta u} + \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K' - \cos 2\eta u} + \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,10\eta K' - \cos 2\eta u} + \ldots \end{cases}$$

Die Formeln (3.) und (4.) §. 189. und die Formeln (5.) und (6.) §. 188. geben

$$
5.\quad\begin{cases}
A(u)=\dfrac{\eta\,(q^{\frac{1}{4}}\cos\eta u-3q^{\frac{9}{4}}\cos3\eta u+5q^{\frac{25}{4}}\cos5\eta u-7q^{\frac{49}{4}}\cos7\eta u+9q^{\frac{81}{4}}\cos9\eta u-+\ldots)}{q^{\frac{1}{4}}\sin\eta u-q^{\frac{9}{4}}\sin3\eta u+q^{\frac{25}{4}}\sin5\eta u-q^{\frac{49}{4}}\sin7\eta u+q^{\frac{81}{4}}\sin9\eta u-+\ldots},\\[2ex]
B(u)=\dfrac{\eta\,(q^{\frac{1}{4}}\sin\eta u+3q^{\frac{9}{4}}\sin3\eta u+5q^{\frac{25}{4}}\sin5\eta u+7q^{\frac{49}{4}}\sin7\eta u+9q^{\frac{81}{4}}\sin9\eta u+\ldots)}{q^{\frac{1}{4}}\cos\eta u+q^{\frac{9}{4}}\cos3\eta u+q^{\frac{25}{4}}\cos5\eta u+q^{\frac{49}{4}}\cos7\eta u+q^{\frac{81}{4}}\cos9\eta u+\ldots},\\[2ex]
G(u)=\dfrac{2\eta\,(2q^{2}\sin2\eta u+4q^{8}\sin4\eta u+6q^{18}\sin6\eta u+8q^{32}\sin8\eta u+10q^{50}\sin10\eta u+\ldots)}{1+2q^{2}\cos2\eta u+2q^{4}\cos4\eta u+2q^{18}\cos6\eta u+2q^{32}\cos8\eta u+2q^{50}\cos10\eta u+\ldots},\\[2ex]
H(u)=\dfrac{2\eta\,(2q^{2}\sin2\eta u-4q^{8}\sin4\eta u+6q^{18}\sin6\eta u-8q^{32}\sin8\eta u+10q^{50}\sin10\eta u-+\ldots)}{1-2q^{2}\cos2\eta u+2q^{4}\cos4\eta u-2q^{18}\cos6\eta u+2q^{32}\cos8\eta u-2q^{50}\cos10\eta u+-\ldots}.
\end{cases}
$$

Die drei Functionen $\mathfrak{Al}'u$, $\mathfrak{Bl}'u$ und $\mathfrak{Gl}'u$ wachsen gleichzeitig mit u; da aber $\mathfrak{Hl}'o=\sqrt{k}$ und $\mathfrak{Hl}'K=o$ ist, so nimmt $\mathfrak{Hl}'u$ ab, wenn u wächst. Aus dem angeführten Grunde setzen wir

$$
6.\quad\begin{cases}
\mathfrak{A}'(u)=\dfrac{\partial\log\mathfrak{Al}'u}{\partial u}=\dfrac{1}{\mathfrak{Al}'u}\cdot\dfrac{\partial\,\mathfrak{Al}'u}{\partial u},\\[2ex]
\mathfrak{B}'(u)=\dfrac{\partial\log\mathfrak{Bl}'u}{\partial u}=\dfrac{1}{\mathfrak{Bl}'u}\cdot\dfrac{\partial\,\mathfrak{Bl}'u}{\partial u},\\[2ex]
\mathfrak{G}'(u)=\dfrac{\partial\log\mathfrak{Gl}'u}{\partial u}=\dfrac{1}{\mathfrak{Gl}'u}\cdot\dfrac{\partial\,\mathfrak{Gl}'u}{\partial u},\\[2ex]
\mathfrak{H}'(u)=-\dfrac{\partial\log\mathfrak{Hl}'u}{\partial u}=-\dfrac{1}{\mathfrak{Hl}'u}\cdot\dfrac{\partial\,\mathfrak{Hl}'u}{\partial u}.
\end{cases}
$$

Wird der Modul mit dem conjugirten vertauscht, so ändern wir $\mathfrak{A}'(u)$, $\mathfrak{B}'(u)$, $\mathfrak{G}'(u)$ und $\mathfrak{H}'(u)$ in $\mathfrak{A}(u)$, $\mathfrak{B}(u)$, $\mathfrak{G}(u)$, $\mathfrak{H}(u)$ ab. Aus den Reihen (5.) §. 174. leiten wir nun her:

$$
7.\quad\begin{cases}
\mathfrak{A}'(u)=\dfrac{\eta'}{\mathfrak{Tang}\,\eta'u}-\dfrac{2\eta'p^{2}\,\mathfrak{Sin}2\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-\dfrac{2\eta'p^{4}\,\mathfrak{Sin}4\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta'K}+\dfrac{2\eta'p^{6}\,\mathfrak{Sin}6\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}\\
\qquad\qquad-\dfrac{2\eta'p^{8}\,\mathfrak{Sin}8\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta'K}-\ldots,\\[2ex]
\mathfrak{B}'(u)=\eta'\,\mathfrak{Tang}\,\eta'u+\dfrac{2\eta'p^{2}\,\mathfrak{Sin}2\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-\dfrac{2\eta'p^{4}\,\mathfrak{Sin}4\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta'K}+\dfrac{2\eta'p^{6}\,\mathfrak{Sin}6\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}\\
\qquad\qquad-\dfrac{2\eta'p^{8}\,\mathfrak{Sin}8\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta'K}+-\ldots,\\[2ex]
\mathfrak{G}'(u)=\dfrac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}2\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-\dfrac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}4\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta'K}+\dfrac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}6\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}-\dfrac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}8\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta'K}+-\ldots,\\[2ex]
\mathfrak{H}'(u)=\dfrac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}2\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}+\dfrac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}4\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta'K}+\dfrac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}6\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}+\dfrac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}8\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta'K}++\ldots
\end{cases}
$$

Differenziirt man aber die Formeln (5.) bis (8.) §. 187. logarithmisch, so erhält man

$$8.\begin{cases}
\mathfrak{A}'(u) = \eta' \,\mathfrak{Cot}\, \eta' u - \dfrac{\eta' \,\mathfrak{Sin}\, 2\eta' u}{\mathfrak{Sin}(2\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Sin}(2\eta' K - \eta' u)} \\
\qquad - \dfrac{\eta' \,\mathfrak{Sin}\, 2\eta' u}{\mathfrak{Sin}(4\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Sin}(4\eta' K - \eta' u)} - \dfrac{\eta' \,\mathfrak{Sin}\, 2\eta' u}{\mathfrak{Sin}(6\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Sin}(6\eta' K - \eta' u)} - \ldots, \\
\mathfrak{B}'(u) = \eta' \,\mathfrak{Tang}\, \eta' u + \dfrac{\eta' \,\mathfrak{Sin}\, 2\eta' u}{\mathfrak{Cos}(2\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Cos}(2\eta' K - \eta' u)} \\
\qquad + \dfrac{\eta' \,\mathfrak{Sin}\, 2\eta' u}{\mathfrak{Cos}(4\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Cos}(4\eta' K - \eta' u)} + \dfrac{\eta' \,\mathfrak{Sin}\, 2\eta' u}{\mathfrak{Cos}(6\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Cos}(6\eta' K - \eta' u)} + \ldots, \\
\mathfrak{G}'(u) = \dfrac{\eta' \,\mathfrak{Sin}\, 2\eta' u}{\mathfrak{Cos}(\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Cos}(\eta' K - \eta' u)} + \dfrac{\eta' \,\mathfrak{Sin}\, 2\eta' u}{\mathfrak{Cos}(3\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Cos}(3\eta' K - \eta' u)} \\
\qquad + \dfrac{\eta' \,\mathfrak{Sin}\, 2\eta' u}{\mathfrak{Cos}(5\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Cos}(5\eta' K - \eta' u)} + \ldots, \\
\mathfrak{H}'(u) = \dfrac{\eta' \,\mathfrak{Sin}\, 2\eta' u}{\mathfrak{Cos}(\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Sin}(\eta' K - \eta' u)} + \dfrac{\eta' \,\mathfrak{Sin}\, 2\eta' u}{\mathfrak{Sin}(3\eta' K + \eta' u)\,\mathfrak{Sin}(3\eta' K - \eta' u)} \\
\qquad + \dfrac{\eta' \,\mathfrak{Sin}\, 2\eta' u}{\mathfrak{Sin}(5\eta' K + \eta u)\,\mathfrak{Sin}(5\eta' K - \eta' u)} + \ldots.
\end{cases}$$

Die Formeln (1.) und (2.) §. 189. und die Formeln (3.) und (4.) §. 188. geben jetzt

$$9.\begin{cases}
\mathfrak{A}'(u) = \dfrac{\eta'(p^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u - 3p^{\frac{9}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,3\eta' u + 5p^{\frac{25}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,5\eta' u - 7p^{\frac{49}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,7\eta' u + - \ldots)}{p^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u - p^{\frac{9}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + 5p^{\frac{25}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u - p^{\frac{49}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,7\eta' u + - \ldots}, \\
\mathfrak{B}'(u) = \dfrac{\eta'(p^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u + 3p^{\frac{9}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + 5p^{\frac{25}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u + 7p^{\frac{49}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,7\eta' u + \ldots)}{p^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u + p^{\frac{9}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,3\eta' u + p^{\frac{25}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,5\eta' u + p^{\frac{49}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,7\eta' u + \ldots}, \\
\mathfrak{G}'(u) = \dfrac{2\eta'(2p^2\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u + 4p^8\,\mathfrak{Sin}\,4\eta' u + 6p^{18}\,\mathfrak{Sin}\,6\eta' u + 8p^{32}\,\mathfrak{Sin}\,8\eta' u + \ldots)}{1 + 2p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + 2p^8\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u + 2p^{18}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u + 2p^{32}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta' u + \ldots}, \\
\mathfrak{H}'(u) = \dfrac{2\eta'(2p^2\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u - 4p^8\,\mathfrak{Sin}\,4\eta' u + 6p^{18}\,\mathfrak{Sin}\,6\eta' u - 8p^{32}\,\mathfrak{Sin}\,8\eta' u + - \ldots)}{1 - 2p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + 2p^8\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u - 2p^{18}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u + 2p^{32}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta' u - + \ldots}.
\end{cases}$$

Alle acht Functionen $A(u)$, $B(u)$, $G(u)$, $H(u)$, $\mathfrak{A}'(u)$, $\mathfrak{B}'(u)$, $\mathfrak{G}'(u)$ und $\mathfrak{H}'(u)$ ändern ihre Gröfse nicht, sondern ihr Vorzeichen, wenn $-u$ statt u gesetzt wird. Ferner ist

$$Ao = \mathfrak{A}'o = \frac{1}{2}$$

und $Bo = Go = Ho = \mathfrak{B}'o = \mathfrak{G}'o = \mathfrak{H}'o = o$. Aufserdem ist

$$10.\begin{cases}
A(ui) = \dfrac{\mathfrak{A}(u)}{i}, & \text{so wie umgekehrt} \quad \mathfrak{A}(ui) = \dfrac{A(u)}{i}, \\
B(ui) = i.\mathfrak{B}(u), & - \; - \; - \; - \quad \mathfrak{B}(ui) = i.B(u), \\
G(ui) = i.\mathfrak{G}(u), & - \; - \; - \; - \quad \mathfrak{G}(ui) = i.G(u), \\
H(ui) = i.\mathfrak{H}(u), & - \; - \; - \; - \quad \mathfrak{H}(ui) = i.H(u).
\end{cases}$$

Die Formeln (3.) §. 170. geben, logarithmisch differenziirt,

$$11.\quad \begin{cases} \mathfrak{A}'(K-u) = \eta' + \mathfrak{H}'(u), & \text{also}\quad \mathfrak{A}'(K+u) = \eta' - \mathfrak{H}'(u), \\ \mathfrak{H}'(K-u) = -\eta' + \mathfrak{A}'(u), & \text{-}\quad \mathfrak{H}'(K+u) = -\eta' - \mathfrak{A}'(u), \\ \mathfrak{B}'(K-u) = \eta' - \mathfrak{G}'(u), & \text{-}\quad \mathfrak{B}'(K+u) = \eta' + \mathfrak{G}'(u), \\ \mathfrak{G}'(K-u) = \eta' - \mathfrak{B}'(u), & \text{-}\quad \mathfrak{G}'(K+u) = \eta' + \mathfrak{B}'(u). \end{cases}$$

Hieraus folgt, wenn $u = o$ gesetzt wird, da

$$12.\quad \begin{cases} \mathfrak{A}'o = \tfrac{1}{2}, \quad \mathfrak{B}'o = o, \quad \mathfrak{G}'o = o \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}'o = o \quad \text{ist:} \\ \mathfrak{A}'(K) = \eta', \quad \mathfrak{B}'(K) = \eta', \quad \mathfrak{G}'(K) = \eta' \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}'(K) = \tfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Aufserdem hat man dem §. 190. gemäfs

$$13.\quad \mathrm{A}(\tfrac{1}{2}K) = \mathrm{B}(\tfrac{1}{2}K) = \frac{1+k'}{2}, \quad \mathrm{G}(\tfrac{1}{2}K) = \mathrm{H}(\tfrac{1}{2}K) = \frac{1-k'}{2},$$

und noch

$$14.\quad \begin{cases} \mathfrak{A}'(\tfrac{1}{2}K) = \frac{1+k'}{2} + \tfrac{1}{2}\eta', & \mathfrak{G}'(\tfrac{1}{2}K) = \tfrac{1}{2}\eta' - \frac{1-k'}{2}, \\ \mathfrak{B}'(\tfrac{1}{2}K) = \frac{1-k'}{2} + \tfrac{1}{2}\eta', & \mathfrak{H}'(\tfrac{1}{2}K) = \frac{1+k'}{2} - \tfrac{1}{2}\eta'. \end{cases}$$

Die Formeln (2.) §. 185. geben, logarithmisch differenziirt,

$$15.\quad \begin{cases} \mathfrak{A}'(u) = \frac{\pi u}{2KK'} + \mathrm{A}(u) = \frac{\eta' u}{K} + \mathrm{A}(u), \quad \text{oder} \quad \mathfrak{A}'(ui) = \frac{\eta' ui}{K} - i\,\mathfrak{A}(u), \\ \mathfrak{B}'(u) = \frac{\pi u}{2KK'} + \mathrm{H}(u) = \frac{\eta' u}{K} + \mathrm{H}(u), \quad \text{oder} \quad \mathfrak{B}'(ui) = \frac{\eta' ui}{K} + i\,\mathfrak{H}(u), \\ \mathfrak{G}'(u) = \frac{\pi u}{2KK'} - \mathrm{G}(u) = \frac{\eta' u}{K} - \mathrm{G}(u), \quad \text{oder} \quad \mathfrak{G}'(ui) = \frac{\eta' ui}{K} - i\,\mathfrak{G}(u), \\ \mathfrak{H}'(u) = -\frac{\pi u}{2KK'} + \mathrm{B}(u) = -\frac{\eta' u}{K} + \mathrm{B}(u), \quad \text{oder} \quad \mathfrak{H}'(ui) = -\frac{\eta' ui}{K} + i\,\mathfrak{B}(u). \end{cases}$$

Aus den Formeln (14.) sieht man zugleich, dafs η' immer zwischen den Grenzen $1-k'$, $1+k'$, also η zwischen $1-k$ und $1+k$ enthalten ist.

Setzt man in den Formeln $\mathrm{A}(K-u) = \mathrm{B}(u)$, $\mathrm{B}(K-u) = \mathrm{A}(u)$, $\mathrm{G}(K-u) = \mathrm{H}(u)$ und $\mathrm{H}(K-u) = \mathrm{H}(u)$, $-u$ statt $+u$, so hat man

$$16.\quad \begin{cases} \mathrm{A}(K+u) = -\mathrm{B}(u), & \text{also ist}\quad \mathrm{A}(2K+u) = \mathrm{A}(u), \\ \mathrm{B}(K+u) = -\mathrm{A}(u), & \text{- -}\quad \mathrm{B}(2K+u) = \mathrm{B}(u), \\ \mathrm{G}(K+u) = -\mathrm{H}(u), & \text{- -}\quad \mathrm{G}(2K+u) = \mathrm{G}(u), \\ \mathrm{H}(K+u) = -\mathrm{G}(u), & \text{- -}\quad \mathrm{H}(2K+u) = \mathrm{H}(u). \end{cases}$$

Die Functionen $\mathrm{A}(u)$, $\mathrm{B}(u)$, $\mathrm{G}(u)$ und $\mathrm{H}(u)$ leiden also keine Aenderung, wenn das Argument u beliebig oft um $2K$ vermehrt oder auch vermindert wird. Setzt man also in den Formeln (15.) $u+2mK$ statt u, so erhält man, wenn m eine ganze Zahl vorstellt:

$$\mathfrak{A}'(u+2mK) = \frac{\eta'(u+2mK)}{K} + \mathrm{A}(u),$$
$$\mathfrak{B}'(u+2mK) = \frac{\eta'(u+2mK)}{K} + \mathrm{H}(u),$$
$$\mathfrak{G}'(u+2mK) = \frac{\eta'(u+2mK)}{K} - \mathrm{G}(u),$$
$$\mathfrak{H}'(u+2mK) = -\frac{\eta'(u+2mK)}{K} + \mathrm{B}(u);$$

und werden hiervon die anfänglichen Gleichungen subtrahirt, so erhält man

$$17. \quad \begin{cases} \mathfrak{A}'(u+2mK) = 2m\eta' + \mathfrak{A}'(u), \\ \mathfrak{B}'(u+2mK) = 2m\eta' + \mathfrak{B}'(u), \\ \mathfrak{G}'(u+2mK) = 2m\eta' + \mathfrak{G}'(u), \\ \mathfrak{H}'(u+2mK) = -2m\eta' + \mathfrak{H}'(u). \end{cases}$$

Zusatz 1. Differenzirt man die Gleichungen (8.) bis (11.) §. 171., so erhält man zunächst

$$\mathrm{Al}\,u.\partial\,\mathrm{Al}\,u + k'.\mathrm{Bl}\,u.\partial\,\mathrm{Bl}\,u = k.\mathrm{Hl}\,u.\partial\,\mathrm{Hl}\,u,$$
$$\mathrm{Bl}\,u.\partial\,\mathrm{Bl}\,u + k'.\mathrm{Al}\,u.\partial\,\mathrm{Al}\,u = k.\mathrm{Gl}\,u.\partial\,\mathrm{Gl}\,u,$$
$$k'.\mathrm{Gl}\,u.\partial\,\mathrm{Gl}\,u + k.\mathrm{Al}\,u.\partial\,\mathrm{Al}\,u = \mathrm{Hl}\,u.\partial\,\mathrm{Hl}\,u,$$
$$k'.\mathrm{Hl}\,u.\partial\,\mathrm{Hl}\,u + k.\mathrm{Bl}\,u.\partial\,\mathrm{Bl}\,u = \mathrm{Gl}\,u.\partial\,\mathrm{Gl}\,u;$$

und substituirt man hierin die Werthe $\partial\,\mathrm{Al}\,u = \mathrm{Al}\,u.\mathrm{A}\,u.\partial u$, $\partial\,\mathrm{Bl}\,u = -\mathrm{Bl}\,u.\mathrm{B}\,u.\partial u$, $\partial\,\mathrm{Gl}\,u = -\mathrm{Gl}\,u.\mathrm{G}\,u.\partial u$, $\partial\,\mathrm{Hl}\,u = \mathrm{Hl}\,u.\mathrm{H}\,u.\partial u$, so verwandeln sie sich in

$$\mathrm{Al}^2 u.\mathrm{A}\,u - k'.\mathrm{Bl}^2 u.\mathrm{B}\,u = k.\mathrm{Hl}^2 u.\mathrm{H}\,u,$$
$$-\mathrm{Bl}^2 u.\mathrm{B}\,u + k'.\mathrm{Al}^2 u.\mathrm{A}\,u = -k.\mathrm{Gl}^2 u.\mathrm{G}\,u,$$
$$-k'.\mathrm{Gl}^2 u.\mathrm{G}\,u + k.\mathrm{Al}^2 u.\mathrm{A}\,u = \mathrm{Hl}^2 u.\mathrm{H}\,u,$$
$$k'.\mathrm{Hl}^2 u.\mathrm{H}\,u - k.\mathrm{Bl}^2 u.\mathrm{B}\,u = -\mathrm{Gl}^2 u.\mathrm{G}\,u.$$

Dividirt man nun die erste Gleichung durch $k.\mathrm{Hl}^2 u$, so verwandelt sie sich in

$$18. \quad \begin{cases} \mathrm{sn}^2 u.\mathrm{A}(u) - \mathrm{cn}^2 u.\mathrm{B}(u) = \mathrm{H}(u), \text{ also} \\ \mathrm{snc}^2 u.\mathrm{B}(u) - \mathrm{cnc}^2 u.\mathrm{A}(u) = \mathrm{G}(u); \text{ eben so findet man} \\ k^2\,\mathrm{sn}^2 u.\mathrm{A}(u) - \mathrm{dn}^2 u.\mathrm{G}(u) = \mathrm{H}(u) \text{ und} \\ k^2\,\mathrm{snc}^2 u.\mathrm{B}(u) - \mathrm{dnc}^2 u.\mathrm{H}(u) = \mathrm{G}(u). \end{cases}$$

Setzt man in diesen Formeln ui statt u, indem man den Modul mit dem conjugirten vertauscht, so erhält man

$$19. \quad \begin{cases} \mathrm{sn}^2 u.\mathfrak{A}'(u) - \mathrm{cn}^2 u.\mathfrak{H}'(u) = \mathfrak{B}'(u), \\ \mathrm{dn}^2 u.\mathfrak{G}'(u) + k^2\,\mathrm{sn}^2 u.\mathfrak{A}'(u) = \mathfrak{B}'(u), \\ \mathrm{cnc}^2 u.\mathfrak{A}'(u) - \mathrm{snc}^2 u.\mathfrak{H}'(u) = \mathfrak{G}'(u), \\ \mathrm{dn}^2 u.\mathfrak{G}'(u) + k^2\,\mathrm{cn}^2 u.\mathfrak{H}'(u) = k'^2\mathfrak{B}'(u), \text{ oder} \\ \mathfrak{G}'(u) + k^2\,\mathrm{snc}^2 u.\mathfrak{H}'(u) = \mathrm{dnc}^2 u.\mathfrak{B}'(u). \end{cases}$$

Differenzürt man die Formeln (6.) §. 171. logarithmisch, so erhält man die Formeln

$$20.\quad \begin{cases} A(u) - H(u) = \dfrac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{tn} u} = \dfrac{k' \operatorname{cn} u}{\operatorname{cnc} u}, \\ B(u) + H(u) = \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u = \dfrac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}, \\ G(u) + H(u) = k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u, \\ A(u) + B(u) = \dfrac{1}{\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u}, \\ B(u) - G(u) = \dfrac{k' \operatorname{cnc} u}{\operatorname{cn} u} = \dfrac{k'^2 \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u \operatorname{cn} u}, \\ A(u) + G(u) = \dfrac{\operatorname{snc} u}{\operatorname{sn} u} = \dfrac{1}{\operatorname{tn} u \operatorname{dn} u}. \end{cases}$$

Vertauscht man hierin die beiden conjugirten Modul, und setzt ui statt u, so erhält man noch

$$21.\quad \begin{cases} \mathfrak{A}'(u) + \mathfrak{H}'(u) = \dfrac{1}{\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u}, \\ \mathfrak{B}'(u) + \mathfrak{H}'(u) = \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u = \dfrac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}, \\ \mathfrak{G}'(u) + \mathfrak{H}'(u) = \dfrac{k'^2 \operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u} = \dfrac{\operatorname{dnc} u}{\operatorname{tnc} u} = \dfrac{k' \operatorname{cnc} u}{\operatorname{cn} u}, \\ \mathfrak{A}'(u) - \mathfrak{B}'(u) = \dfrac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{tn} u}, \\ \mathfrak{B}'(u) - \mathfrak{G}'(u) = k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u, \\ \mathfrak{A}'(u) - \mathfrak{G}'(u) = \dfrac{\operatorname{snc} u}{\operatorname{sn} u}. \end{cases}$$

Zusatz 2. Da $\operatorname{Cot}(a-b) - \operatorname{Cot}(a+b) = \dfrac{\operatorname{Sin} 2b}{\operatorname{Sin}(a+b)\operatorname{Sin}(a-b)}$ und $\operatorname{Tang}(a+b) - \operatorname{Tang}(a-b) = \dfrac{\operatorname{Sin} 2b}{\operatorname{Cos}(a+b)\operatorname{Cos}(a-b)}$ ist, so können die Formeln (8.) auch also dargestellt werden:

$$\mathfrak{A}'(u) =$$
$$\eta' \operatorname{Cot} \eta' u + \eta' \operatorname{Cot}(2\eta' K + \eta' u) + \eta' \operatorname{Cot}(4\eta' K + \eta' u) + \eta' \operatorname{Cot}(6\eta' K + \eta' u) + \dots$$
$$- \eta' \operatorname{Cot}(2\eta' K - \eta' u) - \eta' \operatorname{Cot}(4\eta' K - \eta' u) - \eta' \operatorname{Cot}(6\eta' K - \eta' u) - \dots,$$

$$\mathfrak{B}'(u) =$$
$$\eta' \operatorname{Tang} \eta' u + \eta' \operatorname{Tang}(2\eta' K + \eta' u) + \eta' \operatorname{Tang}(4\eta' K + \eta' u) + \eta' \operatorname{Tang}(6\eta' K + \eta' u) + \dots$$
$$- \eta' \operatorname{Tang}(2\eta' K - \eta' u) - \eta' \operatorname{Tang}(4\eta' K - \eta' u) - \eta' \operatorname{Tang}(6\eta' K - \eta' u) - \dots,$$

$$\mathfrak{G}'(u) = \eta' \operatorname{Tang}(\eta' K + \eta' u) + \eta' \operatorname{Tang}(3\eta' K + \eta' u) + \eta' \operatorname{Tang}(5\eta' K + \eta' u) + \dots$$
$$- \eta' \operatorname{Tang}(\eta' K - \eta' u) - \eta' \operatorname{Tang}(3\eta' K - \eta' u) - \eta' \operatorname{Tang}(5\eta' K - \eta' u) + \dots,$$

$$\mathfrak{H}'(u) = \eta' \operatorname{Cot}(\eta' K - \eta' u) + \eta' \operatorname{Cot}(3\eta' K - \eta' u) + \eta' \operatorname{Cot}(5\eta' K - \eta' u) + \dots$$
$$- \eta' \operatorname{Cot}(\eta' K + \eta' u) - \eta' \operatorname{Cot}(3\eta' K + \eta' u) - \eta' \operatorname{Cot}(5\eta' K + \eta' u) - \dots$$

Hiernach lassen sich also die Gröfsen $\mathfrak{A}'(u)$, $\mathfrak{B}'(u)$, $\mathfrak{G}'(u)$ und $\mathfrak{H}'(u)$ noch leichter berechnen, als die gleichlautenden cyklischen Functionen $\mathrm{A}(u)$, $\mathrm{B}(u)$, $\mathrm{G}(u)$ und $\mathrm{H}(u)$.

§. 201.

Allgemeine Relationen unter jenen Functionen.

Differenziirt man die Formeln (5.) bis (8.) §. 183., so erhält man

$$1.\quad \mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}u + \mathrm{H}(u),$$

$$2.\quad \mathrm{elc}\,u = E - \frac{E}{K}u + \mathrm{G}(u),$$

$$3.\quad \mathrm{el}\,u = \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)u + \mathfrak{B}'(u),$$

$$4.\quad \mathrm{elc}\,u = E - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)u - \mathfrak{G}'(u).$$

Substituirt man in der Formel $\mathrm{el}(a+u) = \mathrm{el}\,a + \mathrm{el}\,u - k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(a+u)$ §. 65. die Werthe $\mathrm{el}(a+u) = \frac{E}{K}(a+u) + \mathrm{H}(a+u)$, $\mathrm{el}\,a = \frac{E}{K}a + \mathrm{H}(a)$ und $\mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}u + \mathrm{H}(u)$, so reducirt sie sich auf

$$5.\quad \begin{cases} \mathrm{H}(a+u) = \mathrm{H}(a) + \mathrm{H}(u) - k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(a+u), \text{ also} \\ \mathrm{H}(a-u) = \mathrm{H}(a) - \mathrm{H}(u) + k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(a-u). \end{cases}$$

Auf gleiche Weise erhält man

$$6.\quad \begin{cases} \mathfrak{B}'(a+u) = \mathfrak{B}'(a) + \mathfrak{B}'(u) - k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(a+u), \\ \mathfrak{B}'(a-u) = \mathfrak{B}'(a) + \mathfrak{B}'(u) + k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(a-u). \end{cases}$$

Vertauscht man in den Formeln (5.) und (6.) die conjugirten Modul, indem man ai und ui statt a und u setzt, so erhält man

$$7.\quad \begin{cases} \mathfrak{H}'(a+u) = \mathfrak{H}'(a) + \mathfrak{H}'(u) + k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{tn}(a+u), \\ \mathfrak{H}'(a-u) = \mathfrak{H}'(a) - \mathfrak{H}'(u) - k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{tn}(a-u), \end{cases}$$

und

$$8.\quad \begin{cases} \mathrm{B}(a+u) = \mathrm{B}(a) + \mathrm{B}(u) + k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{tn}(a+u), \\ \mathrm{B}(a-u) = \mathrm{B}(a) - \mathrm{B}(u) - k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{tn}(a-u). \end{cases}$$

Aus den Formeln (5.) und (6.) §. 65. können eben so noch allgemeinere Relationen hergeleitet werden.

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Hefte.)

13.

Bemerkung über die Wurzeln der algebraischen Gleichungen.

(Von Herrn Dr. *Ferd. Minding* zu Berlin.)

Es seien $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ beliebige unabhängige Gröfsen, welche als Wurzeln der Gleichung $X = x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} \ldots = 0$ gedacht werden; ferner sei α eine primitive Wurzel der Gleichung $\alpha^n = 1$, und man setze

$$nt_1 = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \ldots + \alpha^{n-1} x_n,$$
$$nt_2 = x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^4 x_3 + \ldots + \alpha^{n-2} x_n,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$nt_\mu = x_1 + \alpha^\mu x_2 + \alpha^{2\mu} x_3 + \ldots + \alpha^{n-\mu} x_n,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

so gelten umgekehrt für die Wurzeln folgende Ausdrücke, in denen β für α^{-1} geschrieben ist;

$$x_1 = \frac{1}{n}a + t_1 + t_2 + \ldots + t_{n-1},$$
$$x_2 = \frac{1}{n}a + \beta t_1 + \beta^2 t_2 + \ldots + \beta^{n-1} t_{n-1},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_\mu = \frac{1}{n}a + \beta^\mu t_1 + \beta^{2\mu} t_2 + \ldots + \beta^{n-\mu} t_{n-1},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Der Ausdruck t_1^n (er werde zur Abkürzung mit p bezeichnet) wird durch cyclische Verwechselung der Wurzeln nicht geändert; denn indem man in t_1 jede Wurzel in die Stelle der folgenden und die letzte in die der ersten setzt, verwandelt sich t_1 in αt_1; folglich hat p im Allgemeinen $2.3.4 \ldots n-1 = m$ verschiedene Werthe und hängt mithin von einer Gleichung des $m$ten Grades ab. Man bilde ferner den Ausdruck:

$$v_\mu = nt_\mu . (nt_1)^{-\mu}$$
$$= (x_1 + \alpha^\mu x_2 + \alpha^{2\mu} x_3 + \ldots + \alpha^{n-\mu} x_n)(x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \alpha^{n-1} x_n)^{-\mu}$$

und bemerke, dafs derselbe ebenfalls durch cyclische Verwechselung der Wurzeln nicht geändert wird, so folgt, dafs v_μ ebenfalls m Werthe hat, wie p, und mithin nach der bekannten Methode von *Lagrange* rational

durch p ausgedrückt werden kann. Da sich noch p immer aus dem Nenner wegschaffen läfst, so kann v_μ auf folgende Form gebracht werden: $v_\mu = A + Bp + Cp^2 + \ldots + Mp^{m-1}$, in welcher $A, B, \ldots M$ rationale Functionen der Coefficienten der Gleichung $X = 0$ sind. Vermöge der Gleichung $t_\mu = v_\mu . t_1^\mu$ nehmen nun die Ausdrücke der Wurzeln folgende Gestalt an;

$$x_1 = \frac{1}{n} a + t_1 + v_2 t_1^2 + \ldots + v_{n-1} t_1^{n-1} = f(t_1),$$

$$x_2 = \frac{1}{n} a + \beta t_1 + v_2 \beta^2 t_1^2 + \ldots + v_{n-1} \beta^{n-1} t_1^{n-1} = f(\beta t_1)$$

u. s. f.,

oder:

$$x_1 = f(t_1), \quad x_2 = f(\beta t_1), \quad x_3 = f(\beta^2 t_1), \quad \ldots \quad x_n = f(\beta^{n-1} t_1).$$

Die Gleichungen $t^n = p$ und $f(t) = x_1$ haben die Wurzel $t = t_1$ gemein, aufser dieser aber keine zweite. Denn alle Wurzeln der Gleichung $t^n = p$ oder $t^n = t_1^n$ sind von der Form: $\beta^\mu t_1$; wäre mithin für ein zwischen Null und n liegendes μ: $f(\beta^\mu t_1) = x_1$, so hätte man, weil $f(\beta^\mu t_1) = x_{\mu+1}$ ist, $x_1 = x_{\mu+1}$, d. h. die Gleichung $X = 0$ müfste gleiche Wurzeln haben, was gegen die Voraussetzung ist. Folglich ist der gemeinsame Factor der Polynome $t^n - p$ und $f(t) - x_1$ in Bezug auf t vom ersten Grade, und giebt, der Null gleich gesetzt, den Werth von t_1 durch x_1 und p rational ausgedrückt. Man kann mithin setzen $t_1 = \psi(x_1)$, wo ψ ein ganzes Polynom vom $n-1$ten Grade bezeichnet, dessen Coefficienten ganze Polynome in p vom $m-1$ten Grade sind, die ihrerseits rationale Functionen von $a, b, c, \ldots$ zu Coefficienten haben. Da nun $x_2 = f(\beta t_1)$, und $(\beta t_1)^n = p$ ist, so ergiebt sich auch: $\beta t_1 = \psi(x_2)$, u. s. w.; man erhält mithin:

$$t_1 = \psi(x_1), \quad \beta t_1 = \psi(x_2), \quad \beta^2 t_1 = \psi(x_3), \quad \ldots \quad \beta^{n-1} t_1 = \psi(x_n).$$

Nun ist aber $x_2 = f(\beta t_1)$, $x_3 = f(\beta^2 t_1)$, $\ldots$ $x_n = f(\beta^{n-1} t_1)$, $x_1 = f(\beta^n t_1)$; folglich auch

$$x_2 = f(\beta \psi(x_1)), \quad x_3 = f(\beta \psi(x_2)), \quad \text{u. s. f.},$$

oder, wenn man zur Abkürzung $f(\beta \psi(x_\mu)) = F(x_\mu)$ setzt, so kommt:

$$x_2 = F(x_1), \quad x_3 = F(x_2), \quad \ldots \quad x_n = F(x_{n-1}), \quad x_1 = F(x_n),$$

oder auch

$$x_2 = F(x_1), \quad x_3 = F_2(x_1), \quad \ldots \quad x_n = F_{n-1}(x_1), \quad x_1 = F_n(x_1).$$

Hiernach lassen sich allgemein die Wurzeln der algebraischen Gleichungen als wiederholte rationale Functionen einer unter ihnen darstel-

len; die Coefficienten der darstellenden Function hängen aber von der Gleichung des $m$ten Grades in p ab, deren weitere Zerlegung *Lagrange* in der 13ten Note seines Werkes über die Gleichungen untersucht.

Für die Gleichungen des dritten Grades hängen also diese Coefficienten von einer Gleichung des zweiten Grades ab. Bezeichnen x_1, x_2, x_3 die Wurzeln der Gleichung $x^3 = 3bx + 2c$, und setzt man $3t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3$, wo $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ ist, ferner $t^3 = p$, so findet man $p^2 - 2cp + b^3 = 0$, und $x_1 = t + \frac{bt^2}{p} = f(t)$, $x_2 = f(\beta t)$, $x_3 = f(\beta^2 t)$. Aus $t^3 = p$ und $x_1 = f(t)$ folgt:

$$t = \frac{px_1 + b^2}{p + bx_1} = \frac{b^2 + \frac{1}{2}(px_1 - bx_1^2)}{p - b},$$

und hieraus

$$x_2 = \beta t + \frac{b\beta^2 t^2}{p} = \beta t + \beta^2(x_1 - t) = (\beta - \beta^2)t + \beta^2 x_1,$$

oder:

$$x_2 = (b^2 + \tfrac{1}{2}cx_1 - \tfrac{1}{2}bx_1^2)\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{(c^2 - b^3)}} - \tfrac{1}{2}x_1 = F(x_1).$$

Alsdann ist $x_3 = F(x_2)$, $x_1 = F(x_3)$.

Einen vom vorstehenden nur der Form nach verschiedenen Ausdruck hat bereits Herr Prof. *Hill* im 9ten Bande dieses Journals S. 100 gegeben. Durch das hier bezeichnete Verfahren kann man auch für die Wurzeln höherer Gleichungen ähnliche Ausdrücke finden, nach welchen an jenem Orte gefragt wird. Bei denen des vierten Grades kommt man auf eine Gleichung des sechsten Grades in p, die sich aber, wie bekannt, durch eine vom zweiten auflösen läfst, deren Coefficienten von einer des dritten abhängen.

14.

Ueber einen besondern Fall bei der Abwickelung krummer Flächen.

(Von Herrn Dr. *Minding* zu Berlin.)

Am Schlusse meiner Abhandlung im 19ten Bande dieses Journals ist bemerkt, dafs die Bedingungen der Abwickelbarkeit ihre einfachste Gestalt annehmen, wenn man unter p das Krümmungsmaafs oder eine Function desselben, und unter q, q' Bogenlängen der Curven von unveränderlichem p versteht. Alsdann müssen, damit $E\,dp^2+2F\,dp\,dq+dq^2 = E'\,dp^2+2F'\,dp\,dq'+dq'^2$ sei, folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$E-F^2 = E'-F'^2 \quad \text{und} \quad \pm(F\,dp+dq) = F'\,dp+dq',$$

d. h. es mufs möglich sein, diesen Gleichungen durch eine Relation zwischen p, q, q' zu genügen. Wenn insbesondere die erste dieser Gleichungen *identisch* besteht, so mufs offenbar $E-F^2$ eine blofse Function von p, ohne q, sein, also

$$E-F^2 = P^2.$$

In diesem Falle mufs die zweite Gleichung entweder irgend eine besondere Auflösung zulassen, oder integrabel sein. Die Integrabilität fordert, dafs $F\pm F'$ eine Function von $q\pm q'$, mithin $\frac{dF}{dq}=\frac{dF'}{dq'}$ sei. Folglich darf $\frac{dF}{dq}$ kein q enthalten; also mufs F von folgender Form sein: $F=Mq+N$, wo M und N blofs von p abhängen. Auch sieht man leicht, dafs M nicht Null sein kann, wenn die Biegungen der Ebene ausgeschlossen werden; denn wäre $M=0$, so erhielte man $F=N$, $E=P^2+N^2$, folglich $ds^2=(N^2+P^2)\,dp^2+2N\,dp\,dq+dq^2 = P^2\,dp^2+(N\,dp+dq)^2$, oder wenn $P\,dp=du$, $N\,dp+dq=dv$ gesetzt werden, $ds^2=du^2+dv^2$; alsdann wäre das Krümmungsmaafs Null, gegen die Annahme. Nun sei φ eine unbestimmte Function von p, und $\frac{d\varphi}{dp}=\varphi'$, so geht der Ausdruck $ds^2 = E\,dp^2+2F\,dp\,dq+dq^2 = P^2\,dp^2+\{(Mq+N)\,dp+dq\}^2$ durch Einführung von $q+\varphi$ anstatt q in folgenden über:

$$ds^2 = P^2\,dp^2+\{(Mq+M\varphi+N+\varphi')\,dp+dq\}^2,$$

oder, wenn man Φ so bestimmt, dafs $M\Phi + N + \Phi' = 0$ wird,

$$ds^2 = P^2 dp^2 + (Mq\, dp + dq)^2.$$

Diese Form des Linear-Elementes deutet auf eine Umdrehungsfläche. Denn man setze $q.e^{\int M dp} = v$, $e^{-\int M dp} = u$, $P dp = U du$, wo U eine Function von u anzeigt, so wird

$$ds^2 = U^2 du^2 + u^2 dv^2.$$

Dasselbe Linear-Element geben folgende Gleichungen:

$$x = au \cos \frac{v}{a}, \quad y = au \sin \frac{v}{a}, \quad z = \int \sqrt{(U^2 - a^2)}\, du,$$

wo a eine beliebige Constante ist; sie stellen eine Umdrehungsfläche, sammt den schon im 18ten Bande S. 367 angegebenen Biegungen derselben dar. Hieraus ergiebt sich die Folgerung, dafs wenn zwei Flächen von veränderlichen Krümmungsmaafsen sich auf unzählige Arten auf einander abwickeln lassen, indem die Gleichungen zwischen den Argumenten entsprechender Puncte eine willkürliche Constante enthalten, — oder wenn die Gleichung (25.) der oben genannten Abhandlung identisch und die Gleichung (26.) integrabel ist —, dafs sich alsdann unter den Biegungen dieser Flächen allemal *Umdrehungsflächen* befinden. Auf diesen einfachen und unmittelbar anschaulichen Fall beschränkt sich also die Möglichkeit, bei Abwickelung einer Fläche von unveränderlichem Krümmungsmaafse auf eine andere, das erste Paar entsprechender Puncte in zwei Curven von unveränderlichen und gleichen Krümmungsmaafsen beliebig zu wählen.

15.

Ueber den Fall, wenn in dem bestimmten Integrale $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ die Function $\varphi(x)$ für einen oder mehrere Werthe von x, welche innerhalb a und b liegen, unendlich grofs oder discontinuirlich wird.

(Von Herrn *J. L. Raabe* in Zürich.)

Auch der vorliegende Gegenstand berechtigt uns zu der mehrfach vernommenen Aeufserung: „die Grenzen der Wissenschaft werden zwar immer mehr und mehr erweitert, allein an ihrem Eingange ist noch manche dunkle Stelle zu erörtern." Dafs der Fall, wenn $\varphi(x)$ in dem bestimmten Integrale $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, für Werthe von x, welche innerhalb der Grenzen fallen, durch das Unendliche geht, zu diesen dunklen und noch unerörterten Stellen gehört, wird von vielen Lehrern der höhern Theile der Mathematik anerkannt werden.

Man berufe sich nicht auf die 8te Vorlesung aus *Lagrange's Leçons* oder auf die Stellen in *Poisson's* Abhandlung über bestimmte Integrale (*Journal de l'école polytechnique, tome XI. p. 318—341*): an diesen Orten ist der fragliche Gegenstand nur angeregt und nur für specielle Fälle eine Erläuterung desselben zu geben versucht worden.

Ehe wir zur Erörterung des vorgelegten Gegenstandes übergehen, wird es nothwendig sein, das *Amper*'sche Theorem über continuirliche Functionen voranzuschicken:

Stellt $F(x)$ eine von $x = a$ bis $x = b$ continuirliche Function von x vor und bedeutet ω eine ohne Ende abnehmende positive Gröfse, so nähert sich der Quotient

$$\frac{F(x+\omega)-F(x)}{\omega}$$

einer Grenze, die ebenfalls eine Function von x ist. Stellt man diese Grenze durch $\varphi(x)$ dar, so dafs

$$1.\quad \text{Lim.}\frac{F(x+\omega)-(F(x)}{\omega} = \varphi(x)$$

ist, so kann zwar $\Phi(x)$ für isolirte Werthe von $x=a$ bis $x=b$ unendlich grofs werden, allein es giebt keine endliche Folge von x Werthen, welche alle dieser Function unendlich grofse Werthe beilegten; überhaupt, wenn man von dem Falle, wo

$$F(x) = Ax + B$$

ist und A und B Constanten vorstellen, abstrahirt, so wird $\Phi(x)$ für keine endliche Folge von x Werthen einen und denselben Werth, er mag unendlich klein, endlich oder unendlich grofs sein, haben.

Ist dieser Satz festgestellt, so hat man

$$d.F(x) = \Phi(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int \Phi(x)\,dx = F(x) + \text{Const.}$$

Will man endlich den Werth der Integral-Function für $x=b$ haben, falls dieselbe für $x=a$ verschwindet, so zeigt man dieses durch die Gleichung

$$2. \quad \int_a^b \Phi(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

an. Der Ausdruck $F(b)-F(a)$ stellt unter Beschränkungen, die der Zweck der gegenwärtigen Bemerkungen sind, die Summe einer unendlichen Gliederreihe dar, die als Grundpfeiler der Integralrechnung angesehen werden kann.

Gehen wir nun zur Darstellung dieser Reihe über und setzen zu diesem Behufe folgendes fest:

1) Die Function $F(x)$ soll von $x=a$ bis $x=b$, die Grenzwerthe a und b mitbegriffen, continuirlich sein.

2) Der Unterschied $b-a$ werde positiv vorausgesetzt.

3) $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-2}, \omega_{n-1}$ stellen unendlich klein werdende, positive Gröfsen vor.

4) Endlich habe folgende Gleichung statt:

$$3. \quad b = a + \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n-2} + \omega_{n-1}.$$

Dieses vorausgesetzt, setze man in (1.) statt x nach und nach die Werthe

$$a,\ a+\omega_0,\ a+\omega_0+\omega_1,\ a+\omega_0+\omega_1+\omega_2,\ \ldots\ a+\omega_0+\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_{n-2},$$

und in derselben Ordnung statt ω die Werthe

$$\omega_0,\quad \omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3,\quad \ldots\quad \omega_{n-1},$$

so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$4.\quad\begin{cases}\varphi(a)\omega_0 = \text{Lim.}\{F(a+\omega_0)-F(a)\},\\ \varphi(a+\omega_0)\omega_1 = \text{Lim.}\{F(a+\omega_0+\omega_1)-F(a+\omega_0)\},\\ \varphi(a+\omega_0'+\omega_0)\omega_2 = \text{Lim.}\{F(a+\omega_0+\omega_1+\omega_2)\\ \qquad\qquad -F(a+\omega_0+\omega_1)\}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \varphi(a+\omega_0+\omega_1+\ldots+\omega_{n-2})\omega_{n-1} = \text{Lim.}\{F(a+\omega_0+\omega_1+\ldots+\omega_{n-1})\\ \qquad\qquad -F(a+\omega_0+\omega_1+\ldots+\omega_{n-2})\}.\end{cases}$$

Addirt man diese Gleichungen mit Berücksichtigung der Gleichung (3.), so hat man

$$5.\quad F(b)-F(a)$$
$$=\omega_0\varphi(a)+\omega_1\varphi(a+\omega_0)+\omega_2\varphi(a+\omega_0+\omega_1)+\ldots+\omega_{n-1}\varphi(b-\omega_{n-1}).$$

Werden ferner in dieselbe Gleichung (1.) statt x die Werthe

$$b,\quad b-\omega_{n-1},\quad b-\omega_{n-1}-\omega_{n-2},\quad b-\omega_{n-1}-\omega_{n-2}-\omega_{n-3},\quad\ldots\ldots$$
$$b-\omega_{n-1}-\omega_{n-2}-\omega_{n-3}-\ldots\ldots-\omega_2-\omega_1$$

gesetzt, und werden in gleicher Ordnung statt ω die Werthe

$$-\omega_{n-1},\quad -\omega_{n-2},\quad -\omega_{n-3},\quad -\omega_{n-4},\quad\ldots\ldots\quad \omega_0$$

angenommen, so erhält man folgendes Gleichungensystem:

$$6.\quad\begin{cases}-\varphi(b)\omega_{n-1} = \text{Lim.}\{F(b-\omega_{n-1})-F(b)\},\\ -\varphi(-\omega_{n-1})\omega_{n-2} = \text{Lim.}\{F(b-\omega_{n-1}-\omega_{n-2})-F(b-\omega_{n-1})\},\\ -\varphi(b-\omega_{n-1}-\omega_{n-2})\omega_{n-3} = \text{Lim.}\{F(b-\omega_{n-1}-\omega_{n-2}-\omega_{n-3})\\ \qquad\qquad -F(b-\omega_{n-1}-\omega_{n-2})\},\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ -\varphi(b-\omega_{n-1}-\omega_{n-2}-\ldots-\omega_1)\omega_0 = \text{Lim.}\{F(b-\omega_{n-1}-\omega_{n-2}-\ldots-\omega_1-\omega_0)\\ \qquad\qquad -F(b-\omega_{n-1}-\omega_{n-2}-\ldots-\omega_1)\}.\end{cases}$$

Werden endlich diese Gleichungen addirt, so hat man, ebenfalls mit Zuziehung der Gleichung (3.),

$$7.\quad F(b)-F(a)$$
$$=\omega_0\varphi(a+\omega_0)+\omega_1\varphi(a+\omega_0+\omega_1)+\omega_2\varphi(a+\omega_0+\omega_1+\omega_2)+\ldots+\omega_{n-1}\varphi(b).$$

Jede der beiden Gleichungen (5.) und (7.) stellt den oben erwähnten Zusammenhang der unendlichen Gliederreihe mit dem Ausdruck $F(b)-F(a)$ oder mit dessen Werthe $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ dar.

Nachdem nun dieser Zusammenhang hergestellt worden ist, gehen wir zum eigentlichen Zwecke der vorliegenden Untersuchung über.

Die Gleichungen (5.) und (7.) sind Folgen der Gleichungen (4.) und (6.). Nur in so weit diese letzteren bestehen, sind wir auch zu der

Annahme der erstern berechtigt. Nun bestehen die Gleichungen (4.) und (6.) nach der oben festgesetzten Annahme 1) unter der Beschränkung, dafs die Integral-Function $F(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ continuirlich sei: daher unterliegt auch die Untersuchung über die Zulässigkeit der Gleichungen (5.) und (7.) in jenen Fällen keinen besondern Schwierigkeiten, nemlich wenn die Integral-Function der vorletzten Differenzial-Formel $\varphi(x)\,dx$ bekannt ist. Es reducirt sich alsdann die Untersuchung auf die Erlangung der Einsicht, ob die bekannte Integral-Function $F(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ eines unendlichen Werthes fähig sei oder nicht. Dieses zu bewerkstelligen, bietet die Analysis genug Mittel an die Hand, daher in diesem Falle die Untersuchung als geschlossen angesehen werden darf.

Gehen wir also zu dem zweiten Falle über, wenn die Integral-Function der vorgelegten Differenzial-Formel $\varphi(x)\,dx$ unbekannt ist.

Betrachtet man mit einiger Aufmerksamkeit die zwei Systeme von Gleichungen (4.) und (6.), so überzeugt man sich sehr bald, dafs sämmtliche Ausdrücke rechts der Gleichheitszeichen unendlich klein werdende Zahlenwerthe vorstellen, falls die, zwar unbekannt vorausgesetzte, Integral-Function von $x=a$ bis $x=b$ continuirlich ist; woraus sogleich gefolgert werden kann, dafs es eine gleiche Bewandnifs mit den Ausdrücken links von den Gleichheitszeichen dieser Gleichungen haben mufs. Nun bilden diese Ausdrücke die Glieder der Reihen (5.) und (6.): daher müssen auch sämmtliche Glieder dieser Reihen nur unendlich klein werdender Werthe fähig sein. Endlich entsteht jedes Glied dieser beiden Reihen aus der vorgelegten Differenzial-Formel $\varphi(x)\,dx$, wenn in der Function $\varphi(x)$ statt x irgend einer dem Werthe von a bis b und statt dx ein diesem Werthe von x entsprechendes Increment ω_0, oder ω_1, oder ω_2, ... oder ω_{n-1} gesetzt wird.

Wenn also k irgend eine der Zahlen

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ n-1$$

ist, und man setzt

$$0 = a+\omega_0+\omega_1+\omega_2+\ldots.+\omega_k,$$

wo also

$$c \geqq a \quad \text{und} \quad c \leqq b$$

ist, so mufs für jeden der eben festgesetzten Werthe von k das Product

$$\omega_{k+1}\,\varphi(c), \quad \text{oder das Product} \quad \omega_k\,\varphi(c)$$

unendlich klein bleiben, damit die unbestimmte Integral-Function $F(x)$ für alle Werthe von x, von $x=a$ bis $x=b$, continuirlich bleibe. Im entgegengesetzten Falle, wenn diese Producte für irgend einen Werth von k endlich, oder gar unendlich grofs sind, ist es ein sicheres Merkmal, dafs die unbekannte Integral-Function in der Nähe des Werthes c von x eine Unterbrechung in der Continuität erleidet. Es finden alsdann die Gleichungen (4.) und (6.) nicht Statt; mithin kann auch, unter denselben Umständen, von dem Bestehen der Gleichungen (5.) und (7.) nicht mehr die Rede sein.

Fassen wir nun alles bisher Gesagte zusammen, so ergiebt sich Folgendes als Resultat unserer Betrachtungen.

Hat man den Werth des bestimmten Integrals

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

auszumitteln, und ist

1) $\varphi(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ eine continuirliche Function von x, so bestehen die Gleichungen (5.) und (7.) ohne irgend eine Beschränkung.

2) Erleidet hingegen $\varphi(x)$ für einen oder mehrere Werthe von $x=a$ bis $x=b$ eine Unterbrechung in der Continuität, z. B. wird $\varphi(c)$ für den Werth $x=c$ unendlich grofs, so untersuche man das Product

$$\omega\varphi(c),$$

wo ω unendlich klein werdend vorausgesetzt wird. Dieses Product stellt sich zuerst unter der Form $\frac{0}{0}$ dar; allein setzt man $c\pm\omega$ statt c und wird

$$\text{Lim.}\,\omega\varphi(c\pm\omega) = \alpha$$

gesetzt, so bestehen die Gleichungen (5.) und (7.), wenn α als unendlich kleine Gröfse sich darstellt. Ist hingegen α endlich oder gar unendlich grofs werdend, so hört der Zusammenhang eines bestimmten Integrals mit einer Summe, wie solche durch die Gleichungen (5.) und (7.) ausgedrückt wird, gänzlich auf und die Gleichung

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ist als ein Resultat der Analyse ohne irgend eine bis jetzt angebbare Bedeutung anzusehen.

Zürich, den 1. September 1837.

16.

Sur quelques propriétés d'une certaine classe de fonctions transcendantes.

(Par Mr. *O. J. Broch*, Candidatus philosophiae à Christiania.)

Les théorèmes que je vais démontrer dans le mémoire suivant sont analogues aux théorèmes que l'illustre *Abel* a proposés dans le mémoire XV. du premier tome de ses ouvrages complètes. Ils énoncent des propriétés remarquables des fonctions de la forme $\int \frac{F\,dx}{\sqrt[n]{R}}$, fonctions dont M. *Abel* dans le mémoire cité n'a traités que pour le cas où n est égal à 2.

§. 1.

Théorème I.

Soient $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... $f_{n-1}(x)$ des fonctions entières de x, dont les coefficiens sont des variables indépendantes. Soient de plus $R(x)$ et $F(x)$ des fonctions entières de x. Si l'on désigne par $c_1\, c_2 \ldots\, c_n$ les diverses valeurs de $\sqrt[n]{\sqrt{1}}$ et que l'on suppose

$$1.\quad B_\nu(x) = c_\nu^{n-1} f_{n-1}(x) \sqrt[n]{(R(x)^{n-1})} + c_\nu^{n-2} f_{n-2}(x) \sqrt[n]{(R(x)^{n-2})} \ldots\ldots + c_\nu f_1(x) \sqrt[n]{(R(x))} + f_0(x),$$

et

$$2.\quad \psi(x) = B_1(x) . B_2(x) \ldots . B_n(x),$$

$\psi(x)$ devient une fonction entière de x. En la décomposant en facteurs de la forme $x - x_\nu$ on obtiendra

$$3.\quad \psi(x) = A(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_\mu).$$

Or, en supposant:

$$4.\quad \vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{(R(x))}} \Bigg\{ \log \left(\frac{f_0(x) + f_1(x)\sqrt[n]{(R(x))} + \ldots + f_{n-1}(x)\sqrt[n]{(R(x)^{n-1})}}{f_0(x) - f_1(x)\sqrt[n]{(R(x))} + \ldots - f_{n-1}(x)\sqrt[n]{(R(x)^{n-1})}} \right) + \sum_1^{\frac{1}{2}n-1}{}_p \left(\cos\frac{2p\pi}{n} \log \sum_0^{n-1}{}_\nu \sum_0^{n-1}{}_\zeta \left(f_\nu(x) f_\zeta(x) \cos\frac{2p(\nu-3)\pi}{n} \right) \right) - \sum_1^{\frac{1}{2}n-1}{}_p \left(\sin\frac{2p\pi}{n} \operatorname{arc} \left(\operatorname{tang} = \frac{\sum_0^{n-1}{}_\nu \sin\frac{2p\nu\pi}{n} f_\nu(x)\sqrt[n]{(R(x)^\nu)}}{\sum_0^{n-1}{}_\nu \cos\frac{2p\nu\pi}{n} f_\nu(x)\sqrt[n]{(Rx^\nu)}} \right) \right) \Bigg\},$$

$$5.\quad \vartheta'(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{(R(x))}}\left\{\log\left(f_0 x + f_1 x\sqrt[n]{(R(x))} + \dots + f_{n-1}\sqrt[n]{(R(x)^{n-1})}\right)\right.$$
$$+\sum_{0}^{\frac{1}{2}(n-1)}{}_p\left(\cos\frac{2p\pi}{n}\log\sum_{0}^{n-1}{}_\nu\sum_{0}^{n-1}{}_\zeta\left(f_\nu(x)f_\zeta(x)\cos\frac{2p(\nu-3)\pi}{n}\right)\right)$$
$$\left.-\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)}{}_p\left(\sin\frac{2p\pi}{n}\text{arc tang} = \left(\frac{\sum_{0}^{n-1}{}_\nu \sin\frac{2p\nu\pi}{n}f_\nu(x)\sqrt[n]{(R(x)^\nu)}}{\sum_{0}^{n-1}{}_\nu \cos\frac{2p\nu\pi}{n}f_\nu(x)\sqrt[n]{(R(x)^\nu)}}\right)\right)\right\},$$

$$6.\quad \Pi(x) = \int\frac{F(x)\,dx}{(x-a)\sqrt[n]{(R(x))}},$$

et en désignant par ϖz le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement d'une fonction quelconque z de x, je dis qu'on aura

$$7.\quad c_1\Pi(x_1) + c_2\Pi(x_2) + \dots c_\mu\Pi(x_\mu) = C + F(a)\vartheta(a) - \varpi\left(\frac{F(x)\vartheta(x)}{x-a}\right)$$

si n est un nombre pair, et

$$8.\quad c_1\Pi x_1 + c_2\Pi x_2 + \dots c_\mu\Pi x_\mu = C + F(a)\vartheta'(a) - \varpi\left(\frac{F(x)\vartheta'(x)}{x-a}\right)$$

si n est impair.

Toutes les valeurs de $c_1\, c_2 \dots c_n$ dans l'expression de la fonction $\psi(x)$ doivent être différentes entre elles, tandis que les quantités $c_1\, c_2 \dots c_\mu$ dans le premier membre des équations (7.) et (8.) seront déterminées par des équations particulières, que nous presenterons dans la suite.

Démonstration. Le second membre de l'équation (2.) est une fonction symétrique des racines de l'équation $y^n - R(x) = 0$; il est donc une fonction rationelle des coefficiens de cette équation, et conséquement $\psi(x)$ doit être une fonction entière de x. En vertu de l'équation (3.) les quantités $x_1, x_2, x_3, \dots x_\mu$ seront des fonctions des variables indépendantes qui sont les coefficiens des diverses puissances de x dans $f_0(x)$, $f_1(x), \dots f_{n-1}(x)$. Soit x une quelconque de ces quantités, on aura

$$9.\quad \psi'(x) = 0,$$

et en différentiant, on tire de là:

$$10.\quad dx\,\psi'(x) =$$
$$-\left[\delta f_{n-1}(x)\sum_{1}^{n}{}_\nu\frac{\psi(x)c_\nu^{n-1}\sqrt[n]{(R(x)^{n-1})}}{B_\nu(x)} + \delta f_{n-2}(x)\sum_{1}^{n}{}_\nu\frac{\psi(x)c_\nu^{n-2}\sqrt[n]{(R(x)^{n-2})}}{B_\nu(x)} + \dots\right.$$
$$\left.\dots\delta f_1(x)\sum_{1}^{n}{}_\nu\frac{\psi(x)c_\nu\sqrt[n]{(R(x))}}{B_\nu(x)} + \delta f_0(x)\sum\frac{\psi(x)}{B_\nu(x)}\right],$$

en désignant par $\psi'(x)$ la dérivée de $\psi(x)$ par rapport à x, et par la caractéristique δ la différentiation relative aux seules variables indépendantes. En supposant, pour abréger:

$$11.\quad \sum_{1}^{n}{}_{r}\ \frac{\psi(x)\,c_r^p\,\sqrt[n]{(R(x)^p)}}{B_r(x)} = C_p(x),$$

l'équation (10.) donne

$$12.\quad dx\,\psi'(x)$$

$$= -[\delta f_{n-1}(x)\,C_{n-1}(x) + \delta f_{n-2}(x)\,C_{n-2}(x) + \dots \delta f_1(x)\,C_1(x) + \delta f_0(x)\,C_0(x)].$$

De là on tire, en multipliant par $\dfrac{F(x)}{c(x-a)\sqrt[n]{(R(x))}\,\psi'(x)}$,

$$12.\quad \frac{F(x)\,dx}{c(x-a)\sqrt[n]{(R(x))}} =$$

$$-\frac{F(x)}{(x-a)\psi'(x)}\cdot\left\{\frac{\delta f_{n-1}x\,C_{n-1}(x)}{c\sqrt[n]{(R(x))}} + \frac{\delta f_{n-2}(x)\,C_{n-2}(x)}{c\sqrt[n]{(R(x))}} + \dots \frac{\delta f_0(x)\,C_0(x)}{c\sqrt[n]{(R(x))}}\right\}.$$

Maintenant, pour que l'équation (9.) puisse avoir lieu, une des quantités $B_1(x)$, $B_2(x)$, ... $B_n(x)$ doit être égale à zéro. Soit donc

$$14.\quad B_r(x) = 0,$$

on trouve

$$15.\quad C_p(x) = \frac{\psi x\,c_r^p\sqrt[n]{(R(x)^p)}}{B_r(x)}.$$

Donc

$$16.\quad (C_p(x))^n = R(x)\,(C_{p-1}(x))^n,$$

et

$$17.\quad \frac{C_p(x)}{c\sqrt[n]{(R(x))}} = C_{p-1}(x).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (13.) on aura

$$18.\quad \frac{F(x)\,dx}{c(x-a)\sqrt[n]{(R(x))}} = -\frac{F(x)}{(x-a)\psi' x}\Big[\delta f_{n-1}(x)\,C_{n-2}(x) + \delta f_{n-2}(x)\,C_{n-3}(x) + \dots$$
$$\dots + \delta f_1(x)\,C_0(x) + \delta f_0(x)\frac{C_{n-1}(x)}{R(x)}\Big].$$

Maintenant toutes les fonctions $C_{n-2}(x)$, $C_{n-3}(x)$, ... $C_0(x)$, $\dfrac{C_{n-1}(x)}{R(x)}$ sont des fonctions entières de x. En effet $C_{n-1}(x)$, $C_{n-2}(x)$, ... $C_0(x)$ sont les coefficients de $\delta f_{n-1}(x)$, $\delta f_{n-2}(x)$, ... $\delta f_0(x)$ dans le second membre de l'équation (12.), et on les tire de la différentiation de la fonction entière $\psi(x)$ par rapport aux variables indépendantes, et tous les

termes où $f_{n-1}(x)$ paraît dans $\psi(x)$ ont toujours, comme on le voit dans l'équation (2.), $R(x)$ pour coefficient. Donc, en faisant pour abréger:

$$19.\quad \lambda(x) = F(x)\Big[C_{n-2}(x)\,\delta f_{n-1}(x) + C_{n-3}(x)\,\delta f_{n-2}(x) + \dots \\ \dots + C_0(x)\,\delta f_1(x) + \frac{C_{n-1}(x)}{R(x)}\,\delta f_0 x\Big],$$

où $\lambda(x)$ est une fonction entière de x, on trouve

$$20.\quad \frac{F(x)\,dx}{c(x-a)\sqrt[n]{(R(x))}} = -\frac{\lambda(x)}{(x-a)\psi' x},$$

et en désignant par $\Sigma\lambda(x)$ la quantité $\lambda x_1 + \lambda x_2 + \dots \lambda x_\mu$:

$$21.\quad \Sigma\frac{F(x)\,dx}{c(x-a)\sqrt[n]{(R(x))}} = -\Sigma\frac{\lambda(x)}{(x-a)\psi' x}.$$

Si maintenant on fait $\lambda(x) = \lambda_1(x)(x-a) + \lambda(a)$, où $\lambda_1(x) = \frac{\lambda(x)-\lambda(a)}{x-a}$ est une fonction entière de x, l'équation (21.) donne

$$22.\quad \Sigma\frac{F(x)\,dx}{c(x-a)\sqrt[n]{(R(x))}} = -\Sigma\frac{\lambda_1 x}{\psi' x} - \lambda(a)\Sigma\frac{1}{(x-a)\psi' x}.$$

Mais

$$23.\quad \Sigma\frac{1}{(x-a)\psi' x} = -\frac{1}{\psi(a)} \text{ et}$$

$$24.\quad \Sigma\frac{\lambda_1(x)}{\psi'(x)} = \varpi\left(\frac{\lambda_1(x)}{\psi(x)}\right) = \varpi\frac{\lambda(x)}{(x-a)\psi(x)},$$

en remarquant que $\varpi\frac{\lambda(a)}{(x-a)\psi(x)}$ est toujours égal à zéro. L'équation (22.) devient donc:

$$25.\quad \Sigma\frac{F(x)\,dx}{c(x-a)\sqrt[n]{(R(x))}} = \frac{\lambda(a)}{\psi(a)} - \varpi\frac{\lambda(x)}{(x-a)\psi(x)},$$

et en intégrant et remarquant que $\int\varpi X\,dy = \varpi\int X\,dy$:

$$26.\quad \frac{1}{c_1}\Pi x_1 + \frac{1}{c_2}\Pi x_2 + \dots + \frac{1}{c_\mu}\Pi x_\mu = C + \int\frac{\lambda(a)}{\psi(a)} - \varpi\int\frac{\lambda(x)}{(x-a)\psi(x)}.$$

Pour trouver la valeur de $\int\frac{\lambda(a)}{\psi(a)}$, il y a rémarquer que cette intégrale à l'aide de l'équation (19.) peut être mise sous la forme suivante:

$$27.\quad \int\frac{\lambda(a)}{\psi(a)} = \\ F(a)\int\left\{\frac{C_{n-2}(a)\,\delta f_{n-1}(a) + C_{n-3}(a)\,\delta f_{n-2}(a) + \dots C_0(a)\,\delta f_1(a) + \frac{C_{n-1}(a)}{R(a)}\,\delta f_0(a)}{\psi(a)}\right\}.$$

Maintenant la quantité entre les parenthèses du second membre devant être intégrable, on doit avoir

$$\frac{\delta\left(\frac{C_p(a)}{\psi(a)}\right)}{\delta f_{r+1}(a)} = \frac{\delta\left(\frac{C_r(a)}{\psi(a)}\right)}{\delta f_{p+1}(a)},$$

en remarquant que

$$29. \quad \frac{C_{n-1}(a)}{R(a)} = C_{-1}(a).$$

Or cela a lieu effectivement, car on a

$$30. \quad \psi(a)\frac{\delta C_p(a)}{\delta f_{r+1}(a)} = \psi^2(a)\sqrt[n]{(R(a)^{p+r+1})}\,\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_\nu\left(\frac{c_\nu^p}{B_\nu(a)}\right)\cdot\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_\nu\left(\frac{c_\nu^{r+1}}{B_\nu(a)}\right) - \psi^2(a)\sqrt[n]{(R(a)^{p+r+1})}\,\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_\nu\left(\frac{c_\nu^{p+r+1}}{B_\nu^2(a)}\right),$$

$$31. \quad C_p(a)\frac{\delta\psi(a)}{\delta f_{r+1}(a)} = \psi^2(a)\sqrt[n]{(R(a)^{p+r+1})}\,\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_\nu\left(\frac{c_\nu^p}{B_\nu(a)}\right)\cdot\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_\nu\left(\frac{c_\nu^{r+1}}{B_\nu(a)}\right);$$

donc

$$32. \quad \frac{\delta\left(\frac{C_p(a)}{\psi(a)}\right)}{\delta f_{r+1}(a)} = \frac{\psi(a)\frac{\delta C_p(a)}{\delta f_{r+1}(a)} - C_p(a)\frac{\delta\psi(a)}{\delta f_{r+1}(a)}}{\psi^2(a)} = -\sqrt[n]{(R(a)^{p+r+1})}\,\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_\nu\left(\frac{c_\nu^{p+r+1}}{B_\nu^2(a)}\right),$$

et cela est une fonction symétrique par rapport à p et r. Le second membre de l'équation (27.) est donc intégrable. Maintenant dans toutes les fonctions $\frac{C_{n-2}(a)}{\psi(a)}$, $\frac{C_{n-3}(a)}{\psi a}$, ... $\frac{C_{n-1}(a)}{R(a)\psi(a)}$, il n'existe aucune partie qui ne contienne toutes les quantités $f_0(a)$, $f_1(a)$, $f_{n-1}(a)$ ....: on conclura donc que

$$33. \quad \int\frac{\lambda(a)}{\psi(a)} = F(a)\int\frac{C_{p-1}\,\delta f_p(a)}{\psi(a)}$$

ou, en substituant la valeur de $C_{p-1}(a)$ donnée par l'équation (11.):

$$34. \quad \int\frac{\lambda(a)}{\psi(a)} = F(a)\int\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_\nu\frac{c_\nu^{p-1}\sqrt[n]{(R(a)^{p-1})}\,\delta f_p(a)}{B_\nu(a)} = \frac{F(a)}{\sqrt[n]{(R(a))}}\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_\nu\frac{1}{c_\nu}\log B_\nu(a).$$

Si n est pair, $\sqrt[n]{\sqrt{1}}$ a deux valeurs réelles $+1$ et -1, et $n-2$ valeurs imaginaires de la forme $\cos\frac{2p\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2p\pi}{n}$, en donnant à p successivement toutes les valeurs entières renfermées entre les limites 1 et $\frac{n}{2}-1$. Si n est impair, $\sqrt[n]{\sqrt{1}}$ a une valeur réelle $+1$ et $n-1$ valeurs imaginaires de la forme $\cos\frac{2p\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2p\pi}{n}$, en don-

nant à p successivement toutes les valeurs entières renfermées entre les limites 1 et $\frac{n-1}{2}$. En vertu de cela et en remarquant que

$$(a+b\sqrt{-1})\log(c+d\sqrt{-1})+(a-b\sqrt{-1})\log(c-d\sqrt{-1})$$
$$= a\log(c^2+d^2)+b\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{d}{c}\right)$$

on trouve aisément, si n est pair:

$$35.\quad \int\frac{\lambda(a)}{\psi(a)} = F(a)\,\vartheta(a),$$

et si n est impair:

$$36.\quad \int\frac{\lambda(a)}{\psi(a)} = F(a)\,\vartheta'(a).$$

Donc, en substituant cela dans l'équation (26.) on a

$$37.\quad \frac{1}{c_1}\Pi x_1+\frac{1}{c_2}\Pi x_2+\dots\frac{1}{c_\mu}\Pi x_\mu = C+F(a)\,\vartheta(a)-\varpi\left(\frac{F(x)\,\vartheta(x)}{x-a}\right)$$

si n est pair, et

$$38.\quad \frac{1}{c_1}\Pi x_1+\frac{1}{c_2}\Pi x_2+\dots\frac{1}{c_\mu}\Pi x_\mu = C+F(a)\vartheta'(a)-\varpi\left(\frac{F(x)\vartheta'(a)}{x-a}\right)$$

si n est impair; ou parceque $\frac{1}{c_1}$ est aussi une valeur de $\sqrt[n]{\sqrt{1}}$, en posant c_ν au lieu de $\frac{1}{c_\nu}$:

$$39.\quad c_1\Pi x_1+c_2\Pi x_2+\dots c_\mu\Pi x_\mu = C+F(a)\,\vartheta(a)-\varpi\left(\frac{F(x)\,\vartheta(x)}{x-a}\right)$$

si n est pair, et si n est impair

$$40.\quad c_1\Pi x_1+c_2\Pi x_2+\dots c_\mu\Pi x_\mu = C+F(a)\vartheta'(a)-\varpi\left(\frac{F(x)\,\vartheta'(x)}{x-a}\right)$$

Les valeurs de $c_1, c_2, c_3, \dots c_\mu$ dans le premier membre des équations (39.) et (40.) seront déterminées par les équations:

$$41.\quad \begin{cases} c_1\,C_p(x_1) = \sqrt[n]{(R(x_1))}\,C_{p-1}(x_1), \\ c_2\,C_p(x_2) = \sqrt[n]{(R(x_2))}\,C_{p-1}(x_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ c_\mu\,C_p(x_\mu) = \sqrt[n]{(R(x_\mu)}\,C_{p-1}(x_\mu), \end{cases}$$

que l'on tire aisément de l'équation (17.).

§. 2.

En supposant plusieurs des quantités $x_1, x_2, \dots x_\mu$ égales entre elles, par exemple $x_1 = x_2$, on aura en vertu des équations (41.):

$$42. \quad c_1 C_p(x_1) = \sqrt[n]{(R(x_1))}\, C_{p-1}(x_1) = c_2 C_p(x_1),$$

et cela donne, en supposant que $C_p(x_1)$ et $\sqrt[n]{(R(x))}\, C_{p-1}(x)$, ou, ce qui est la même chose, $C_p(x)$ et $R(x)\, C_{p-1}(x)$ n'ont pas $x-x_1$ pour diviseur commun:

$$c_1 = c_2.$$

On aura donc le théorème suivant.

Théorème II.

Etant donné l'équation

$$43. \quad \psi(x) = A(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots\ldots(x-x_\mu)^{m_\mu},$$

où les fonctions $C_p(x)$ et $R(x)\, C_{p-1}(x)$ n'ont pas de diviseur commun, on aura

$$44. \quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \ldots\ldots c_\mu m_\mu \Pi x_\mu = C + F(a)\,\vartheta(a) - \varpi\left(\frac{F(x)\,\vartheta(x)}{x-a}\right)$$

si n est pair, et

$$45. \quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \ldots\ldots c_\mu m_\mu \Pi x_\mu = C + F(a)\,\vartheta'(a) - \varpi\left(\frac{F(x)\,\vartheta'(a)}{x-a}\right)$$

si n est impair.

§. 3.

Si l'on suppose $F(x)$ divisible par $(x-a)$, $F(a)$ devient $=0$. On aura donc, en mettant $(x-a)\,F(x)$ à la place de $F(x)$ le théorème que voici:

Théorème III.

Les choses étant supposées les mêmes que dans le théorème II., si l'on fait

$$46. \quad \Pi x = \int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt[n]{(R(x))}},$$

où $F(x)$ est une fonction entière quelconque de x, on aura

$$47. \quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \ldots\ldots c_\mu m_\mu \Pi x_\mu = C - \varpi(F(x)\,\vartheta(x))$$

si n est pair, et

$$48. \quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \ldots\ldots c_\mu m_\mu \Pi x_\mu = C - \varpi(F(x)\,\vartheta'(x))$$

si n est impair.

§. 4.

Si dans les formules (44.) et (45.) on suppose le degré de $F(x)$ moindre que celui de $\sqrt[n]{(R(x))}$, on aura

$$\varpi\left(\frac{F(x)\,\vartheta(x)}{x-a}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \varpi\left(\frac{F(x)\,\vartheta'(x)}{x-a}\right) = 0.$$

On aura donc:

Théorème IV.

Les choses étant supposées les mêmes que dans le théorème (2.), si le degré de $(F(x))^n$ est moindre que celui de $R(x)$, on aura

$$49.\quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \dots c_\mu m_\mu \Pi x_\mu = C + F(a)\vartheta(a)$$

si n est pair, et

$$50.\quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \dots c_\mu m_\mu \Pi x_\mu = C + F(a)\vartheta'(a)$$

si n est impair.

§. 5.

Si dans le théorème précédent on suppose $F(x)$ divisible par $x-a$, on aura $F(a)=0$, et en mettant $(x-a)F(x)$ au lieu de $F(x)$, on aura le théorème suivant

Théorème V.

Les choses étant supposées les mêmes que dans le théorème (2.), si l'on fait

$$51.\quad \Pi x = \int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt[n]{(Rx)}},$$

où le degré de $F(x)^n$ augmenté de n unités est moindre que celui de $R(x)$, on aura

$$52.\quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \dots c_\mu m_\mu \Pi x_\mu = C.$$

§. 6.

En différentiant les équations (44.) et (45.) $k-1$ fois de suite par rapport à a, on aura le théorème suivant.

Théorème VI.

Faisant

$$53.\quad \Pi(x) = \int \frac{F(x)\,dx}{(x-a)^k \sqrt[n]{(R(x))}}$$

les autres choses étant supposées les mêmes que dans le théorème (2.), on aura

$$54.\quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \dots c_\mu m_\mu \Pi x_\mu$$
$$= C + \frac{1}{\Gamma k} \cdot \frac{d^{k-1}(F(a)\,\vartheta(a))}{da^{k-1}} - \varepsilon \left(\frac{F(x)\,\vartheta(x)}{(x-a)^k}\right)$$

si n est pair, et

$$55.\quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \ldots . c_\mu m_\mu \Pi_\mu x_\mu$$
$$= C + \frac{1}{\Gamma k} \cdot \frac{d^{k-1}(F(a)\vartheta'(a))}{da^{k-1}} - \varpi\left(\frac{F(x)\vartheta'(x)}{(x-a)^k}\right)$$

si n est impair. Γk désigne comme de contienne le produit $1.2.3\ldots.(k-1)$.

§. 7.

Soit $\mathfrak{F}(x)$ une fonction rationelle quelconque de x, on peut toujours faire

$$56.\quad \mathfrak{F}(x) = F(x) + \frac{F_1(x)}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{F_2(x)}{(x-a_2)^{k_2}} + \ldots . \frac{F_\nu(x)}{(x-a_\nu)^{k_\nu}},$$

où $F(x)$, $F_1(x)$, ... $F_\nu(x)$ désignent des fonctions entières de x. On aura donc en vertu des théorèmes III. et VI. le théorème qui suit.

Théorème VII.

Faisant

$$57.\quad \Pi x = \int \frac{\mathfrak{F}(x)\, dx}{\sqrt[n]{(R(x))}},$$

$\mathfrak{F}(x)$ étant déterminé par l'équation (56.), on aura

$$58.\quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \ldots . c_\mu m_\mu \Pi x_\mu =$$
$$C - \varpi(\mathfrak{F}(x)\vartheta(x)) + \frac{1}{\Gamma k_1} \cdot \frac{d^{k_1-1}(F_1(a_1)\vartheta(a_1))}{da_1^{k_1-1}} + \frac{1}{\Gamma k_2} \cdot \frac{d^{k_2-1}(F_2(a_2)\vartheta(a_2))}{da_2^{k_2-1}} + \ldots$$
$$\ldots . + \frac{1}{\Gamma k_\nu} \cdot \frac{d^{k_\nu-1}(F_\nu(a_\nu)\vartheta(a_\nu))}{da_\nu^{k_\nu-1}}$$

si n est pair, et

$$59.\quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \ldots . c_\mu m_\mu \Pi x_\mu =$$
$$C - \varpi(\mathfrak{F}(x)\vartheta'(x)) + \frac{1}{\Gamma k_1} \cdot \frac{d^{k_1-1}(F_1(a_1)\vartheta'(a_1))}{da_1^{k_1-1}} + \frac{1}{\Gamma k_2} \cdot \frac{d^{k_2-1}(F_2(a_2)\vartheta'(a_2))}{da_2^{k_2-1}} + \ldots$$
$$\ldots . + \frac{1}{\Gamma k_\nu} \cdot \frac{d^{k_\nu-1}(F_\nu(a_\nu)\vartheta'(a_\nu))}{da_\nu^{k_\nu-1}}$$

si n est impair.

§. 8.

En considérant un certain nombre m des quantités x_1, x_2, ... x_μ comme variables indéterminées, les coefficients de x dans les fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... $f_{n-1}(x)$ seront des fonctions de celles-ci et déterminées par m des équations (41.). Le plus grand nombre des variables

indépendantes est donc égal au nombre des coefficiens de x dans $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... $f_{n-1}(x)$, et la somme d'un nombre quelconque de fonctions de la forme (57.) sera donc réduite à l'aide des équations (58.) et (59.) à un nombre déterminé ν de fonctions de la même forme, suivie d'une expression algébrique, logarithmique ou circulaire. Pour trouver ce nombre ν, soit le dégré de $R(x) = p$, et de $f_{n-1}(x) = r$: la moindre valeur de μ est évidement $= nr + (n-1)p$. On trouvera donc en ayant égard à la forme de la fonction $\psi(x)$:

Le degré de $f_{n-1}(x) =$ . . . . r;

Le degré de $f_{n-2}(x)$ égal au nombre entier que contient $r + \frac{r}{n}$;

Le dégré de $f_{n-3}(x)$ égal au nombre entier que contient $r + \frac{2p}{n}$;

. . . .

Le degré de $f_1(x)$ égal au nombre entier que contient $r + \frac{(n-2)p}{n}$;

Le degré de $f_0(x)$ égal au nombre entier que contient $r + \frac{(n-1)p}{n}$.

Donc le nombre des coefficiens est égal à la somme de $nr + n - 1$ et des nombres entiers que contiennent les fractions $\frac{p}{n}, \frac{2p}{n}, \dots \frac{(n-2)p}{n}, \frac{(n-1)p}{n}$; en remarquant qu'en vertu de la forme des équations (41.) un des coefficiens doit être arbitraire. En retranchant ce nombre de $nr + (n-1)p$, on trouvera ν. On a donc le théorème suivant.

Théorème VIII.

Soit $\Pi x = \int \frac{\mathfrak{F}(x)\,dx}{\sqrt[n]{(R(x))}}$, où $\mathfrak{F}(x)$ est une fonction rationelle quelconque de x, et $R(x)$ une fonction entière du degré p: la somme d'un nombre quelconque de fonctions de cette forme sera toujours réductible à une expression algébrique, logarithmique ou circulaire, et à un nombre ν de fonctions de la même forme. Ce nombre ν est égal à la différence entre $(n-1)(p-1)$ et la somme des nombres entiers que contiennent les fractions $\frac{p}{n}, \frac{2p}{n}, \dots \frac{(n-1)p}{n}$. Si $x_1, x_2, \dots x_m$ sont les variables indépendantes, les variables dans les ν fonctions de la forme (57.) sont les

racines de l'équation:

$$60.\quad \frac{\psi(x)}{A(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_m)} = 0.$$

§. 9.

Si plusieurs des quantités x_1, x_2, ... x_m sont égales entre elles, m des équations (41.) ne suffisent pas pour déterminer les coefficiens des fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... $f_{n-1}(x)$. Dans ce cas, en faisant pour abréger

$$6.\quad c.C_p(x) - \sqrt[n]{(R(x))}\, C_{p-1}(x) = \varrho(x),$$

et en supposant $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots. = x_k$, on aura les équations:

$$62.\quad \varrho(x_1) = 0,\quad \varrho'(x_1) = 0,\quad \varrho''(x_1) = 0,\quad \ldots.\quad \varrho^{k-1}(x_1) = 0.$$

Christiania en Norvegue le 1 Août 1839.

17.

Mémoire
sur différens procédés d'intégration, par lesquels on obtient l'attraction d'un ellipsoïde homogène dont les trois axes sont inégaux, sur un point extérieur.

(Par Mr. *J. Plana* à Turin.)

L'histoire des principales recherches des géomètres sur ce problème célèbre est trop connue aujourd'hui pour qu'il soit nécessaire de la rappeler ici. Les discussions qui se sont élévées dernièrement dans le sein de l'Académie des sciences de Paris, ont même contribué à la rendre plus lumineuse par des rapprochements nouveaux. Ainsi, je suppose à mon lecteur la connaissance des écrits antérieurs sur ce sujet, et je livre à son jugement celui que je lui présente.

Probablement, pour tous ceux qui sont au fait de ces nombreux écrits, il doit paraître superflu, au premier coup d'oeil, de publier, en ce moment, un aussi long Mémoire sur la même matière. Effectivement, je ne l'avois d'abord rédigé, en grande partie, que pour ma propre instruction, après la lecture du savant Mémoire publié par M. *Poisson* dans le XIIIième volume de l'Académie des Sciences de Paris. Mais, mes idées ont changé, lorsque, par une méditation suivie, mon travail m'a paru avoir acquis un plus grand degré d'importance par la nouveauté des moyens que j'ai employés, soit pour retrouver les résultats connus, soit pour les éclairer mutuellement.

C'est dans le corps même de ce Mémoire, que l'on trouvera les réflexions nouvelles que j'ai cru convenable de faire sur les différentes formules auxquelles je me voyais conduit par mon analyse. Je m'abstiens de les concentrer dans ce préambule, parceque leur manière d'être est inhérente au langage algébrique. Les quatre paragraphes dont ce Mémoire est composé, constituent, à certains égards, quatre Mémoires qu'on pourrait séparer; mais, en les réunissant ils se prêtent un secours mutuel, sans qu'aucune partie de l'ensemble de ces recherches devienne étrangère au but principal, déclaré par le titre du Mémoire.

On verra dans le quatrième paragraphe quelle est mon opinion et ma manière de considérer la solution donnée par *Legendre* en 1788. C'est un chef-d'oeuvre d'analyse; si par le mot *analyse*, on veut bien entendre une suite de transformations des formules primitives dans lesquelles le raisonnement est en partie remplacé par le mécanisme du calcul. Abstraction faite de la longueur des calculs c'est, à mon avis, la solution la plus directe qu'on ait donné de ce problème jusqu'à ce jour.

En effet; tout bien considéré, il me semble qu'en pareil cas, on doit entendre par solution *directe*, celle où l'on somme les attractions des élémens prismatiques de la masse, parallèles aux axes; ou bien, celle où l'on somme les attractions des élémens de la masse, formés par de petites pyramides tronquées qui convergent vers le point attiré. Car ces attractions élémentaires sont les seules qui peuvent être d'abord exprimées *sans* le signe intégral, après une sommation fort simple, opérée sur des élémens, dont les trois dimensions sont infiniment petites.

Si l'attraction des courbes elliptiques *semblables* a aussi la propriété de pouvoir être exprimée indépendamment du signe intégral, il faut avouer que ce n'est point là le cas d'une décomposition primordiale et féconde, comme celle des élémens prismatiques ou pyramidaux, puisqu'elle exige deux intégrations. Et si elle a eu un succès complet dans la question actuelle, cela tient à des combinaisons heureuses qui, probablement, n'auraient pas été saisies, après avoir concue l'idée d'une telle décomposition, à une époque où la véritable solution et les variétés de sa forme étaient ignorées ou faiblement supçonnées. Pour justifier cette dernière phrase, il me suffira de faire observer, que *D'Alembert* avait des doutes sur la proposition de *Maclaurin*, même en la bornant au cas particulier pour lequel il l'avait énoncée, sans démonstration, dans l'art. 653 de son *Traité des fluxions*. Il est vrai que ces doutes ont été bientôt dissipés par *D'Alembert* lui-même; mais ils attestent une manière de voir fort éloignée de celle de nos jours *). Le passage de la page 171 du Tome VII. de ses opuscules, où *D'Alembert* semble admettre la possibilité d'exclure de ce problème les transcendantes elliptiques en offre une preuve non moins remarquable.

---

*) Voyez la page 242 du Tome VI. et la page 103 du Tome VII. de ses opuscules.

Ainsi que Mr. *Poisson* l'a déclaré lui-même, sa solution, par la décomposition de l'ellipsoïde en couches elliptiques semblables, n'exige aucun principe nouveau d'analyse; et à cet égard elle pouvait être trouvée par *Lagrange* en 1773, lorsqu'il a composé son premier Mémoire sur ce sujet. Pour appuyer une telle opinion, on pourrait ajouter, que *Lagrange,* à cette époque, avait posé lui-même la base d'un principe général pour opérer le changement des variables soumises aux intégrales doubles ou triples. Mais, malheureusement, l'esprit humain ne sait pas toujours plier le cas général au cas particulier qu'il contemple. D'ailleurs, malgré la généralité de cette transformation de *Lagrange,* elle ne saurait comprendre celle employée par Mr. *Poisson,* qui revient à transformer une intégrale double en une intégrale triple, à l'aide du principe de *Leibnitz* pour différentier les fonctions soumises au signe intégral. Suivant ce principe, si x est un paramètre, et x, y sont deux variables, on a

$$\int F(x,y,k)\,dx = \int dx \int \frac{d.F(x,y.k)}{dk}\,dk = \int dk \int \frac{d.F(x,y,k)}{dk}\,dx,$$

$$\iint F(x,y,k)\,dx\,dy = \int dk \int dy \int \frac{d.F(x,y,k)}{dk}\,dx;$$

de sorte qu'on doit regarder cette transformation comme capable d'augmenter, en général, la difficulté: mais, dans ce cas particulier, elle a l'avantage de rendre possible la double intégrale $\int dy \int \frac{d.F(x,y,k)}{dk}\,dx$, et de présenter le résultat sous la forme la plus lumineuse pour le but qu'on a en vue.

Tel est le véritable motif du succès de cette méthode. Et si l'idée de la décomposition par couches elliptiques semblables, veut être qualifiée aujourd'hui comme simple et presque spontanée, je ne sais si cela est permis en posant bien les difficultés d'exécution qu'elle présente *a priori.* Pour les surmonter, voici, si je ne me trompe, l'origine de l'artifice employé. L'idée d'appliquer à l'attraction de l'ellipsoïde les formules relatives à la transformation des coordonnées est assez naturelle, et on voit qu'elle s'est présentée à *Lagrange* en finissant son Mémoire *). A la vérité c'étoit pour un but peu ou point efficace pour faciliter les intégrations: mais l'idée étoit en elle même originale, et on peut conjecturer, que c'est en conservant le principe et en variant le but, que Mr. *Poisson*

---

*) Voyez page 146 du Vol. de l'Académie de Berlin pour l'année 1773.

a puisé dans cette conception le moyen de faire disparaître les trois rectangles qui rendent fort compliquée la forme primitive de la différentielle qu'on doit intégrer pour avoir l'attraction de la couche elliptique.

L'attraction des couches coniques considérées par *Legendre* a aussi la propriété de pouvoir être exprimée sans le signe intégral: mais c'est encore là une conséquence éloiguée qu'on tire de la sommation des attractions dues aux petites pyramides tronquées. Si la forme la plus simple dont l'attraction de la couche conique est susceptible se trouve conclue dans le Mémoire de *Legendre,* par un retour sur la même intégrale double dont on a déjà effectué une des deux intégrations, cela n'empêche pas de regarder sa solution connue directe, puisque la conclusion est tirée, sans l'emploi des séries, d'une propriété qu'il a su mettre en évidence dans le résultat très compliqué de son intégration. Au reste, soit pour les courbes elliptiques, soit pour les courbes coniques, la difficulté consiste à exprimer leur attraction sous la forme la plus convenable pour tirer du résultat le théorème de *Maclaurin,* dans le cas général. A cet égard, la solution de *Legendre* et celle de Mr. *Poisson* ne laissent rien à désirer. En comparant ces méthodes d'intégration à bien d'autres qu'on pourrait imaginer, on saura mieux apprécier les avantages qui leur sont inhérens. Alors on sent, que dans ce problème, il ne suffit pas d'exécuter une des deux intégrations; mais qu'il faut en outre savoir choisir, non seulement les variables, mais encore le procédé de l'intégration. C'est par ce choix qu'on peut à la fois, lire dans la forme même du résultat le théorème de *Maclaurin,* et avoir son expression de manière qu'il soit immédiatement réductible aux transcendentes elliptiques de première et de seconde espèce.

Dès qu'on renonce au principe des points *correspondans* considérés par M. *Ivory,* les difficultés inhérentes au problème dont il est ici question, naissent de la circonstance qu'il est implicitement inséparable de deux autres problèmes dont la solution devrait précéder. Mais un tel ordre est rarement celui que suit l'esprit humain. Il faut une étude approfondie du sujet dans son ensemble, comme dans ses détails, pour le réduire à plusieurs autres questions, chacune susceptible d'une solution plus facile. Maintenant, l'ordre suivant lequel on doit procéder dans cette recherche me paraît bien déterminé, et c'est en m'y conformant, que j'ai d'abord exposé dans les deux premiers paragraphes la solution des deux questions auxiliaires auxquelles la question principale est intimement liée. J'ai pensé,

qu'un tel ordre dans l'exposition était le seul capable de faire sentir les motifs des calculs qui se succédent.

Je ne puis, au reste, partager les opinions de ceux qui regardent le problème de l'attraction de l'ellipsoïde comme un de ceux destinés à établir la supériorité de la synthèse sur l'analyse. Cela n'est peut-être jamais vrai, si on veut bien songer à la fois au mode de la solution et à l'expression des inconnues en langage algébrique. Mr. *Liouville,* un des plus grand géomètres de notre époque, vient d'en fournir un nouvel exemple frappant, en démontrant par l'analyse des formules découvertes par Mr. *Poisson* par des idées synthétiques, et qu'il croyait fort difficiles à établir d'après des considération de pure analyse *). Toutefois j'admets sans difficulté, que les solutions analytiques ont souvent besoins d'être élaborées et ameliorées. Il me semble, que j'offre dans ce Mémoire l'exemple de quelques unes des améliorations qu'on pouvait désirer dans les solutions analytiques du problème que j'y traite. Le lecteur capable et impartial, jugera jusqu'à quel point j'ai rempli cette tâche.

---

§. 1.

Analyse de l'équation du 3ième degré, propre à déterminer la surface d'un ellipsoïde, assujettie à passer par un point extérieur à la surface d'un autre ellipsoïde donné; les sèctions principales des deux ellipsoïdes étant décrites des mêmes foyers.

1. Soit O le point extérieur attiré, en raison inverse du carré de la distance, par chacun des élémens différentiels de la masse de l'ellipsoïde: placons dans ce point l'origine des coordonnées rectangulaires, et désignons par x, y, z celles d'un point quelconque de sa masse. La direction des axes qui passent par le point O étant arbitraire, nous la supposerons telle qu'ils soient parallèles aux trois axes principaux de l'ellipsoïde donné.

Ainsi, en nommant a_1, b_1, c_1 les demi-longueurs de ces axes, et a, b, c les coordonnées du centre de l'ellipsoïde, on pourra représenter l'équation de sa surface par

$$1.\quad \frac{(a-x)^2}{a_1^2}+\frac{(b-y)^2}{b_1^2}+\frac{(c-z)^2}{c_1^2}=1.$$

*) Voyez le No. 2. des Comptes-Rendus. Séance du 9 Juillet 1838. page 85.

L'équation de la surface d'un autre ellipsoïde assujetti à passer par le même point O, sera

$$\frac{(a-x)^2}{A_1^2}+\frac{(b-y)^2}{B_1^2}+\frac{(c-z)^2}{C_1^2}=1;$$

et comme elle doit être satisfaite en y posant $x=0$, $y=0$, $z=0$, on aura

$$\frac{a^2}{A_1^2}+\frac{b^2}{B_1^2}+\frac{c^2}{C_1^2}=1.$$

Il est évident qu'il y aura une infinité d'ellipsoïdes, soumis à cette seule condition: mais si l'on ajoute, que les excentricités des trois sections principales doivent être respectivement les mêmes que celles du premier ellipsoïde, il faudra qu'on ait les équations

$$a_1^2-b_1^2=A_1^2-B_1^2;\quad a_1^2-c_1^2=A_1^2-C_1^2;\quad b_1^2-c_1^2=B_1^2-C_1^2,$$

lesquelles donnent

$$B_1^2=A_1^2-(a_1^2-b_1^2),\quad C_1^2=A_1^2-(a_1^2-c_1^2).$$

De là je conclus, qu'en déterminant A_1^2 par l'équation

$$2.\quad \frac{a^2}{A_1^2}+\frac{b^2}{A_1^2+b_1^2-a_1^2}+\frac{c^2}{A_1^2+c_1^2-a_1^2}=1,$$

on aura

$$3.\quad \frac{(a-x)^2}{A_1^2}+\frac{(b-y)^2}{A_1^2+b_1^2-a_1^2}+\frac{(c-z)^2}{A_1^2+c_1^2-a_1^2}=1,$$

pour l'équation de la surface d'un ellipsoïde qui passe par le point attiré et qui ait les mêmes excentricités que l'ellipsoïde donné.

Au lieu de l'équation (2.) on aurait une équation fort simple du premier degré, si on voulait seulement que le second ellipsoïde fût semblable à l'ellipsoïde donné, puisqu'alors on aurait

$$A_1^2 b_2^2=B_1^2 a_1^2,\quad A_1^2 c_1^2=C_1^2 a_1^2,$$

et par conséquent

$$A_1^2=a^2+b^2\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2+c^2\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2.$$

Ainsi ce cas ne présente aucune difficulté. Revenons donc au précédent, et faisons

$$A_1^2=a_1^2+\varpi;\quad B_1^2=b_1^2+\varpi;\quad C_1^2=c_1^2+\varpi.$$

Alors, les équations qui déterminent la surface du second ellipsoïde, sont

$$4.\quad \frac{a^2}{a_1^2+\varpi}+\frac{b^2}{b_1^2+\varpi}+\frac{c^2}{c_1^2+\varpi}=1,$$

$$5.\quad \frac{(a-x)^2}{a_1^2+\varpi}+\frac{(b-y)^2}{b_1^2+\varpi}+\frac{(c-z)^2}{c_1^2+\varpi}=1.$$

L'équation (2.) a sur l'équation (4.) l'avantage de faire voir, d'un coup d'oeil, que A_1^2 est une fonction des cinq quantités a^2, b^2, c^2, $a_1^2-b_1^2$, $a_1^2-c_1^2$, laquelle aura nécessairement la même valeur (les coordonnées a, b, c demeurant les mêmes) pour tous les ellipsoïdes décrites des mêmes foyers que l'ellipsoïde donné.

2. L'équation (4.) étant du troisième degré par rapport à ϖ, il est intéressant de savoir *a priori*, si elle admet deux racines imaginaires. Soit, s'il est possible, $\varpi=p+q\sqrt{-1}$; il viendra en substituant,

$$\frac{a^2[(a_1^2+p)-q\sqrt{-1}]}{(a_1^2+p)^2+q^2}+\frac{b^2[b_1^2+p)-q\sqrt{-1}]}{(b_1^2+p)^2+q^2}+\frac{c^2[(c_1^2+p)^2-q\sqrt{-1}]}{(c_1^2+p)^2+q^2}=1.$$

Donc en égalant à zéro le coefficient de $\sqrt{-1}$, on aura

$$q\left[\frac{a^2}{(a_1^2+p)^2+q^2}+\frac{b^2}{(b_1^2+p)^2+q^2}+\frac{c^2}{(c_1^2+p)^2+q^2}\right]=0.$$

Or, il est manifeste, qu'en prenant pour p et q des quantités réelles il est impossible de satisfaire à cette équation autrement qu'en faisant $q=0$; ce qui donne

$$\varpi = p = \textit{une quantité réelle.}$$

La forme même de l'équation (4.) suffit pour démontrer, que ϖ doit avoir une valeur positive. Car, en posant $\varpi=0$, le premier membre devient plus grand que l'unité, puisque la condition propre à exprimer, que le point attiré est extérieur à l'ellipsoïde est précisement

$$\frac{a^2}{a_1^2}+\frac{b^2}{b_1^2}+\frac{c^2}{c_1^2}>1;$$

et en faisant $\varpi=\infty$, le même premier membre devient nul. Donc il y aura, entre les limites $\varpi=0$, $\varpi=\infty$, une quantité positive capable de rendre le premier membre de l'équation (4.) égal à l'unité.

Pour exclure la possibilité de *deux* racines positives dans la même équation observons, qu'en nommant ϖ' une seconde valeur positive de ϖ, on aurait aussi

$$\frac{a^2}{a_1^2+\varpi'}+\frac{b^2}{b_1^2+\varpi'}+\frac{c^2}{c_1^2+\varpi'}=1;$$

de sorte qu'en égalant ces deux expressions différentes de l'unité, on a

$$\frac{a^2}{a_1^2+\varpi}+\frac{b^2}{b_1^2+\varpi}+\frac{c^2}{c_1^2+\varpi}=\frac{a^2}{a_1^2+\varpi'}+\frac{b^2}{b_1^2+\varpi'}+\frac{c^2}{c_1^2+\varpi'}.$$

De là on tire, en supprimant le facteur commun $\varpi'-\varpi'$:

$$6.\quad 0=\frac{a^2}{(a_1^2+\varpi)(a_1^2+\varpi')}+\frac{b^2}{(b_1^2+\varpi)(b_1^2+\varpi')}+\frac{c^2}{(c_1^2+\varpi)(c_1^2+\varpi')},$$

c'est-à-dire une équation évidemment impossible, si en effet chacune des deux racines ϖ et ϖ' étoit positive. Cette conséquence et la précédente démontrent que l'équation (4.) a deux racines négatives et une positive. C'est aussi ce qu'on peut faire voir à l'aide des principes ordinaires.

En faisant disparaître les dénominateurs, l'équation (4.) devient

$$7.\quad a^2(b_1^2+\varpi)(c_1^2+\varpi)+b^2(a_1^2+\varpi)(c_1^2+\varpi)+c^2(a_1^2+\varpi)(b_1^2+\varpi) = (a_1^2+\varpi)(b_1^2+\varpi)(c_1^2+\varpi),$$

ou bien, en développant les produits indiqués,

$$8.\quad 0=\varpi^3+\varpi^2(a_1^2+b_1^2+c_1^2-a^2-b^2-c^2) + \varpi[a_1^2b_1^2+a_1^2c_1^2+b_1^2c_1^2-a^2(b_1^2+c_1^2)-b^2(a_1^2+c_1^2)-c^2(a_1^2+b_1^2)] + a_1^2b_1^2c_1^2-a^2b_1^2c_1^2-b^2a_1^2c_1^2-c^2a_1^2b_1^2.$$

Le dernier terme de cette équation est nécessairement négatif: car, en le divisant par $a_1^2b_1^2c_1^2$, on a le quotient

$$1-\frac{a^2}{a_1^2}-\frac{b^2}{b_1^2}-\frac{c^2}{c_1^2},$$

qui est négatif, conformément à l'inégalité établie plus haut. L'équation (8.) a, par conséquent, une racine positive au moins. Pour démontrer qu'elle a deux racines négatives il suffit ici de prouver, suivant la règle de *Descartes,* que les coefficients de ϖ^2 et ϖ sont de même signe, ou que le premier est positif et le second négatif. Soit, pour plus de simplicité

$$M = a_1^2+b_1^2+c_1^2-a^2-b^2-c^2;$$
$$N = a_1^2b_1^2+a_1^2c_1^2+b_1^2c_1^2-a^2(b_1^2+c_1^2)-b^2(a_1^2+c_1^2)-c^2(a_1^2+b_1^2).$$

De là on tire

$$M(b_1^2+c_1^2)-N = b_1^4+b_1^2c_1^2+c_1^4+b^2(a_1^2-b_1^2)+c^2(a_1^2-c_1^2).$$

Donc en disposant les quantités a_1, b_1, c_1 de manière qu'on ait $a_1>b_1$, $a_1>c_1$, le second membre de cette équation sera nécessairement positif; ce qui serait impossible en supposant

$$M = \textit{négatif};\qquad N = \textit{positif}.$$

Les seules formes admisibles de l'équation du 3ième degré en ϖ sont, par conséquent,

$$\varpi^3-A\varpi^2-B\varpi-C=0;\qquad \varpi^3+A\varpi^2+B\varpi-C=0;$$
$$\varpi^3+A\varpi^2-B\varpi-C=0.$$

Or, étant démontré, que les trois racines sont réelles, chacune de ces équations doit avoir une racine positive et deux racines négatives.

Cela posé, si l'on écrit

$$0 = \varpi^3 + M\varpi^2 + N\varpi - C$$

au lieu de l'équation (8.) en faisant $\varpi = \frac{z-M}{3}$, la transformée en z sera

$$z^3 - (3M^2 - 9N)z - (27C + 9MN - 2M^3) = 0,$$

et ses trois racines seront données par les formules suivantes:

$$\cos 3\varphi = \frac{27C + 9MN - 2M^3}{2(M^2 - 3N)^{\frac{3}{2}}};$$

$$z' = +2\sqrt{(M^2 - 3N)}\cos\varphi;$$

$$z'' = -2\sqrt{(M^2 - 3N)}\cos(60^0 - \varphi);$$

$$z''' = -2\sqrt{(M^2 - 3N)}\cos(60^0 + \varphi).$$

De là on tire la conséquence, que la valeur positive de ϖ sera toujours comprise entre zéro et la quantité $\frac{2}{3}\sqrt{(M^2 - 3N)} - \frac{1}{3}M$. A l'égard des deux racines négatives, voici comment on peut en fixer des limites dont l'expression est beaucoup plus simple.

En désignant par $-\varpi'$, $-\varpi''$ les deux racines négatives qui satisfont a l'équation (4.), on aura

$$\frac{a^2}{a_1^2 - \varpi'} + \frac{b^2}{b_1^2 - \varpi'} + \frac{c^2}{c_1^2 - \varpi'} = 1,$$

$$\frac{a^2}{a_1^2 - \varpi''} + \frac{b^2}{b_1^2 - \varpi''} + \frac{c^2}{c_1^2 - \varpi''} = 1.$$

Or, on conçoit que ces deux équations ne peuvent s'accorder avec l'inégalité

$$\frac{a^2}{a_1^2} + \frac{b^2}{b_1^2} + \frac{c^2}{c_1^2} > 1$$

sans admettre à la fois: 1°. que les deux quantités ϖ', ϖ'' surpassent en grandeur la plus petite des trois quantités a_1^2, b_1^2, c_1^2 c'est-à-dire c_1^2: 2°. qu'elles demeurent inférieures à la plus grande a_1^2 de ces trois quantités. Ainsi, on ne peut faire que deux hypothèses: la première que ϖ' et ϖ'' soient comprises entre c_1^2 et b_1^2 ou entre b_1^2 et a_1^2: la seconde, que la plus grande des deux se trouve comprise entre b_1^2 et a_1^2. La première de ces deux hypothèses est inadmissible: en effet, si on retranche l'une de l'autre les deux équations précédentes, en supposant $\varpi'' > \varpi'$, on aura

$$0 = \left(\frac{a^2}{a_1^2 - \varpi''} - \frac{a^2}{a_1^2 - \varpi'}\right) + \left(\frac{b^2}{b_1^2 - \varpi''} - \frac{b^2}{b_1^2 - \varpi'}\right) + \left(\frac{c^2}{\varpi' - c_1^2} - \frac{c^2}{\varpi'' - c_1^2}\right)$$

c'est-à-dire une équation impossible, puisqu'elle serait composée de trois parties positives.

On démontre de la même manière qu'on ne saurait regarder ϖ' et ϖ'' comme comprises entre b_1^2 et a_1^2. Ainsi, il faut nécessairement accorder, que la plus grande ϖ'' des deux quantités en question est comprise entre b_1^2 et a_1^2, et que la plus petite ϖ' est comprise entre c_1^2 et b_1^2. Cela posé, il est clair que l'introduction des racines négatives $-\varpi'$, $-\varpi''$ dans l'équation (5.) donnera deux hyperboloïdes distincts; un à *une* seule nappe, et l'autre à *deux* nappes qui passeront, aussi bien que l'ellipsoïde, par le point attiré, tout en ayant les mêmes excentricités que l'ellipsoïde donné. On voit par là qu'à l'aide de cette remarque, on peut donner une interprétation tout-à-fait géométrique à chacune des trois racines de l'équation du 3ième degré en ϖ.

3. Pour adapter les formules précédentes au cas des ellipsoïdes semblables au premier, nous y ferons

$$m = \frac{a_1^2}{b_1^2}, \qquad n = \frac{a_1^2}{c_1^2},$$

et, pour plus de symétrie, nous poserons $a_1^2 = k$. Alors, en multipliant par a_1^2 les deux membres des équations (1.), (4.), (5.) et posant

$$\nu = \frac{\varpi}{a_1^2} = \frac{\varpi}{k},$$

il viendra

$$9. \quad (a-x)^2 + m(b-y)^2 + n(c-z)^2 = k;$$

$$10. \quad \frac{a^2}{1+\nu} + \frac{mb^2}{1+m\nu} + \frac{nc^2}{1+n\nu} = k;$$

$$11. \quad \frac{(a-x)^2}{1+\nu} + \frac{m(b-y)^2}{1+m\nu} + \frac{n(c-z)^2}{1+n\nu} = k.$$

Avant d'aller plus loin, il importe de faire connaître une propriété remarquable du plan tangent à la surface exprimée par l'équation (11.), mené par le point attiré, c'est-à-dire par l'origine des coordonnées. Cette équation donne

$$\frac{dz}{dx} = p = -\frac{(a-x)}{n(c-z)}\left(\frac{1+n\nu}{1+\nu}\right);$$

$$\frac{dz}{dy} = q = -\frac{m(b-y)}{n(c-z)}\left(\frac{1+n\nu}{1+m\nu}\right).$$

Donc, en faisant $x=0$, $y=0$, $z=0$, on aura

$$12. \quad z + x.\frac{a}{nc}\left(\frac{1+n\nu}{1+\nu}\right) + y.\frac{mb}{nc}\left(\frac{1+n\nu}{1+m\nu}\right) = 0$$

pour l'équation de ce plan tangent. En y substituant pour ν ses trois va-

leurs réelles on formera les équations des trois plans tangens aux trois surfaces du second degré qui passent par le point attiré. Or, il est facile de démontrer, que ces trois plans sont *rectangulaires*. En effet; soit ν une seconde valeur de ν, les deux plans fournis par l'équation (12.) en y remplaçant ν par ν' se couperont à angle droit, si on a l'équation

$$0 = 1 + \frac{a^2}{n^2c^2}\left(\frac{1+n\nu}{1+\nu}\right)\left(\frac{1+n\nu'}{1+\nu}\right) + \frac{m^2b^2}{n^2c^2}\left(\frac{1+n\nu}{1+m\nu}\right)\left(\frac{1+n\nu'}{1+m\nu'}\right)$$

ou bien

$$13.\quad 0 = \frac{a^2}{(1+\nu)(1+\nu')} + \frac{m^2b^2}{(1+m\nu)(1+m\nu')} + \frac{n^2c^2}{(1+n\nu)(1+n\nu')}.$$

Or, cette équation est effectivement vraie, puisqu'en y faisant $\nu = \frac{\varpi}{a_1^2}$, $\nu' = \frac{\varpi'}{a_1^2}$ elle coïncide avec l'équation (6.) qui lie deux quelconques des trois racines de l'équation en ϖ.

En considérant la normale au plan exprimé par l'équation (12.), menée par l'origine des coordonnées, et nommant e, f, g les *cosinus* des angles qu'elle forme avec les axes des x, y, z, on a:

$$e = \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},\quad f = \frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},\quad g = \frac{1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}};$$

ce qui revient à dire, qu'en posant pour plus de simplicité

$$14.\quad Q^2 = a^2(1+m\nu)^2(1+n\nu)^2 + m^2b^2(1+\nu)^2(1+m\nu)^2 + n^2c^2(1+\nu)^2(1+m\nu)^2,$$

nous avons

$$15.\quad \begin{cases} e = \dfrac{a(1+m\nu)(1+n\nu)}{Q}, \\ f = \dfrac{mb(1+\nu)(1+n\nu)}{Q}, \\ g = \dfrac{nc(1+\nu)(1+m\nu)}{Q}. \end{cases}$$

En désignant par e', f', g'; e'', f'', g'' ce que deviennent ces formules lorsqu'on y remplace ν d'abord par ν' et ensuite par ν'', on aura l'expression des neuf *cosinus* qui déterminent la position des trois normales qui se coupent à angle droit à l'origine des coordonnées. Donc, en considérant ces trois normales comme trois nouveaux axes qui ont la même origine que les premiers, on pourra appliquer à ces neuf *cosinus* toutes les équations par lesquelles ils sont liés, conformément à la théorie connue de la transformation des coordonnées dans l'espace.

4. L'étude de l'équation (4.) présente une autre propriété géométrique que je vais exposer. En plaçant l'origine des coordonnées au centre de l'ellipsoïde, et déterminant un point de l'espace par les coordonnées a', b', c' telles qu'on ait

$$a' = \frac{a a_1}{A_1}, \quad b' = \frac{b b_1}{B_1}, \quad c' = \frac{c c_1}{C_1},$$

ce point sera placé sur la surface de l'ellipsoïde donné. En effet, ces trois équations donnent en vertu de l'équation (4.)

$$\frac{a'^2}{a_1^2} + \frac{b'^2}{b_1^2} + \frac{c'^2}{c_1^2} = 1.$$

Les points dont les coordonnées sont a, b, c; a', b', c' sont les deux points nommés *correspondans* par Mr. *Ivory*. La propriété géométrique dont j'entends parler est relative aux rayons-vecteurs tirés de chacun de ces deux points à la surface des deux ellipsoïdes concentriques. Voici en quoi elle consiste. Puisque, d'après l'équation (4.), on a

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \varpi,$$

et qu'en comptant les coordonnées depuis le centre de l'ellipsoïde, on a

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1,$$

on peut écrire

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \varpi\left(\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2}\right).$$

En ajoutant dans le second membre la quantité nulle $(x^2+y^2+z^2)-(x^2+y^2+z^2)$, on aura

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 + x^2\left(1+\frac{\varpi}{a_1^2}\right) + y^2\left(1+\frac{\varpi}{b_1^2}\right) + z^2\left(1+\frac{\varpi}{c_1^2}\right)$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Donc en faisant

$$x' = x\sqrt{\left(1+\frac{\varpi}{a_1^2}\right)}, \quad y' = y\sqrt{\left(1+\frac{\varpi}{b_1^2}\right)}, \quad z' = z\sqrt{\left(1+\frac{\varpi}{c_1^2}\right)},$$

nous aurons

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Mais les équations

$$a'x' = ax, \quad b'y' = by, \quad c'z' = cz$$

donnent

$$\frac{x'^2}{A_1^2} = \frac{x^2}{a_1^2}; \quad \frac{y'^2}{B_1^2} = \frac{y^2}{b_1^2}; \quad \frac{z'^2}{C_1^2} = \frac{z^2}{c_1^2};$$

partant on a

$$\frac{x'^2}{A_1^2} + \frac{y'^2}{B_1^2} + \frac{z'^2}{C_1^2} = \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1;$$

ce qui revient à dire, que le point dont les coordonnées sont x', y', z' est sur la surface du second ellipsoïde: c'est le point *correspondant* à celui qui se trouve placé sur la surface de l'ellipsoïde donné, et qui est déterminé par les coordonnées x, y, z.

Ces mêmes équations donnent

$$a'^2+b'^2+c'^2+x'^2+y'^2+z'^2-2(a'x'+b'y'+c'z')$$
$$=a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2-2(ax+by+cz);$$

ou bien

$$\sqrt{((a'-x')^2+(b'-y')^2+(c'-z')^2)}=\sqrt{((a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2)}.$$

Il est évident que, par les mêmes raisons on a

$$\sqrt{((a'+x')^2+(b'-y')^2+(c'-z')^2)}=\sqrt{((a+x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2)}.$$

C'est en vertu de l'égalité de ces rayons-vecteurs, qu'on peut, par la seule considération des élémens de l'intégrale, ramener immédiatement l'attraction sur un point extérieur au premier ellipsoïde à l'attraction sur un point intérieur du second ellipsoïde. Sur cela on peut voir le premier Volume des Fontions elliptiques de *Legendre* (pages 541—544).

Au reste, il est plus naturel de conjecturer, que la découverte des points correspondans a été faite par le simple rapprochement des formules posées dans les pages 11 et 21 du second volume de la *Mécanique céleste.* En effet, si l'on nomme a', b', c' les coordonnées d'un point placé dans l'intérieur de la masse M' du second ellipsoïde, et X', Y', Z' les composantes de son attraction sur ce point, les formules de la page 11 donnent

$$X'=\frac{3a'M'}{K'^3}.F;\quad Y'=\frac{3b'M'}{K'^3}\left(\frac{d.\lambda F}{d\lambda}\right);\quad Z'=\frac{3c'M'}{K'^3}\left(\frac{d.\lambda' F}{d\lambda'}\right).$$

Donc, les formules de la page 21 reviennent à dire, qu'en nommant X, Y, Z les composantes de l'attraction du premier ellipsoïde sur le point extérieur, on a

$$X=\frac{M}{M'}.\frac{a}{a'}.X';\quad Y=\frac{M}{M'}.\frac{b}{b'}.Y';\quad Z=\frac{M}{M'}.\frac{c}{c'}.Z'.$$

Il suit de là qu'en faisant

$$\frac{a}{a'}=\frac{A_1}{a_1};\quad \frac{b}{b'}=\frac{B_1}{b_1};\quad \frac{c}{c'}=\frac{C_1}{c_1},$$

on aura

$$X=\frac{M}{M'}.\frac{A_1}{a_1}X'=\frac{a_1b_1c_1}{A_1B_1C_1}.\frac{A_1}{a_1}X'=\frac{b_1c_1}{B_1C_1}X'.$$

Actuellement, si, en conservant les coordonnées orthogonales, on remplace X et X' par leurs expressions primitives affectées du triple signe

intégral, on verra aussitôt, après avoir effectué une des trois intégrations, que cette égalité peut être établie *a priori* par la considération des points correspondans. La découverte de Mr. *Ivory* étant ainsi présentée, on conçoit qu'elle ne pouvait répandre aucune lumière sur l'intégration qu'il fallait exécuter, et qu'il faut la considérer comme un moyen très-élégant d'éluder la difficulté qu'offre le problème de l'attraction de l'ellipsoïde sur un point extérieur.

Avant Mr. *Ivory* on comparait les attractions des deux mêmes ellipsoïdes sur le même point, en le considérant d'abord comme extérieur à l'ellipsoïde donné, et ensuite comme placé sur la surface du second; ce qui revenait à faire immédiatement $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$. Alors, le rapprochement des formules posées dans les pages 11 et 21 que je viens de citer, donne

$$X = \frac{M}{M'}X'; \quad Y = \frac{M}{M'}Y'; \quad Z = \frac{M}{M'}Z'.$$

Et de là on ne pouvait rien conclure sur le rapport des attractions exercées par les élémens prismatiques. Mr. *Ivory*, en comparant l'attraction de l'ellipsoïde donné sur le point qui lui est extérieur à celle que le second ellipsoïde exerce sur un point qui lui est intérieur a pu découvrir le rapport

$$\frac{X}{X'} = \frac{b_1 c_1}{B_1 C_1}$$

qui subsiste pour les attractions totales aussi bien que pour les attractions élémentaires. La difficulté d'imaginer l'existence de ce rapport sous ce double point de vue était assez grave: mais *D'Alembert* en avait déjà fourni un exemple remarquable par sa manière de démontrer le théorème de *Maclaurin* (Voyez le tome VII. de ses opuscules pages 104 et 112).

5. Je vais maintenant exposer différentes transformations qu'on peut faire subir à l'équation (10.)

$$[15.] \quad a^2(1+m\nu)(1+n\nu)+mb^2(1+\nu)(1+n\nu)+nc^2(1+\nu)(1+m\nu) = k(1+\nu)(1+m\nu)(1+n\nu);$$

$$15. \quad 0 = \nu^3.mnk+\nu^2[k(m+n+mn)-mn(a^2+b^2+c^2)] +\nu[k(1+m+n)-a^2(m+n)-mb^2(1+n)-nc^2(1+m)] -(a^2+mb^2+nc^2-k).$$

Si l'on fait

$$16. \quad h = a^2+mb^2+nc^2-k$$

on aura, en remplaçant k par sa valeur fournie par le premier membre

de l'équation (10.):

$$h = a^2 + mb^2 + nc^2 - \frac{a^2}{1+\nu} - \frac{mb^2}{1+m\nu} - \frac{nc^2}{1+n\nu},$$

ou bien

$$17. \quad \frac{h}{\nu} = \frac{a^2}{1+\nu} + \frac{m^2b^2}{1+m\nu} + \frac{n^2c^2}{1+n\nu}.$$

La quantité h sera nécessairement positive, puisque le point attiré étant extérieur à l'ellipsoïde, on a

$$a^2 + mb^2 + nc^2 > k.$$

Actuellement, si l'on fait $\nu = \frac{h}{t}$, l'équation (17.) devient

$$18. \quad \frac{a^2}{t+h} + \frac{m^2b^2}{t+mh} + \frac{n^2c^2}{t+nh} = 1,$$

et donne en faisant disparaître les dénominateurs,

$$19. \quad 0 = (t+h)(t+mh)(t+nh) - a^2(t+mh)(t+nh) \\ - m^2b^2(t+h)(t+nh) - n^2c^2(t+h)(t+mh);$$

c'est-à-dire l'équation désignée par (h') dans le Mémoire de *Legendre* publié dans le volume de l'Académie des sciences de Paris pour l'année 1788 (Voyez p. 482).

L'équation (19.) peut être écrite ainsi:

$$0 = (t - a^2 + h)(t + mh)(t + nh) \\ -(t - a^2 + h)[m^2b^2(t+nh) + n^2c^2(t+mh)] \\ - a^2m^2b^2(t+nh) - a^2n^2c^2(t+mh):$$

de sorte qu'on a

$$20. \quad 0 = (t - a^2 + h)(t - m^2b^2 + mh)(t - n^2c^2 + nh) \\ - a^2m^2b^2(t+nh) - a^2n^2c^2(t+mh) - m^2n^2b^2c^2(t - a^2 + h).$$

En remplaçant ν par $\frac{h}{t}$ l'équation (15.) devient

$$21. \quad 0 = t^3 - t^2[k(1+m+n) - a^2(m+n) - mb^2(1+n) - nc^2(1+m)] \\ + th[mn(a^2 + b^2 + c^2) - k(m+n+mn)] - mnkh^2.$$

En substituant ici pour k sa valeur donnée par l'équation (16.), il viendra

$$22. \quad 0 = t^3 - t^2[a^2 + m^2b^2 + nc^2 - h(1+m+n)] \\ + th[(m+n+mn)h - (m+n)a^2 - (1+n)m^2b^2 - (1+m)n^2c^2] \\ - mnh^2(a^2 + mb^2 + nc^2 - h).$$

En imitant ici ce qui se passe dans le problème relatif à la détermination des trois axes principaux d'un corps solide, nous pouvons remplacer cette équation du troisième degré par trois équations du premier degré. En effet, l'équation (20.) devient

$$23. \quad (t-a^2+h)z'-mabz''=nac$$

en y faisant:

$$24. \quad z'=\frac{(t-m^2b^2+mh)(t-n^2c^2+nh)-(mnbc)^2}{nac(t+mh)};$$

$$25. \quad z''=\frac{mab(t+nh)}{nac(t+mh)}.$$

Mais ces valeurs de z' et z'' sont les racines des deux équations du premier degré:

$$nac.z'+mnbc.z''=t-n^2c^2+nh,$$
$$mab\,z'-(t-m^2b^2+mh)z''=-mnbc.$$

Donc, l'équation du 3me degré en t peut être regardée comme résultante de l'élimination de z' et z'' entre ces trois équations du premier degré; savoir.

$$N. \quad \begin{cases} nac.z'+mnbc.z''=t-n^2c^2+nh, \\ mab.z'-(t-m^2b^2+mh)z''=-mnbc, \\ (t-a^2+h)z'-mab.z''=nac. \end{cases}$$

L'expression de z' peut être simplifiée à l'aide de l'équation (18.): car elle donne

$$z'=\frac{(t+mh)(t+nh)-m^2b^2(t+nh)-n^2c^2(t+mh)}{nac(t+mh)},$$

ou bien

$$z'=\frac{1}{nac(t+mh)}\cdot\frac{a^2(t+mh)(t+nh)}{t+h},$$

c'est-à-dire

$$z'=\frac{a}{nc}\cdot\frac{(t+nh)}{t+h}.$$

Ainsi dans les équations ($N.$) on pourra faire

$$26. \quad z'=\frac{a}{nc}\left(\frac{t+nh}{t+h}\right),$$

$$27. \quad z''=\frac{mb}{nc}\left(\frac{t+nh}{t+mh}\right).$$

et lorsqu'on prendra $t=\frac{h}{\nu}$, on aura

$$28. \quad z'=\frac{a}{nc}\left(\frac{1+n\nu}{1+\nu}\right),$$

$$29. \quad z''=\frac{mb}{nc}\left(\frac{1+n\nu}{1+m\nu}\right).$$

En rapprochant ces équations de celles désignées par ($\varkappa$.) dans le No. (3.), on voit que

$$z'=\frac{e}{g}, \qquad z''=\frac{f}{g};$$

ce qui revient à dire que l'équation (12.) du plan tangent donne

$$30. \quad z + xz' + yz'' = 0$$

ou bien

$$31. \quad ex + fy + gz = 0.$$

De cette manière on peut donner une interprétation géométrique aux différens termes qui composent les trois équations (N.).

Telles sont les principales propriétés et variétés de forme que présente l'étude de l'équation (10.). Sans les avoir ainsi rapprochées il n'est pas facile de reconnaître d'abord la possibilité de réduire une de ces transformées à la forme plus simple de l'équation (10.). *Legendre* avait dit (et Mr. *De Pontécoulant* a répété d'après lui, voyez p. 354 du second volume de sa Théorie analytique du systême du monde) que cette équation n'a qu'une seule racine réelle (voyez p. 542 du tome 1er de son Traité des fonctions elliptiques); mais la réalité de ses trois racines est maintenant hors de doute.

6. Dans le cas particulier des ellipsoïdes de révolution on a $m = n$, ce qui abaisse l'équation (10.) au second degré. En la résolvant par rapport à ν on en tire

$$\nu = \frac{a^2+b^2+c^2}{2k} - \left(\frac{1+m}{2m}\right) + \sqrt{\left\{\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{2k} - \left(\frac{1+m}{2m}\right)\right]^2 + \frac{a^2+m(b^2+c^2)-k}{mk}\right\}};$$

ou bien, en réduisant la quantité soumise au radical:

$$\nu = \frac{a^2+b^2+c^2}{2k} - \left(\frac{1+m}{2k}\right) + \frac{1}{2k}\sqrt{\left\{\left[a^2+b^2+c^2+k\left(\frac{m-1}{m}\right)\right]^2 - 4ka^2\left(\frac{m-1}{m}\right)\right\}}.$$

Donc en observant, que

$$a_1^2 + \varpi = A_1^2 = a_1^2\,(1+\nu) = k(1+\nu),$$
$$b_1^2 + \varpi = B_1^2 = a_1^2\left(\frac{1+m\nu}{m}\right) = k\left(\frac{1+m\nu}{m}\right)$$

on aura les équations

$$2A_1^2 = a^2+b^2+c^2+k\left(\frac{m-1}{m}\right) + \sqrt{\left\{\left[a^2+b^2+c^2+k\left(\frac{m-1}{m}\right)\right]^2 - 4a^2k\left(\frac{m-1}{m}\right)\right\}};$$
$$2B_1^2 = a^2+b^2+c^2-k\left(\frac{m-1}{m}\right) + \sqrt{\left\{\left[a^2+b^2+c^2+k\left(\frac{m-1}{m}\right)\right]^2 - 4a^2k\left(\frac{m-1}{m}\right)\right\}},$$

pour déterminer les axes de l'ellipsoïde de révolution qui passe par le point attiré.

En appliquant ces formules, il ne faut pas perdre de vue, que $2a_1$ représente l'axe de révolution de l'ellipsoïde donné: de sorte qu'il sera alongé ou aplati suivant qu'on aura $m > 1$ ou $m < 1$.

Ces mêmes formules sont applicables au cas où le point attiré est placé dans le plan d'une des trois sections principales de l'ellipsoïde dont les trois axes sont inégaux. Car, en posant $c=0$, l'équation (10.) devient

$$\frac{a^2}{1+\nu}+\frac{mb^2}{1+m\nu}=k.$$

Ainsi cette équation diffère de celle de l'ellipsoïde de révolution, où l'on a

$$\frac{a^2}{1+\nu}+\frac{mb^2}{1+m\nu}+\frac{mc^2}{1+m\nu}=k$$

en cela, qu'ici on a b^2+c^2 au lieu de b^2. Il suffit par conséquent de remplacer b^2+c^2 par b^2 dans les expressions précédentes de $2A_1^2$, $2B_1^2$ pour les adapter à ce dernier cas; ce qui donnera

$$2A_1^2=(a^2+b^2)+(a_1^2-b_1^2)+\sqrt{[(a^2-b^2+b_1^2-a_1^2)^2+4a^2b^2]};$$
$$2B_1^2=(a^2+b^2)-(a_1^2-b_1^2)+\sqrt{[(a^2-b^2+b_1^2-a_1^2)^2+4a^2b^2]}.$$

§. 2.

Réduction à la forme la plus simple de l'équation d'une surface conique circonscrite à l'ellipsoide donné.

7. L'équation (9.) de la surface de l'ellipsoïde, donne

$$\frac{dz}{dx}=p=-\frac{(a-x)}{n(c-z)};\qquad \frac{dz}{dy}=q=-\frac{m(b-y)}{n(c-z)}.$$

Si l'on imagine une surface conique circonscrite dont le sommet soit au point attiré, elle aura le plan tangent commun avec l'ellipsoïde sur tous les points de la courbe de contact. Or, nous avons

$$z'-z=p(x'-x)+q(y'-y)$$

pour l'équation du plan tangent à l'ellipsoïde. Mais ce plan doit passer par le sommet du cône placé à l'origine des coordonnées; donc, son équation sera satisfaite en y faisant $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$; ce qui donne $z=px+qy$; ou bien en y substituant les valeurs précédentes de p et q:

$$nz(c-z)+x(a-x)+my(b-y)=0.$$

Comme

$$x=a-(a-x),\quad y=b-(b-y),\quad z=c-(c-z);$$

on peut écrire

$$nc(c-z)+a(a-x)+mb(b-y)-(a-x)^2-m(b-y)^2-n(c-z)^2=0;$$

d'où l'on tire en vertu de l'équation (9.):

$$nc(c-z)+a(a-x)+mb(b-y)-k=0;$$

de sorte qu'on a

$$32.\quad ax+mby+ncz=a^2+mb^2+nc^2-k=h.$$

Cette équation appartient à tous les points de la courbe de contact de la surface conique avec la surface de l'ellipsoïde; et comme elle est du premier degré on en conclut que cette courbe est plane.

L'équation (9.) étant combinée avec l'équation (32.) devient

$$h-2h+z^2\left(\frac{x^2}{z^2}+m\frac{y^2}{z^2}+n\right)=0,$$

ou bien

$$z^2\left(\frac{x^2}{z^2}+m\frac{y^2}{z^2}+n\right)=h.$$

En substituant ici pour z sa valeur

$$z=\frac{h}{a\frac{x}{z}+mb\frac{y}{z}+nc}$$

fournie par l'équation (32.), on aura

$$h\left(\frac{x^2}{z^2}+m\frac{y^2}{z^2}+n\right)=\left(a\frac{x}{z}+mb\frac{y}{z}+nc\right)^2.$$

Cette équation exprime, que le rapport $\frac{x}{z}$ étant constant, celui de $\frac{y}{z}$ doit l'être aussi: donc elle subsiste pour tous les points d'une droite quelconque tirée de l'origine à un point de la courbe de contact, c'est-à-dire pour tous les points et toutes les positions de la génératrice du cône: partant

$$33.\quad (ax+mby+ncz)^2-h(x^2+my^2+nz^2)=0$$

sera l'équation de la surface conique circonscrite à l'ellipsoïde. En développant le cône, on aura

$$34.\quad \left\{\begin{matrix}(a^2-h)x^2+(mb^2-h)my^2+(nc^2-h)nz^2\\ +2mab.xy+2nac.xz+2mnbc.yz\end{matrix}\right\}=0.$$

8. Pour réduire l'équation de cette surface conique à une autre privée des trois rectangles, il faudra conserver la même origine des coordonnées et changer la direction des axes, sans qu'ils cessent cependant de demeurer rectangulaires. Mais, avant d'exposer les formules générales de cette réduction, remarquons que, si le point attiré étoit situé dans le plan d'une des trois sections principales de l'ellipsoïde, on pourrait faire $c=0$; ce qui fait immédiatement disparaître deux des trois rectangles. De sorte qu'on a une équation de la forme

$$Ax^2+By^2+2Cxy+D=0.$$

Or en faisant ici

$$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi;\quad y=x'\sin\varphi+x'\cos\varphi$$

et déterminant l'angle φ par l'équation

$$\text{tang}\,2\varphi = \frac{2C}{A-B},$$

on changera l'équation précédente dans celle-ci:

$$0 = D + (A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi + C\sin 2\varphi)x'^2 + (A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi - C\sin 2\varphi)y'^2.$$

Cela posé, si l'on élimine les lignes trigonométriques, il viendra

$$0 = 2D + \left[2A + 2B + \frac{(A^2 + B^2 + 4C)}{\sqrt{[(A-B)^2 + 4C^2]}}\right]x'^2$$
$$+ \left[2A + 2B - \frac{(A^2 + B^2 + 4C)}{\sqrt{[(A-B)^2 + 4C^2)}}\right]y'^2$$

En remplaçant A, B, C par leurs valeurs, l'expression précédente de $\text{tang}\,2\varphi$ donne

$$\text{tang}\,2\varphi = \frac{2mab}{a^2 - h - m^2b^2 + mh}:$$

mais $h = a^2 + mb^2 - a_1^2$; partant

$$\varkappa'. \quad \text{tang}\,2\varphi = \frac{2ab}{(a^2 - b^2) - (a_1^2 - b_1^2)}$$

Cette formule nous fait voir, que l'angle 2φ aura la même valeur à l'égard de tous les ellipsoïdes concentriques dont les excentricités respectives sont égales.

Pour avoir l'expression de $\text{tang}\,\varphi$, on observera que

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\sqrt{(1 + \text{tang}^2 2\varphi) - 1}}{\text{tang}\,2\varphi};$$

d'où l'on tire

$$\varkappa''. \quad 2ab\,\text{tang}\,\varphi = \sqrt{[(a^2 - b^2 + b_1^2 - a_1^2)^2 + 4a^2b^2]} - (a^2 - b^2 + b_1^2 - a_1^2).$$

Maintenant, nous allons faire voir, que dans ce cas on peut simplifier davantage l'équation de la surface conique circonscrite à l'ellipsoïde.

Soit ψ l'angle formé avec l'axe des z par une des arêtes du cône: la projection de cette arête sur le plan des xy étant exprimée par $r\sin\psi$, on peut faire

$$x' = r\sin\psi.\cos\theta; \quad y' = r\sin\psi.\sin\theta; \quad z = z' = r\cos\psi.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente du cône en x', y', φ, et observant que $D = -hnz^2$, il viendra après avoir divisé par r^2:

$$0 = -hn\cos^2\psi + \tfrac{1}{2}\sin^2\psi\,[A + B + (A-B)\cos 2\varphi + 2C\sin 2\varphi]$$
$$- \sin^2\psi\sin^2\theta\,[(A-B)\cos 2\varphi + 2C\sin 2\varphi].$$

Mais l'expression de $\text{tang}\,2\varphi$ donne

$$(A-B)\cos 2\varphi + 2C\sin 2\varphi = \frac{2C}{\sin 2\varphi};$$

partant on a

$$\varkappa'''.\quad 0 = -hn\cos^2\psi + \tfrac{1}{2}(A+B)\sin^2\psi + \frac{C\sin^2\psi}{\sin 2\varphi} - \frac{2C\sin^2\psi\sin^2\theta}{\sin 2\varphi}$$

Maintenant, si l'on fait pour plus de simplicité

$$\sin^2\pi = \tfrac{1}{2} + \frac{(A+B)}{4C}\sin 2\Phi - \frac{hn\cot^2\psi\sin 2\varphi}{2C},$$

l'équation ($\varkappa'''.$) pourra être écrite ainsi:

$$\varkappa^{\text{IV}}.\quad 0 = \frac{2C\sin^2\psi}{\sin 2\varphi}[\sin^2\pi - \sin^2\theta]:$$

de sorte qu'on a $\theta = \pm\pi$. Je ne supprime pas le facteur commun, afin qu'on puisse toujours regarder le second membre de cette équation comme une transformation de $Ax^2 + By^2 + 2Cxy + D$. D'après l'équation ($\varkappa'''.$) il est visible, que les limites de l'angle ψ sont celles qui donnent

$$0 = -hn\cos^2\psi + \tfrac{1}{2}(A+B)\sin^2\psi + \frac{C\sin^2\psi}{\sin 2\varphi},$$

puisqu'elle est impossible pour toute valeur de ψ qui rendrait négatif le second membre de cette équation, et qu'elle devient possible dès que ce second membre acquiert une valeur positive. Donc en appelant ψ' et $180^0 - \psi'$ les limites de l'angle ψ, l'équation que nous venons d'établir donnera

$$2hn\cot^2\psi' = A + B + \frac{2C}{\sin 2\varphi} = A + B + \frac{2C\sqrt{(1+\tang^2 2\varphi)}}{\tang 2\varphi},$$

ou bien

$$2hn\cot^2\psi' = A + B + \sqrt{[(A-B)^2 + 4C^2]}.$$

Or nous avons

$$2C\tang\Phi = \sqrt{[(A-B)^2 + 4C^2]} - (A-B);$$

donc l'équation précédente revient à dire, que

$$\varkappa^{\text{V}}.\quad hn\cot^2\psi' = A + C\tang\Phi,$$

ou bien que

$$h\frac{n}{m}\cot^2\psi' = b_1^2 - b^2 + ab\tang\Phi.$$

Cette équation donne

$$c_1^2\tang^2\psi' = \frac{hb_1^2}{b_1^2 - b^2 + ab\tang\varphi},$$

et en substituant pour h sa valeur

$$c_1^2\tang^2\psi' = \frac{b_1^2(a^2 - a_1^2) + a_1^2 b^2}{b_1^2 - b^2 + ab\tang\varphi},$$

ou bien

$$c_1^2\tang^2\psi' = \frac{(b_1^2 - b^2)(a^2 - a_1^2) + a^2 b^2}{b_1^2 - b^2 + ab\tang\varphi}.$$

D'ici on tire

$$c_1^2 \tang^2\psi' = a^2 - a_1^2 + \frac{ab[ab-(a^2-a_1^2)\tang\varphi]}{b_1^2-b^2+ab\tang\varphi}.$$

L'équation ($\varkappa'.$) donne

$$\frac{\tang\varphi}{1-\tang^2\varphi} = \frac{ab}{(a^2-b^2)-(a_1^2-b_1^2)};$$

et par conséquent

$$ab = ab\tang^2\Phi + (b_1^2-b^2)\tang\Phi + (a^2-a_1^2)\tang\Phi;$$

d'où l'on tire

$$ab-(a^2-a_1^2)\tang\Phi = \tang\Phi\,[(b_1^2-b^2)+ab\tang\Phi].$$

En substituant cette valeur dans l'expression précédente de $c_1^2\tang^2\psi'$, on aura

$$\varkappa^{\text{VI}}.\quad c_1^2\tang^2\psi' = a^2 - a_1^2 + ab\tang\Phi.$$

Il suit de là et de l'équation ($\varkappa''.$), que

$$\varkappa^{\text{VII}}.\quad 2c_1^2\tang^2\psi' + 2a_1^2 = a^2+b^2+a_1^2-b_1^2+\sqrt{[a^2-b^2+b_1^2-a_1^2)^2+4a^2b^2]}.$$

En rapprochant ce résultat de la valeur de $2A_1^2$ posée à la fin du §. précédent on aura cette équation fort simple; savoir

$$\varkappa^{\text{VIII}}.\quad a^2 + c_1^2\tang^2\psi' = A_1^2.$$

Pour simplifier l'expression de $\sin^2\pi$ je remarque, que

$$1 = 2\sin^2\Phi + \cos 2\Phi = 2\sin^2\Phi + \cot 2\Phi\sin 2\Phi.$$

Mais on a trouvé plus haut, que

$$\cot 2\Phi = \frac{A-B}{2C}:$$

donc en remplaçant $\frac{1}{2}$ par $\sin^2\Phi + \frac{(A-B)}{4C}\sin 2\Phi$, on aura

$$\sin^2\pi = \sin^2\Phi + \frac{A}{2C}\sin 2\Phi - \frac{hn\cot^2\psi\sin 2\varphi}{2C},$$

ou bien

$$\varkappa^{\text{IX}}.\quad \sin^2\pi = \sin^2\Phi + \left(\frac{b_1^2-b^2}{2ab}\right)\sin 2\Phi - \frac{hn\cot^2\psi\sin 2\varphi}{2mab}.$$

De là nous concluons, que dans ce cas particulier, l'équation de la surface conique circonscrite est représentée par ces trois équations:

$$\varkappa^{\text{X}}.\quad \begin{cases} \dfrac{mab}{\sin\varphi}\dfrac{\sin^2\psi}{\cos\varphi}(\sin^2\pi - \sin^2\theta) = 0, \\ \sin^2\pi = \sin^2\Phi + \left(\dfrac{b_1^2-b^2}{2ab}\right)\sin 2\Phi - \dfrac{hn\cot^2\psi\sin\varphi\cos\varphi}{mab}, \\ a^2 + c_1^2\tang^2\psi' = A_1^2. \end{cases}$$

La troisième donne les limites des angles ψ: la première pourrait être réduite à $\theta = \pi$; mais il est utile de la conserver sous cette forme, afin

de savoir que, par ce moyen on peut toujours établir l'équation

$$\varkappa^{\text{xi}}.\quad Ax^2+By^2+2Cxy+D = \frac{mab\sin^2\psi}{\sin\varphi\cos\varphi}(\sin^2\pi-\sin^2\theta).$$

9. Revenons au cas général exprimé par l'équation (34.). Soient x', y', z' les nouvelles coordonnées, on fera comme on sait

$$\lambda.\quad \begin{cases} x = x'\cos(x'x)+y'\cos(y'x)+z'\cos(z'x) = ex'+e'y'+e''z'; \\ y = x'\cos(x'y)+y'\cos(y'y)+z'\cos(z'y) = fx'+f'y'+f''z'; \\ z = x'\cos(x'z)+y'\cos(y'z)+z'\cos(z'z) = gx'+g'y'+g''z'; \end{cases}$$

sans cependant attribuer, dès ce moment, aux lettres e, f, g; e', f', g'; e'', f'', g'' la signification qu'elles avaient dans le No. 3. du paragraphe précédent.

En substituant ces valeurs dans le premier membre de l'équation (33.) et égalant à zéro les coefficients de $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$ on aura

$$35.\quad A'x'^2+B'y'^2+C'z'^2 = 0;$$

$$N'.\quad \begin{cases} A' = (ae+mbf+ncg)^2-h(e^2+mf^2+ng^2), \\ B' = (ae'+mbf'+ncg')^2-h(e'^2+mf'^2+ng'^2), \\ C' = (ae''+mbf''+ncg'')^2-h(e''^2+mf''^2+ng''^2); \end{cases}$$

$$N''.\quad \begin{cases} D' = (ae+mbf+ncg)(ae'+mbf'+ncg')-h(ee'+mff'+ngg') = 0, \\ E' = (ae+mbf+ncg)(ae''+mbf''+ncg'')-h(ee''+mff''+ngg'') = 0, \\ F' = (ae'+mbf'+ncg')(ae''+mbf''+ncg'')-h(e'e''+mf'f''+ng'g'') = 0. \end{cases}$$

Ces expressions sont assez compliquées; mais on peut les simplifier à l'aide des équations qui ont lieu entre les neuf coefficients e, f, g etc. D'après la théorie de la transformation des coordonnées, on sait que ces équations sont les suivantes:

$$\text{I.}\quad \begin{Bmatrix} e^2+f^2+g^2 = 1 \\ e'^2+f'^2+g'^2 = 1 \\ e''^2+f''^2+g''^2 = 1 \end{Bmatrix};\qquad \text{II.}\quad \begin{Bmatrix} ee'+ff'+gg' = 0 \\ ee''+ff''+gg'' = 0 \\ e'e''+f'f''+g'g'' = 0 \end{Bmatrix};$$

$$\text{III.}\quad \begin{Bmatrix} e^2+e'^2+e''^2 = 1 \\ f^2+f'^2+f''^2 = 1 \\ g^2+g'^2+g''^2 = 1 \end{Bmatrix};\qquad \text{IV.}\quad \begin{Bmatrix} ef+e'f'+e''f'' = 0 \\ eg+e'g'+e''g'' = 0 \\ fg+f'g'+f''g'' = 0 \end{Bmatrix};$$

$$\text{V.}\quad \left\{\begin{array}{l|l|l} e = f'g''-f''g' & f = g'e''-g''e' & g = e'f''-e''f' \\ e' = f''g-fg'' & f' = g''e-ge'' & g' = e''f-ef'' \\ e'' = fg'-f'g & f'' = ge'-g'e & g'' = ef'-e'f \end{array}\right\}.$$

Les trois équations (N''.) et les six équations (I.) et (II.) sont celles qui déterminent directement les neuf coefficients e, f, g etc.: les autres grou-

pes d'équations (III.), (IV.) et (V.) sont en quelque sorte l'expression d'autant de propriétés distinctes auxquelles les mêmes coefficients doivent toujours satisfaire.

Le rapprochement des équations (N''.) et (V.) fait entrevoir immédiatement la possibilité d'en tirer une équation avec les seuls coefficients e, f, g. En effet, si l'on forme l'équation

$$D'e''-E'e' = 0,$$

on obtient

$$0 = (ae+mbf+ncg)[mb(f'e''-e'f'')+nc(g'e''-e'g'')] \\ -mhf(e''f'-e'f'')-nhg(g'e''-e'g''):$$

donc en vertu des équations (V.) cette équation est équivalente à celle-ci:

$$0 = (ae+mbf+ncg)(ncf-mbg)-(n-m)hfg.$$

En formant les équations

$$D'f''-E'f' = 0, \quad D'g''-E'g' = 0$$

on trouvera de la même manière deux autres équations semblables à la précédente. Il suit de là, que la combinaison des équations (N''.) et (V.) donne

$$N'''. \left\{ \begin{array}{l} 0 = (ae+mbf+ncg)(ncf-mbg)-(n-m)hfg, \\ 0 = (ae+mbf+ncg)(ag-nce)-(1-n)heg, \\ 0 = (ae+mbf+ncg)(mbe-af)-(m-1)hef: \end{array} \right.$$

et il est clair qu'on aura un groupe de trois équations semblables, soit entre e', f', g' soit entre e'', f'', g''; où les coefficients qui affectent ces quantités seront les mêmes.

Cela posé il est manifeste, que les trois équations (N'''.) sont identiquement satisfaites en y substituant pour e, f, g leurs valeurs données par les équations ($\varkappa$.) trouvées dans le No. 3. du §. précédent. Car, la substitution de ces valeurs donne (après avoir supprimé le facteur commun) l'équation (17.). Ainsi il est par là démontré, que les formules ($\varkappa$.) ont la propriété de faire disparaître les trois rectangles qu'on voit dans l'équation (34.), à l'aide de la transformation des coordonnées.

L'application de ce même artifice à d'autres cas est évidente: elle a déjà été faite par Mr. *Poisson* à la détermination des *axes principaux* de rotation des corps solides (voyez Tome XIV. des Mémoires de l'Académie de Paris p. 317.).

En substituant les mêmes valeurs de e, f, g dans l'expression précédente de A' et observant que l'équation (17.) donne

$$\frac{h^2}{\nu^2} = \left(\frac{a^2}{1+\nu} + \frac{m^2 b^2}{1+m\nu} + \frac{n^2 c^2}{1+n\nu}\right)^2,$$

on trouvera d'abord

$$A = \frac{[(1+\nu)(1+m\nu)(1+n\nu)]^2}{Q^2}\left[\frac{h^2}{\nu^2} - h\left(\frac{a^2}{(1+\nu)^2} + \frac{m^2 b^2}{(1+m\nu)^2} + \frac{n^2 c^2}{(1+n\nu)^2}\right)\right],$$

ou bien

$$A' = \frac{h}{\nu}\cdot\frac{[(1+\nu)(1+m\nu)(1+n\nu)]^2}{Q^2}\left[\frac{h}{\nu} - \frac{a^2\nu}{1+\nu} - \frac{m^2 b^2 . m\nu}{(1+m\nu)^2} - \frac{n^2 c^2 . n\nu}{(1+n\nu)^2}\right].$$

Donc en remplaçant dans le second facteur, $\frac{h}{\nu}$ par sa valeur fournie par le second membre de l'équation (17.), il viendra

$$A' = \frac{h}{\nu}\cdot\frac{[(1+\nu)(1+m\nu)(1+n\nu)]^2}{Q^2}\left[\frac{a^2}{(1+\nu)^2} + \frac{m^2 b^2}{(1+m\nu)^2} + \frac{n^2 c^2}{(1+n\nu)^2}\right].$$

En reduisant au même dénominateur le second facteur et remplaçant Q^2 par sa valeur donnée par l'équation (14.), on obtient

$$A' = \frac{h}{\nu} = t.$$

On trouverait de même $B' + t$, $C' = t$: donc les valeurs de A', B', C' se confondront avec les trois racines de l'équation (18.) dont on a démontré les propriétés dans le paragraphe précédent.

10. Il résulte de cette analyse, que pour former l'équation

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 = 0$$

de la surface conique circonscrite à l'ellipsoïde, il faudra prendre pour A la racine positive de l'équation en t, et pour B', C' les deux autres racines négatives de la même équation. Alors, l'axe du cône se confondra avec l'axe des x' et avec la normale à l'ellipsoïde qui passe par le point attiré. Les axes des y' et z' so confondront, comme nous l'avons déjà démontré, avec les normales aux deux hyperboloïdes qui passent par le même point attiré.

Les réciproques des trois équations (λ.) étant

$$\lambda'. \quad x' = ex + fy + gz, \quad y' = e'x + f'y + g'z, \quad z' = e''x + f''y + g''z,$$

on en conclut qu'en nommant $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ les coordonnées du centre de l'ellipsoïde donné relativement aux axes de la surface conique qui lui est circonscrite, on a

$$\lambda''. \quad \bar{a} = ea + fb + gc, \quad \bar{b} = e'a + f'b + g'c, \quad \bar{c} = e''a + f''b + g''c.$$

En substituant pour e, f, g leurs valeurs données par les équations ($\varkappa$.), et

ayant égard à l'équation (10.), on aura

$$35.\quad \bar{a} = \frac{k(1+\nu)(1+m\nu)(1+n\nu)}{Q}.$$

Ainsi, cette formule donnera les valeurs de $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ au moyen des trois valeurs réelles de ν, qui sont fournies par l'équation (10.).

Il suit de là et des formules ($\varkappa$.), qu'on peut écrire

$$\bar{a} = \frac{k}{a}(1+\nu)e:$$

mais $k(1+\nu) = A_1^2$; partant

$$\bar{a} = \frac{eA_1^2}{a}.$$

L'équation (35.) donne de la même manière

$$\bar{a} = \frac{fB_1^2}{b}, \qquad \bar{a} = \frac{gC_1^2}{c}.$$

Donc les équations ($\varkappa$.) sont équivalentes à celles-ci:

$$[\varkappa'.]\quad e = \frac{a.\bar{a}}{A_1^2},\quad f = \frac{b.\bar{a}}{B_1^2},\quad g = \frac{c.\bar{a}}{C_1^2}.$$

Il est clair que, d'après ces formules on a

$$e' = \frac{a.\bar{b}}{A_1'^2},\quad f' = \frac{b.\bar{b}}{B_1'^2},\quad g' = \frac{c.\bar{b}}{C_1'^2};$$

$$e'' = \frac{a.\bar{c}}{A_1''^2},\quad f'' = \frac{b.\bar{c}}{B_1''^2},\quad g'' = \frac{c.\bar{c}}{C_1''^2};$$

où $A_1'^2$, $B_1'^2$, $C_1'^2$, $A_1''^2$, $B_1''^2$, $C_1''^2$ sont les carrés des demi-axes des deux hyperboloïdes qui passent par le point attiré. Il suit de là et de l'équation $e^2+f^2+g^2=1$; que

$$36.\quad \frac{1}{\bar{a}^2} = \frac{a^2}{A_1^4} + \frac{b^2}{B_1^4} + \frac{c^2}{C_1^4}.$$

En égalant les deux valeurs de e données par les formules ($\varkappa$.) et [$\varkappa'$.], il viendra

$$Q\bar{a} = A_1^2(1+m\nu)(1+n\nu):$$

mais

$$1+m\nu = \frac{B_1^2}{b_1^2},\qquad 1+n\nu = \frac{C_1^2}{c_1^2};$$

partant,

$$37.\quad Q = \frac{1}{\bar{a}}\cdot\frac{(A_1B_1C_1)^2}{(b_1c_1)^2}.$$

On voit par là, que l'emploi des coordonnées $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sert à simplifier les expressions primitives et à leurs donner un caractère plus géométrique.

11. L'équation du cône circonscrit à ellipsoïde étant écrite ainsi:

$$\frac{y'^2}{\left(x'\sqrt{\frac{A'}{-B'}}\right)^2}+\frac{z'^2}{\left(x'\sqrt{\frac{A'}{-C'}}\right)^2}=1,$$

on voit aussitôt qu'il peut être regardé comme un cône droit dont la base est une ellipse. Le plan de cette ellipse étant parallèle à celui des $y'z'$ a pour équation

$$x'=ex+fy+gz$$

où x' est censée une quantité constante. Si on veut prendre pour x' la longueur de l'axe du cône depuis l'origine des coordonnées (qui est en même tems le sommet du cône) jusqu'au point où elle rencontre le plan de la courbe de contact déterminé par l'équation (32.), on observera que, les coordonnées de ce point étant

$$x=ex',\quad y=fx',\quad z=gx',$$

l'équation (32.) donne

$$x'(ae+mbf+ncg)=h:$$

de sorte qu'on a

$$38.\quad ex+fy+gz=\frac{h}{ae+mbf+ncg}$$

pour l'équation de la base droite du cône, tandis que l'équation (32.) est celle de la base oblique du même cône. En nommant I l'angle formé par ces deux plans, nous avons

$$39.\quad \cos I=\frac{ae+mbf+ncg}{\sqrt{(a^2+m^2b^2+n^2c^2)}}.$$

Le cône dont il est ici question peut toujours être coupé par un plan perpendiculaire à celui des $x'y'$, ou par un plan perpendiculaire à celui des $x'z'$, de manière que la courbe d'intersection soit un cercle. En effet; soit pour plus de simplicité

$$N=\sqrt{\frac{A'}{-B'}},\quad M=\sqrt{\frac{A'}{-C'}},$$

l'équation de la surface conique deviendra

$$N^2M^2x'^2=M^2y'^2+N^2z'^2;$$

et l'équation du plan coupant perpendiculaire au plan des $x'y'$ dont la trace fait un angle β avec l'axe des x' sera

$$x'=(\Delta-y')\tang\beta,$$

en désignant par Δ la distance de l'origine au point où cette base rencontre l'axe de y'. Maintenant pour rapporter la courbe d'intersection

à des coordonnées rectangulaires placées dans son propre plan, il suffit de faire $x' = u \sin\beta$; ce qui donne

$$y' = \Delta - u\cos\beta.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation du cône la transforme en celle-ci:

$$M^2 N^2 . u^2 \sin^2\beta = N^2 z'^2 + M^2 (\Delta - u\cos\beta)^2.$$

De sorte qu'on a (en écrivant Z' au lieu de z')

$$N^2 Z'^2 + M^2 u^2 (\cos^2\beta - N^2 \sin^2\beta) - 2u . \Delta M^2 \cos\beta + \Delta^2 M^2 = 0.$$

Actuellement, si l'on fait

$$u = Y' + \frac{\Delta\cos\beta}{\cos^2\beta - N^2\sin^2\beta},$$

cette équation devient

$$N^2 Z'^2 + Y'^2 M^2 (\cos^2\beta - N^2\sin^2\beta) = \frac{(MN\Delta\sin\beta)^2}{\cos^2\beta - N^2\sin^2\beta}.$$

Donc en déterminant l'angle β de manière qu'on ait

$$N^2 = M^2(\cos^2\beta - N^2\sin^2\beta),$$

ce qui revient à faire

$$\sin\beta = \sqrt{\left(\frac{M^2 N^2}{M^2 + N^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{B^2 - C^2}{B^2 + C^2}\right)},$$

$$Y'^2 + Z'^2 = \frac{\Delta^2 A' B'}{C'^2}\left(\frac{B' - C'}{B' + C'}\right),$$

la courbe d'intersection sera un cercle, pourvu que les nombres négatifs B' et C' soient tels que $-B' > -C'$. Si on avait $-B' < -C'$, il faudroit prendre le plan coupant perpendiculaire à celui des $x'z'$: c'est-à-dire, faire

$$x' = u\sin\beta, \qquad x' = (\Delta - z')\operatorname{tang}\beta.$$

Alors on trouve de la même manière

$$\sin\beta = \sqrt{\left(\frac{N^2 - M^2}{N^2 + M^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{C' - B'}{C' + B'}\right)},$$

$$X'^2 + Y'^2 = -\frac{\Delta^2 A' C'}{B'^2}\left(\frac{C' - B'}{C' + B'}\right).$$

Il serait superflu d'entrer dans de plus grands détails sur les propriétés du cône circonscrit à l'ellipsoïde.

§. 3.

Formules pour déterminer l'attraction d'une couche elliptique infiniment mince, terminée par deux surfaces semblables, sur un point extérieur à la couche.

12. S'il était question de resoudre ce problème par les formules déjà connues, il suffirait de considérer l'attraction de la couche, comme

la différentielle de l'attraction d'un ellipsoide, prise en faisant varier le seul paramètre qui distingue deux ellipsoides terminés par des surfaces semblables. Or, en nommant X, Y, Z les trois composantes rectangulaires de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur, on a, conformément à nos dénominations précédentes

$$L.\quad \begin{cases} X = \dfrac{4\pi a \,.\, a_1 b_1 c_1}{A_1} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^2\, dx}{\sqrt{\{[A_1^2 + (b_1^2 - a_1^2)x^2][A_1^2 + (c_1^2 - a_1^2)x^2]\}}}; \\ Y = \dfrac{4\pi b \,.\, a_1 b_1 c_1}{B_1} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{y^2\, dy}{\sqrt{\{[B_1^2 + (a_1^2 - b_1^2)y^2][B_1^2 + (c_1^2 - b_1^2)y^2]\}}}; \\ Z = \dfrac{4\pi c \,.\, a_1 b_1 c_1}{C_1} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{z^2\, dz}{\sqrt{\{[C_1^2 + (a_1^2 - c_1^2)z^2][C_1^2 + (b_1^2 - c_1^2)z^2]\}}}; \end{cases}$$

ainsi que cela est démontré, avec toute l'élégance possible, dans le Tome 1er des Fonctions elliptiques de *Legendre* (Voyez p. 554). On pourrait laisser la même lettre x dans ces trois intégrales; mais on va voir que, pour l'objet actuel, il convient de regarder comme différente la variable sur laquelle porte l'intégration.

Pour appliquer ces trois formules aux ellipsoïdes *semblables,* nous y ferons $m = \frac{a_1^2}{b_1^2}$, $n = \frac{a_1^2}{c_1^2}$:

$$A_1^2 = a_1^2(1+\nu); \quad B_1^2 = b_1^2(1+m\nu); \quad C_1^2 = c_1^2(1+n\nu);$$

et nous traiterons m et n comme deux paramètres qui demeurent constans. Alors on a

$$L'.\quad \begin{cases} X = \dfrac{4\pi a}{\sqrt{(1+\nu)}} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^2\, dx}{\sqrt{\{[m(1+\nu)+(1-m)x^2][n(1+\nu)+(1-n)x^2]\}}}, \\ Y = \dfrac{4\pi m b}{\sqrt{(1+m\nu)}} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{y^2\, dy}{\sqrt{\{[1+m\nu+(m-1)y^2][n(1+m\nu)+(m-n)y^2]\}}}, \\ Z = \dfrac{4\pi n c}{\sqrt{(1+n\nu)}} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{z^2\, dz}{\sqrt{\{[1+n\nu+(n-1)z^2][m(1+n\nu)-(m-n)z^2]\}}}; \end{cases}$$

où le paramètre ν est censé être la racine positive de l'équation

$$\frac{a^2}{1+\nu} + \frac{m b^2}{1+m\nu} + \frac{n c^2}{1+n\nu} = a_1^2 = k.$$

Cela posé, il est clair que

$$X_1 = \frac{dX}{d\nu}d\nu, \quad Y_1 = \frac{dY}{d\nu}d\nu, \quad Z_1 = \frac{dZ}{d\nu}d\nu,$$

seront les composantes rectangulaires de l'attraction de la couche elliptique infiniment mince, terminée par des surfaces semblables, puisque en changeant a_1 en $a_1 + da_1$ et ν en $\nu + d\nu$ on passe d'un ellipsoïde à un

autre semblable infiniment peu différent. Au premier coup d'oeil, on croiroit qu'on ne peut délivrer du signe intégral les composantes de l'attraction de la couche: mais en faisant

$$x^2 = \frac{1+\nu}{1+u}, \quad y^2 = \frac{1+m\nu}{1+mu}, \quad z^2 = \frac{1+n\nu}{1+nu},$$

la nouvelle variable sera u, et ses limites correspondantes à celles de x, y, z seront

$$u = \infty, \quad u = \nu.$$

En outre (et ceci est un fait remarquable) le paramètre ν disparaîtra des trois différentielles précédentes, et subsistera seulement comme une des limites des trois intégrales. De sorte qu'on obtient

$$H. \quad \begin{cases} X = -2\pi a \int_\infty^\nu \frac{(1+u)^{-\frac{3}{2}}\,du}{\sqrt{[(1+mu)(1+nu)]}}, \\ Y = -2\pi mb \int_\infty^\nu \frac{(1+mu)^{-\frac{3}{2}}\,du}{\sqrt{[(1+u)(1+nu)]}}, \\ Z = -2\pi nc \int_\infty^\nu \frac{(1+nu)^{-\frac{3}{2}}\,du}{\sqrt{[(1+u)(1+mu)]}}. \end{cases}$$

Or, en nommant $F_1(u)$, $F_2(u)$, $F_3(u)$ les intégrales indéfinies de ces trois différentielles, on aura

$$X = -2\pi a\;[F_1(\nu) - F_1(\infty)],$$
$$Y = -2\pi mb\,[F_2(\nu) - F_2(\infty)],$$
$$Z = -2\pi nc\,[F_3(\nu) - F_3(\infty)];$$

et par conséquent

$$H'. \quad \begin{cases} X_1 = -2\pi a \frac{d.F_1(\nu)}{d\nu}\,d\nu = -\frac{2\pi a(1+\nu)^{-\frac{3}{2}}\,d\nu}{\sqrt{[(1+m\nu)(1+n\nu)]}}, \\ Y_1 = -2\pi mb \frac{d.F_2(\nu)}{d\nu}\,d\nu = -\frac{2\pi mb(1+m\nu)^{-\frac{3}{2}}\,d\nu}{\sqrt{[(1+\nu)(1+n\nu)]}}, \\ Z_1 = -2\pi nc \frac{d.F_3(\nu)}{d\nu}\,d\nu = -\frac{2\pi nc(1+n\nu)^{-\frac{3}{2}}\,d\nu}{\sqrt{[(1+\nu)(1+m\nu)}}. \end{cases}$$

En faisant $T^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2$, et ayant égard à l'expression de Q^2 fournie par l'équation (14.), la résultante de ces trois forces sera donnée par l'équation

$$40. \quad T = \frac{-2\pi Q\,d\nu}{[(1+\nu)(1+m\nu)(1+n\nu)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Il suit de là que les équations (H'.) sont équivalentes à celles-ci:

$$H''. \quad \begin{cases} X_1 = T.\dfrac{a(1+m\nu)(1+n\nu)}{Q}, \\ Y_1 = T.\dfrac{mb(1+\nu)(1+n\nu)}{Q}, \\ Z_1 = T.\dfrac{nc(1+\nu)(1+m\nu)}{Q}. \end{cases}$$

D'après les équations ($\varkappa$.) trouvées dans le No. 3. on peut écrire

$$H'''. \quad X_1 = T.e, \quad Y_1 = T.f, \quad Z_1 = T.g.$$

Cela prouve que la force T est dirigée suivant l'axe du cône déterminé dans le §. précédent, ou (ce qui revient au même) suivant la normale à l'ellipsoïde qui passe par le point attiré.

13. En différentiant l'équation (10.) par rapport à k et à ν, on obtient

$$41. \quad dk = -d\nu\left[\frac{a^2}{(1+\nu)^2}+\frac{m^2b^2}{(1+m\nu)^2}+\frac{n^2c^2}{(1+n\nu)^2}\right]$$

ou bien

$$42. \quad dk = \frac{-Q^2\,d\nu}{[(1+\nu)(1+m\nu)(1+n\nu)]^2}.$$

Donc la formule (40.) est équivalente à celle-ci:

$$43. \quad T = \frac{2\pi\,dk.\sqrt{[(1+\nu)[1+m\nu)(1+n\nu)]}}{Q},$$

ou bien à celle-ci:

$$T = \frac{2\pi\,dk}{Q}.\frac{A_1B_1C_1}{a_1b_1c_1}.$$

Maintenant, si l'on remplace Q par sa valeur donnée par l'équation (37.), et dk par $2a_1\,da_1$, cette expression de T deviendra

$$44. \quad T = 4\pi\frac{da_1}{a_1}.\bar{a}\left(\frac{a_1b_1c_1}{A_1B_1C_1}\right).$$

Cette formule s'accorde avec celle trouvée par Mr. *Chasles* par des considérations fort différentes (voyez p. 911 du No. 26. des Comptez-Rendus. Séance du 25. Juin 1838.).

En ajoutant les trois équations (H.), on obtient immédiatement l'équation

$$\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}+\frac{Z}{c} = 2\pi\int_\nu^\infty\frac{du\left[\frac{1}{1+u}+\frac{m}{1+mu}+\frac{n}{1+nu}\right]}{\sqrt{[(1+u)(1+mu)(1+nu)]}}$$

$$= -4\pi\int_\nu^\infty d.[(1+u)(1+mu)(1+nu)]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4\pi}{\sqrt{[(+\nu)(1+m\nu)(1+n\nu)]}}.$$

Lorsque le point attiré est sur la surface même de l'ellipsoïde on a $\nu = 0$, et cette équation don

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} + \frac{Z}{c} = 4\pi.$$

On sait que cette équation subsiste, même en prenant pour a, b, c les coordonnées d'un point quelconque placé dans l'intérieur de la masse de l'ellipsoïde.

En différentiant les équations ($H.$), respectivement, par rapport à a, b, c on obtient:

$$\frac{dX}{da} = \frac{X}{a} - \frac{2\pi a}{(1+\nu)\sqrt{V}} \cdot \left(\frac{d\nu}{da}\right),$$
$$\frac{dY}{db} = \frac{Y}{b} - \frac{2\pi m b}{(1+m\nu)\sqrt{V}} \cdot \left(\frac{d\nu}{db}\right),$$
$$\frac{dZ}{dc} = \frac{Z}{c} - \frac{2\pi n b}{(1+n\nu)\sqrt{V}} \cdot \left(\frac{d\nu}{dc}\right);$$

où l'on a fait pour plus de simplicité

$$V = (1+\nu)(1+m\nu)(1+n\nu).$$

Maintenant, si l'on fait la somme de ces trois équations, en ayant égard à l'équation précédente, on aura

$$\frac{dX}{da} + \frac{dY}{db} + \frac{dZ}{dc} = \frac{4\pi}{\sqrt{V}} - \frac{2\pi}{\sqrt{V}} \left[\frac{a}{1+\nu}\left(\frac{d\nu}{da}\right) + \frac{mb}{1+m\nu}\left(\frac{d\nu}{db}\right) + \frac{nc}{1+n\nu}\left(\frac{d\nu}{dc}\right)\right].$$

Après avoir remplacé $\left(\frac{d\nu}{da}\right)$, $\left(\frac{d\nu}{db}\right)$, $\left(\frac{d\nu}{dc}\right)$ par leurs valeurs obtenues en différentiant l'équation (10.), on verra que le second membre de cette équation devient nul: de sorte qu'on a l'équation

$$\frac{dX}{da} + \frac{dY}{db} + \frac{dZ}{dc} = 0.$$

Ces trois équations sont connues: mais il est intéressant de voir avec quelle facilité elles dérivent des formules ($H.$).

Ces mêmes formules donnent aisément les composantes de l'attraction sur un point extérieur, exercée par une couche elliptique d'épaisseur finie, terminée par deux surfaces semblables. Car, en supposant que ν et ν' soient les limites relatives aux deux ellipsoïdes dont la couche est la différence, on a immédiatement

$$X = -2\pi a \int_{\infty}^{\nu'} \frac{(1+u)^{-\frac{3}{2}}\, du}{\sqrt{[(1+mu)(1+nu)]}} - 2\pi a \int_{\infty}^{\nu} \frac{(1+u)^{-\frac{3}{2}}\, du}{\sqrt{[(1+mu)(1+nu)]}},$$

ou bien

$$X = -2\pi a \int_{\nu}^{\nu'} \frac{(1+u)^{-\frac{3}{2}}\, du}{\sqrt{[(1+mu)(1+nu)]}}.$$

On pourrait continuer cette analyse et tirer de là toutes les propriétés de la force d'attraction émanée de la couche elliptique: mais il nous suffit d'avoir démontré, par l'analyse algébrique, que ces formules, délivrées du signe intégral, sont une conséquence immédiate des formules connues sur l'attraction de l'ellipsoïde. Cette vérité étant ainsi mise en évidence, on peut se proposer de la trouver directement, abstraction faite des formules relatives à l'attraction de l'ellipsoïde: c'est dans cette vue, que nous allons exposer l'analyse qui conduit *a priori* à la force d'attraction d'une couche elliptique, en nous appuyant sur les résultats établis dans les deux premiers paragraphes de ce Mémoire.

14. Toutefois, avant d'entrer dans cette recherche, je dois faire quelques observations sur les formules (H''.). C'est en lisant le Mémoire de Mr. *Poisson* sur ce sujet (publié dans le Tome XIII. des Mémoires de l'Académie de Paris) que j'ai eu l'idée de trouver de la manière fort simple que je viens de rapporter les trois formules (H''.). Alors (c'est-à-dire vers la fin de 1837) cette idée me paraissait nouvelle; mais, dans ce moment, je ne puis en réclamer la priorité, puisque je vois dans le No. 25. des Comptes-Rendus (Séance du 18. Juin 1838) qu'une semblable remarque a été faite par Mr. *Poisson* lui-même.

Cependant observons que, si l'on fait, pour un moment:

$$(1+u)a_1^2 = U^2, \quad (1+mu)\,b_1^2 = U'^2, \quad (1+nu)c_1^2 = U''^2;$$

on a, en différentiant ces équations de manière que les quantités m, n, a_1, b_1, c_1 soient traitée comme constantes:

$$a_1^2\,du = 2\,U\,dU = 2\,U'\,dU' = 2\,U''\,dU''.$$

Donc les formules (H.) sont équivalentes à celles-ci

$$X = -4\pi a \int_\infty^{A_1} a_1^3\,\overset{-3}{U}.\frac{U\,dU}{a_1^2}.\frac{b_1 c_1}{U' U''};$$

$$Y = -4\pi m b \int_\infty^{A_1} b_1^3\,\overset{-3}{U'}.\frac{U'\,dU'}{a_1^2}.\frac{a_1 c_1}{U U''};$$

$$Z = -4\pi n c \int_\infty^{A_1} c_1^3\,\overset{-3}{U''}.\frac{U''\,dU''}{a_1^2}.\frac{a_1 b_1}{U U'}.$$

Mais $m = \frac{a_1^2}{b_1^2}$, $n = \frac{a_1^2}{c_1^2}$; partant

$$H'''. \quad \begin{cases} X = -4\pi a . a_1 b_1 c_1 \int_{\infty}^{A_1} \frac{dU}{U^2 . U' U''}; \\ Y = -4\pi b . a_1 b_1 c_1 \int_{\infty}^{A_1} \frac{dU'}{U'^2 . U U''}; \\ Z = -4\pi c . a_1 b_1 c_1 \int_{\infty}^{A_1} \frac{dU''}{U''^2 . U U'}. \end{cases}$$

Or, ces expressions sont identiques à celles, que Mr. ***Rodrigues*** a publiées le premier dans le Tome 3. de la *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique* (voyez la dernière ligne de la page 371 et la première de la page suivante). Cela posé, il n'y avait qu'un pas à faire pour tirer de ces formules l'attraction d'une couche elliptique terminée par deux surfaces *semblables, délivrée du signe intégral.* Mais, ce pas n'a pas été fait par Mr. ***Rodrigues,*** et on doit à Mr. ***Poisson*** d'avoir saisi le premier cette élimination du signe intégral. De même, il n'y a qu'un pas à faire, pour tirer des formules (*H.*) le théorème de Mr. ***Jacobi*** sur l'équilibre permanent d'un ellipsoïde homogène fluide qui tourne autour d'un ses axes principaux, que je suppose être celui des a.

En effet; pour un point quelconque attiré, qui serait placé sur la surface même de l'ellipsoïde, il est clair que la seconde limite v des trois intégrales devient égale à zéro. Ainsi, pour ces points, il suffit de remplacer dans les formules (*H.*) le signe $\int_{\infty}^{v}$ par celui de $\int_{\infty}^{0}$. Après ce changement, elles sont applicables même à tous les points de la masse intérieure de l'ellipsoïde, en observant: 1°. que les paramètres m et n demeurent constans pour tous les ellipsoïdes semblables: 2°. que l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point donné de sa propre masse se réduit à celle de la position de ce corps qui est terminée par une surface semblable à la sienne, assujettie à passer par le point donné.

Or,

$$a\,da + mb\,db + nc\,dc = 0$$

étant l'équation différentielle de toutes les surfaces elliptiques semblables, et

$$a\,da + \frac{\frac{Y}{b} - g}{\frac{X}{a}} . b\,db + \frac{\frac{Z}{c} - g}{\frac{X}{a}} . c\,dc = 0$$

celle qui doit avoir lieu pour l'équilibre de la masse fluide, il est manifeste qu'on rendra ces équations identiques en établissant les équations

$$m = \frac{\frac{Y}{b} - g}{\frac{X}{a}}, \quad n = \frac{\frac{Z}{c} - g}{\frac{X}{a}}.$$

De là on tire, par l'élimination de g:

$$(m - n)\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} - \frac{Z}{c}.$$

Donc en substituant pour $\frac{X}{a}$, $\frac{Y}{b}$, $\frac{Z}{c}$ les expressions déduites des formules (*H.*), et suppriment le facteur commun $m-n$ (d'où résultait l'ancienne solution de *Maclaurin*) on aura l'équation de Mr. *Jacobi;* savoir

$$\int_0^\infty \frac{du}{(1+u)\sqrt{[(1+u)(1+mu)(1+nu)]}} = \int_0^\infty \frac{du}{(1+mu)(1+nu)\sqrt{[(1+u)(1+mu)(1+nu)]}}.$$

La force centrifuge g, relative à l'unité de distance de l'axe de rotation, est donnée par l'équation

$$g = \frac{\frac{Y}{b} - \frac{m}{n}.\frac{Z}{g}}{1 - \frac{m}{n}}$$

conclue des valeurs précédentes de m et n. De sorte qu'on a

$$g = 2\pi mn \int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+mu)(1+nu)\sqrt{[(1+u)(1+mu)(1+nu)]}}.$$

La masse $4\pi k\sqrt{\frac{k}{mn}}$ de l'ellipsoïde étant aussi connue, on pourra déterminer aussi la valeur convenable de k.

15. Reprenons l'équation

$$(a-x)^2 + m(b-y)^2 + n(c-z)^2 - k = 0$$

de la surface de l'ellipsoïde donné. Cette équation peut être écrite ainsi

$$\left(a - r.\frac{x}{r}\right)^2 + m\left(b - r.\frac{y}{r}\right)^2 + n\left(c - r.\frac{z}{r}\right)^2 - k = 0;$$

d'où l'on tire

$$45. \quad h - 2r\left(a.\frac{x}{r} + mb.\frac{y}{r} + nc.\frac{z}{r}\right) + r^2\left(\frac{x^2}{r^2} + m\frac{y^2}{r^2} + n\frac{z^2}{r^2}\right) = 0,$$

en se rappelant, que $a^2 + mb^2 + nc^2 - k = h$.

Maintenant, si l'on fait $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$, les rapports $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ qui entrent dans cette équation auront la même valeur pour tous les points de la droite, tirée de l'origine des coordonnées au point de la surface de l'ellipsoïde dont x, y, z sont les coordonnées. Il est clair que, sur la

même direction, il y a, en général, deux valeurs de r: en les désignant par ϱ_1 et ϱ_2 l'équation (45.) donne

$$46. \quad \varrho_1 = \frac{a.\frac{x}{r} + mb.\frac{y}{r} + nc.\frac{z}{r} - R}{\frac{x^2}{r^2} + m\frac{y^2}{r^2} + n\frac{z^2}{r^2}},$$

$$47. \quad \varrho_2 = \frac{a.\frac{x}{r} + mb.\frac{y}{r} + nc.\frac{z}{r} + R}{\frac{x^2}{r^2} + m\frac{y^2}{r^2} + n\frac{z^2}{r^2}};$$

où l'on a fait, pour plus de simplicité:

$$48. \quad R = \sqrt{\left[\left(a.\frac{x}{r} + mb.\frac{y}{r} + nc.\frac{z}{r}\right)^2 - h\left(\frac{x^2}{r^2} + m\frac{y^2}{r^2} + n\frac{z^2}{r^2}\right)\right]}.$$

De là on tire

$$49. \quad \varrho_2 - \varrho_1 = \frac{2R}{\frac{x^2}{r^2} + m\frac{y^2}{r^2} + n\frac{z^2}{r^2}};$$

ce qui revient à dire que

$$50. \quad R^2 = \frac{1}{L}(\varrho_2 - \varrho_1)^2\left(\frac{x^2}{r^2} + m\frac{y^2}{r^2} + n\frac{z^2}{r^2}\right).$$

Sur la direction des rayons r qui sont tangens à la surface de l'ellipsoïde donné, on a $\varrho_2 = \varrho_1$, et par conséquent $R = 0$. Ainsi, par cette considération, on obtient de nouveau l'équation (33.) de la surface conique circonscrite à l'ellipsoïde. En outre il est clair, qu'en appliquant au second membre de l'équation (48.) la transformation des coordonnés développée dans le No. 9., on obtient

$$51. \quad R^2 = A'\frac{x'^2}{r^2} + B'\frac{y'^2}{r^2} + C'\frac{z'^2}{r^2}.$$

où l'on a, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$.

On voit par-là l'intime connexion qu'il y a entre les trois racines de l'équation en t, analysée dans le premier paragraphe et l'expression de R^2.

Si A' désigne la racine positive de cette équation et B', C' les deux racines négatives, la forme même du second membre de l'équation (51.) suffit pour démontrer, que A' est le *maximum* de la valeur de R^2: de sorte que la variable R sera toujours comprise entre zéro et $\sqrt{A'}$. L'ensemble des coordonnées x', y', z' qui donneraient à R la même valeur comprise entre ces limites appartient à une surface conique semblable à celle qui répond $R = 0$: car, en remplaçant r^2 par $x'^2 + y'^2 + z'^2$, l'équation (51.) devient

$$52. \quad (A'-R^2)x'^2-(R^2-B')y'^2-(R^2-C')z'^2 = 0;$$

où les trois coefficients $A'-R^2$, R^2-B', R^2-C' sont nécessairement positifs.

Si l'on conçoit que la valeur de R^2 décroît par degrés insensibles, depuis A' jusqu'à zéro, on formera une infinité de surfaces coniques, qui, toutes pénétreront l'ellipsoïde donné, et partageront sa masse en une infinité de couches coniques. *Legendre* a considéré le premier l'attraction que ces couches exercent sur le point O extérieur à l'ellipsoïde; et par une analyse qu'on ne sauroit trop admirer il a démontré: 1°. que l'expression de cette attraction pouvait être délivrée du signe intégral: 2°. qu'elle était indépendante du paramètre h et se réduisait au produit de dR par une fonction algébrique de R^2, a, b, c, m, n. Nous reprendrons plus loin l'analyse de *Legendre* pour la présenter avec des éclaircissemens et des détails qui sont indispensables pour l'aprécier avec justesse.

16. On peut regarder $\varrho_2-\varrho_1$ comme la longueur de toute corde de l'ellipsoïde qui, en la prolongeant est assujettie à passer par l'origine des coordonnées. En posant $\varrho_2-\varrho_1=H$, et remplaçant R et h par leurs valeurs, l'équation (50.) deviendra

$$\left(a.\frac{x}{r}+mb.\frac{y}{r}+nc.\frac{z}{r}\right)^2-(a^2+mb^2+nc^2-k)\left(\frac{x^2}{r^2}+m\frac{y^2}{r^2}+n\frac{z^2}{r^2}\right)$$
$$=\frac{H^2}{4}\left(\frac{x^2}{r^2}+m\frac{y^2}{r^2}+n\frac{z^2}{r^2}\right)^2.$$

Pour un ellipsoïde concentrique et semblable à celui que l'on considère, les quantités a, b, c, m, n demeurent les mêmes; la seule quantité k change de valeur. Donc en considérant deux valeurs consécutives, k et $k+dk$, de k, on aura pour la variation différentielle dH de la corde H, l'équation

$$HdH=\frac{2dk}{\frac{x^2}{r^2}+m\frac{y^2}{r^2}+n\frac{z^2}{r^2}}.$$

En substituant ici pour H sa valeur fournie par l'équation (49.) on obtient

$$dH=\frac{dk}{R}.$$

D'ailleurs, nous avons $dH=d\varrho_2-d\varrho_1$: et comme les équations (46.) et (47.) donnent $d\varrho_2=-d\varrho_1$, ist est clair que

$$dH=2d\varrho_2.$$

En nommant ds l'élément différentiel de la surface sphérique, décrite de l'origine des coordonnées comme centre avec un rayon égal à l'unité; l'élément différentiel du volume de la couche elliptique comprise entre les

surfaces des deux ellipsoïdes semblables, que nous venons de considérer, sera exprimé (abstruction faite du signe) par $\varrho_1^2\, d\varrho_1\, ds$, du côté antérieur, et par $\varrho_2^2\, d\varrho_2\, ds$ du côté postérieur: donc, l'attraction de ces deux masses infiniment petites sur le point O, sera

$$\frac{\varrho_1^2\, d\varrho_1\, ds}{\varrho_1^2} = d\varrho_1\, ds, \qquad \frac{\varrho_2^2\, d\varrho_2\, ds}{\varrho_2^2} = d\varrho_2\, ds:$$

ce qui revient à dire qu'il en résulte sur le point O une attraction exprimée par

$$2\, d\varrho_2\, ds = dH ds,$$

ou par

$$dH ds = \frac{dk\, ds}{R}.$$

Les trois composantes de cette force, respectivement parallèles aux axes des coordonnées x, y, z, sont:

$$\frac{x}{r}.dH ds, \quad \frac{y}{r}.dH ds, \quad \frac{z}{r}.dH ds.$$

Donc nous avons

$$X_1 = dk \iint \frac{\frac{x}{r}.ds}{R}, \qquad Y_1 = dk \iint \frac{\frac{y}{r}.ds}{R}, \qquad Z_1 = dk \iint \frac{\frac{z}{r}.ds}{R}$$

pour les résultantes des forces parallèles aux axes des x, y, z exercées par la couche elliptique entière sur le point O.

17. Sur cela, pour la clarté des idées, il est essentiel d'observer que ces forces donnent seulement l'attraction de la portion de la couche elliptique comprise dans l'intérieur du cône $MGNON'H'M'$ (Fig. 3.) circonscrit à la surface intérieure de la couche déterminée par les trois paramètres m, n, $k+dk$. De sorte qu'on ne tient pas compte de la portion de la même couche comprise entre les deux surfaces coniques circonscrites à la surface intérieure et extérieure. Mais on peut démontrer que, l'attraction de cette portion de la couche est une quantité infiniment petite de l'ordre $\frac{3}{2}$, tandis que l'attraction de la couche est une quantité infiniment petite du premier ordre. En effet, tirons entre les deux surfaces coniques la ligne droite OAB: en faisant $OA = \varrho_1^1$, $OB = \varrho_2^1$; nous aurons

$$\int \frac{r^2\, dr.ds}{r^2} = \int dr.ds = ds \int dr = ds\,(\varrho_2^1 - \varrho_1^1):$$

donc, en nomment α, β, γ les angles que la ligne droite ou corde $AB = \varrho_2^1 - \varrho_1^1$ fait avec les axes, nous aurons

$$\cos\alpha.ds(\varrho_2^1 - \varrho_1^1), \qquad \cos\beta.ds(\varrho_2^1 - \varrho_1^1), \qquad \cos\gamma.ds(\varrho_2^1 - \varrho_1^1)$$

pour les trois composantes de la force exercée par le petit prisme ayant AB pour axe. Ainsi, en supposant que l'axe $\varrho_2^1 - \varrho_1^1$ se rapporte au plus grand de ces petits prismes, on aurait

$$\int \cos\alpha . ds (\varrho_2^1 - \varrho_1^1) < \cos\alpha (\varrho_2^1 - \varrho_1^1) \int ds.$$

On peut supposer (sans erreur sensible) les élémens ds de la surface sphérique distribués sur une petite zone de la sphère, et alors on a $\int ds = 2\pi \sin\theta . d\theta$, en nommant θ l'angle qui mesure l'inclinaison de la ligne AB avec l'axe de la surface conique circonscrite à l'ellipsoïde. On a donc

$$\int \cos\alpha . ds (\varrho_2^1 - \varrho_1^1) < \cos\alpha (\varrho_2^1 - \varrho_1^1) 2\pi \sin\theta . d\theta.$$

Cela posé j'observe que la quantité $\varrho_2^1 - \varrho_1^1$ est de l'ordre de la racine carrée d'une quantité infiniment petite. Soit

$$\frac{x}{r} = \cos\alpha, \quad \frac{y}{r} = \cos\beta, \quad \frac{z}{r} = \cos\gamma,$$

en regardant α, β, γ comme les angles qui ont lieu lorsque $\varrho_2 - \varrho_1 = 0$; et $\alpha + \delta\alpha$, $\beta + \delta\beta$, $\gamma + \delta\gamma$ comme les angles qui appartiennent à la ligne AB: si l'on fait, pour un moment:

$$Q = (a\cos\alpha + mb\cos\beta + nc\cos\gamma)^2 - h(\cos^2\alpha + m\cos^2\beta + n\cos^2\gamma),$$
$$Q' = \cos^2\alpha + m\cos^2\beta + n\cos^2\gamma,$$

la formule (49.) donnera

$$\varrho_2^1 - \varrho_1^1 = \frac{2\sqrt{\left(Q + \frac{dQ}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{dQ}{d\beta}\delta\beta + \frac{dQ}{d\gamma}\delta\gamma\right)}}{Q' + \frac{dQ'}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{dQ'}{d\beta}\delta\beta + \frac{dQ'}{d\gamma}\delta\gamma};$$

d'où l'on tire

$$\varrho_2^1 - \varrho_1^1 = \frac{2}{Q'}\sqrt{\left(\frac{dQ}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{dQ}{d\beta}\delta\beta + \frac{dQ}{d\gamma}\delta\gamma\right)},$$

en observant que, par la définition des angles α, β, γ on a $Q = 0$; et qu'on peut négliger dans le dénominateur la variation très-petite de la quantité Q'. Or, cette expression est évidemment celle d'une quantité infiniment petite de l'ordre $\frac{1}{2}$: ce qui nous autorise à regarder la quantité

$$\cos\alpha (\varrho_2^1 - \varrho_1^1) 2\pi \sin\theta . d\theta$$

comme infiniment petite de l'ordre $\frac{3}{2}$.

On voit par là, que l'expression du second membre de l'équation (49.) nous offre par exemple des cas singuliers où on ne peut pas employer directement la formule de *Taylor* pour développer la variation que subit la fonction $\varrho_2 - \varrho_1$, immédiatement avant et après la courbe de contact.

L'attraction de la couche elliptique, parallèle à l'axe des x, est donc exprimée par

$$dk\iint\frac{\frac{x}{r}.ds}{R},$$

plus d'autres termes infiniment petits dont les ordres successifs sont $\frac{3}{2}$, 2 etc. Donc, on peut négliger ces termes à l'égard du premier; et, conformément à la métaphysique du calcul différentiel, on doit intégrer le seul premier terme et prendre

$$\int dk\iint\frac{\frac{x}{r}.ds}{R}$$

pour la composante de l'attraction de l'ellipsoïde entier sur le point O. Cela revient à imaginer l'ellipsoïde décomposé en une infinité de couches elliptiques *semblables*, dont

$$(a-x)^2+m(b-y)^2+n(c-z)^2 = k_1$$

représente l'équation générale de leur surface, en faisant croître k_1 par degrés insensibles depuis $k_1=0$ jusqu'à $k_1=k$.

18. Comme, d'un autre côté, l'attraction de l'ellipsoïde entier peut être exprimée, parallèlement à l'axe des x, par

$$\iint(\varrho_2-\varrho_1)\frac{x}{r}\,ds;$$

si l'on remplace $\varrho_2-\varrho_1$ par sa valeur donnée par l'équation (49.), on établira l'équation

$$53.\quad \int dk\iint\frac{\frac{x}{r}.ds}{R} = 2\iint\frac{\frac{x}{r}R\,ds}{\frac{x^2}{r^2}+m\frac{y^2}{r^2}+n\frac{z^2}{r^2}},$$

laquelle sera vraie, après avoir exécuté les intégrations dans les deux membres de manière qu'elles embrassent la totalité des élémens de l'ellipsoïde. Maintenant, il est plus simple de remplacer ici, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$: α, β, γ étant les angles formés avec les axes des x, y, z par une corde quelconque de l'ellipsoïde assujettie à passer par le point attiré O. Alors on écrira

$$54.\quad \begin{cases} \int dk\iint\frac{ds\cos\alpha}{R} = 2\iint\frac{R\cos\alpha.ds}{\cos^2\alpha+m\cos^2\beta+n\cos^2\gamma}; \\ R=\sqrt{[(a\cos\alpha+mb.\cos\beta+nc.\cos\gamma)^2-k(\cos^2\alpha+m\cos^2\beta+n\cos^2\gamma)]}. \end{cases}$$

19. Cette équation se trouve ainsi démontrée par des considérations géometriques tout-à-fait sensibles: mais on peut aussi l'établir analytiquement, à l'aide du principe relatif à la différentiation des fonctions affectées du signe intégral, étendu au cas, où les limites de l'intégrale sont elles-mêmes fonctions du paramètre sur lequel porte la différentiation.

Ce principe doit être écrit ainsi:

$$55. \quad \frac{d}{dk}\int_p^q F(x,k)\,dx = \int_p^q dx\,\frac{d.F(x,k)}{dk} + \frac{dq}{dk}F(q,k) - \frac{dp}{dk}F(p,k).$$

Or, en faisant

$$\cos\alpha = \cos\varpi.\sin\gamma; \qquad \cos\beta = \sin\varpi.\sin\gamma$$

on a, $ds = \sin\gamma.d\varpi\,d\gamma$, et la fraction

$$\frac{R\cos\alpha.ds}{\cos^2\alpha + m\cos^2\beta + n\cos^2\gamma}$$

devient de la forme

$$F(\varpi,\gamma)\,d\varpi\,d\gamma.$$

Donc, en nommant X la composante de l'attraction de l'ellipsoïde, parallèle à l'axe des x, telle qu'elle est exprimée par le second membre de l'équation (54.), nous aurons

$$X = 2\int_{\varpi''}^{\varpi''} d\varpi \int_{\gamma'}^{\gamma''} F(\varpi,\gamma)\,d\gamma;$$

où γ' et γ'' sont deux fonctions de ϖ, censées déterminées par l'équation $\varrho_2 - \varrho_1 = 0$, laquelle est équivalente à $R = 0$, ou bien à $F(\varpi,\gamma) = 0$. Il suit de là, que

$$\frac{dX}{d\varpi} = 2\int_{\gamma''}^{\gamma''} F(\varpi,\gamma)\,d\gamma.$$

Donc en différentiant les deux membres de cette équation par rapport au paramètre k, explicitement renfermé dans la valeur de h, il viendra

$$\frac{d^2X}{d\varpi\,dk} = 2\int_{\gamma'}^{\gamma''} d\gamma.\frac{d.F(\varpi,\gamma)}{dk} + \frac{2d\gamma''}{dk}F(\varpi,\gamma'') - \frac{2d\gamma'}{dk}F(\varpi,\gamma').$$

Mais on vient de dire, que les quantités γ' et γ'' doivent être telles qu'on a

$$F(\varpi,\gamma') = 0, \qquad F(\varpi,\gamma'') = 0;$$

partant nous avons

$$\frac{d^2X}{d\varpi\,dk} = 2\int_{\gamma'}^{\gamma''} d\gamma\,\frac{d.F(\varpi,\gamma)}{dk}.$$

D'après les définitions établies plus haut, on a

$$d\gamma\,\frac{d.F(\varpi,\gamma)}{dk} = \frac{ds}{d\varpi}.\frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha + m\cos^2\beta + n\cos^2\gamma}.\frac{dR}{dk}$$

$$= -\frac{ds}{d\varpi}.\frac{\cos\alpha}{2R}.\frac{dh}{dk} = \frac{ds}{d\varpi}.\frac{\cos\alpha}{2R};$$

et par conséquent

$$\frac{d^2 X}{d\varpi\, dk} = \int_{\gamma'}^{\gamma''} \frac{ds.d\gamma}{d\gamma\, d\varpi} \cdot \frac{\cos\alpha}{R},$$

ou bien

$$\frac{d^2 X}{d\varpi\, dk} = \int_{\gamma'}^{\gamma''} \sin\gamma . d\gamma . \frac{\cos\alpha}{R}.$$

En intégrant les deux membres de cette équation par rapport à ϖ, il est clair qu'on a:

$$\frac{dX}{dk} = \int_{\varpi'}^{\varpi''} d\varpi \int_{\gamma'}^{\gamma''} d\gamma \sin\gamma . \frac{\cos\alpha}{R};$$

c'est-à-dire

$$\frac{dX}{dk} = \iint \frac{ds.\cos\alpha}{R},$$

où je supprime, pour plus de simplicité, les limites des deux intégrations. Ainsi, on a

$$X = \int dk \iint \frac{ds.\cos\alpha}{R},$$

en intégrant depuis $k = 0$ jusqu'à la valeur de k qui repond à la surface de l'ellipsoïde.

En remplaçant X par sa valeur primitive, cette équation coïncide avec celle désignée plus haut par (54.).

Cette analyse offre une démonstration claire du principe énoncé par *Laplace* au commencement de la page 15 du second Volume de la Mécanique Céleste, et puis par Mr. *Poisson*, en 1833, comme base fondamentale de son Mémoire sur l'attraction de l'ellipsoïde homogène. Rien n'est moins évident qu'un tel principe, et je pense qu'on ne peut en sentir la vérité sans entrer dans des détails analogues à ceux que je viens d'exposer.

20. En substituant au lieu de R sa valeur donnée par l'équation (51.), après avoir fait

$$\frac{x'}{r} = \cos\theta, \quad \frac{y'}{r} = \cos\varphi, \quad \frac{z'}{r} = \cos\psi;$$

$$\frac{x}{r} = \cos\alpha = e\cos\theta + e'\cos\varphi + e''\cos\psi,$$

$$\frac{y}{r} = \cos\beta = f\cos\theta + f'\cos\varphi + f''\cos\psi,$$

$$\frac{z}{r} = \cos\gamma = g\cos\theta + g'\cos\varphi + g''\cos\psi,$$

on aura, à la place des formules trouvées en finissant le No. 16.:

$$R = \sqrt{(A'\cos^2\theta + B'\cos^2\varphi + C'\cos^2\psi)},$$

$$X_1 = dk\iint \frac{ds.\cos\alpha}{R}, \quad Y_1 = dk\iint \frac{ds.\cos\beta}{R}, \quad Z_1 = dk\iint \frac{ds.\cos\gamma}{R}.$$

Maintenant, si l'on fait

$$\cos\varphi = \sin\theta.\cos\omega; \qquad \cos\psi = \sin\theta.\sin\omega;$$

ce qui revient à projeter le rayon vecteur r sur le plan des $y'z'$ et à nommer ω l'angle de sa projection avec l'axe des y', on aura pour l'élément ds de la surface sphérique:

$$ds = d\theta\, d\omega \sin\theta.$$

D'après cela nous avons

$$55. \quad R = \sqrt{(A'\cos^2\theta + (B'\cos^2\omega + C'\sin^2\omega)\sin^2\theta)};$$

$$X_1 = dk\iint \frac{\sin\theta.d\theta\, d\omega}{R}[e\cos\theta + (e'\cos\omega + e''\sin\omega)\sin\theta],$$

$$Y_1 = dk\iint \frac{\sin\theta.d\theta\, d\omega}{R}[f\cos\theta + (f'\cos\omega + f''\sin\omega)\sin\theta],$$

$$Z_1 = dk\iint \frac{\sin\theta.d\theta\, d\omega}{R}[g\cos\theta + (g'\cos\omega + g''\sin\omega)\sin\theta].$$

En considérant ces intégrales doubles on conçoit, que l'intégration relative à θ donne l'attraction d'un onglet elliptique compris entre deux plans qui ont l'axe des x' pour intersection commune et forment entr'eux un angle infiniment petit $d\omega$. Les limites de cette intégration doivent être $\theta = 0$ et $\theta = \mu$: l'angle μ étant celui qui donne $R = 0$; c'est-à-dire

$$56. \quad A'\cos^2\mu + (B'\cos^2\omega + C'\sin^2\omega)\sin^2\mu = 0.$$

Le résultat ainsi obtenu étant intégré depuis $\omega = 0$ jusqu'ici $\omega = 2\pi$ donnera l'attraction de la couche elliptique entière.

Avec une légère réflexion on voit, que la partie multipliée par e' et celle multipliée par e'' dans l'expression de X_1 doivent se réduire à zéro. Car, après avoir exécuté l'intégration par rapport à θ et substitué pour θ sa valeur μ donnée par l'équation (56.), on aura des expressions de la forme

$$e'\, d\omega \cos\omega \text{ fonct.}(\cos^2\omega, \sin^2\omega),$$

$$e''\, d\omega \sin\omega \text{ fonct.}(\cos^2\omega, \sin^2\omega),$$

lesquelles étant intégrées depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 2\pi$, donnent des résultats nuls par l'opposition des signes et l'égalité des élémens de ces intégrales.

Il suit de là que les valeurs précédentes de X_1, Y_1, Z_1 sont réductibles à celles-ci:

$$X_1 = e\,dk\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\mu} \frac{\cos\theta\,\sin\theta\,.\,d\theta}{R},$$

$$Y_1 = f\,dk\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\mu} \frac{\cos\theta\,\sin\theta\,.\,d\theta}{R},$$

$$Z_1 = g\,dk\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\mu} \frac{\cos\theta\,\sin\theta\,.\,d\theta}{R}.$$

Si l'on observe maintenant, que

$$e = \cos(x'x), \qquad f = \cos(x'y), \qquad g = \cos(x'z)$$

on en conclura, que ces valeurs de X_1, Y_1, Z_1 sont les composantes de la force unique

$$57. \qquad T = dk\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\mu} \frac{\cos\theta\,\sin\theta\,.\,d\theta}{R},$$

dirigée suivant l'axe des x'. Il serait superflu de répéter ici les remarques déjà faites sur les différentes manières d'envisager la direction de cette force

Comme on a vu dans le No. 16., que

$$\frac{dk}{R} = 2d\varrho = d\varrho_2 - d\varrho_1 = \frac{\varrho_2^2\,d\varrho}{\varrho_2^2} - \frac{\varrho_1^2\,d\varrho_1}{\varrho_1^2},$$

si l'on nomme dM', dM'' les deux élémens

$$-\varrho_1^2\,d\varrho_1 \sin\theta\,d\theta\,d\omega, \qquad +\varrho_2^2\,d\varrho_2 \sin\theta\,d\theta\,d\omega$$

de la masse de la couche elliptique qui se trouvent sur la même direction, on pourra mettre l'expression précédente de T sous la forme

$$T = \iint \left(\frac{dM'}{\varrho_1^2} + \frac{dM''}{\varrho_2^2}\right)\cos\theta.$$

Cette force, ainsi exprimée par les composantes des forces élémentaires $\frac{dM'}{\varrho_1^2}$, $\frac{dM''}{\varrho_2^2}$, paraît évidente *a priori:* mais en voulant s'appuyer uniquement sur cette considération synthétique, on laisserait dans l'obscurité la condition, que les surfaces intérieure et extérieure de la couche doivent être semblables.

21. Soit, pour un moment, $\sin\theta = x$; il viendra

$$\frac{T}{dk} = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\mu} \frac{x\,dx}{\sqrt{[A' + (B'\cos^2\omega + C'\sin^2\omega - A')x^2]}}.$$

En exécutant l'intégration par rapport à x, et remplaçant x par $\sin\theta$, on obtient

$$\frac{\sqrt{[A'\cos^2\theta + (B'\cos^2\omega + C'\sin^2\omega)\sin^2\theta]} - \sqrt{A'}}{B'\cos^2\omega + C'\sin^2\omega - A'}.$$

Maintenant, si l'on fait $\theta = \mu$, le premier radical du numérateur devient nul en vertu de l'équation (56.), et l'on a

$$T = dk\sqrt{A'}\int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{A'-B'\cos^2\omega - C'\sin^2\omega};$$

ou bien

$$T = dk\sqrt{A'}\int_0^{2\pi}\frac{2\,d\omega}{(2A'-B'-C')+(C'-B)\cos 2\omega}.$$

En exécutant cette intégration, on trouvera

$$T = \frac{4\pi\, dk\sqrt{A'}}{\sqrt{[(2A'-B'-C')^2-(C'-B')^2]}},$$

ou bien

$$58. \quad T = \frac{2\pi\, dk\sqrt{A'}}{\sqrt{[A'-B')(A'-C')]}}.$$

Cette expression de T doit s'accorder avec celle qu'on voit dans le second membre de l'équation (43).

Pour rendre cette identité évidente, je remarque d'abord, que

$$\frac{A'}{(A'-B')(A'-C')} = \frac{A'}{A'^2-A'(B'+C')+B'C'} = \frac{A'}{2A'^2-A'(A'+B'+C')+B'C'}$$
$$= \frac{A'^2}{A'^3-A'^2(A'+B'+C')+A'B'C'}.$$

Mais nous avons démontré dans le No. 9. que les trois quantités A', B', C' sont les racines de l'équation (21.); partant on a:

$$A'B'C' = mnk^2;$$
$$A'+B'+C' = k(1+m+n)-a^2(m+n)-mb^2(1+n)-nc^2(1+m);$$
$$A'^3 = A'^2(A'+B'+C')+A'B'C'-A'h[mn(a^2+b^2+c^2)-k(m+n+mn)].$$

Donc la fonction des racines

$$\frac{A'}{(A'-B')(A'-C')}$$

est équivalente à la quantité

$$\frac{A'^2}{A'^2(A'+B'+C')+3A'B'C'-2A'h[mn(a^2+b^2+c^2)-k(m+n+mn)]}.$$

En divisant par A'^2 le numérateur et le dénominateur, et remplaçant ensuite $\frac{h}{A'}$ par $\frac{h}{t} = \nu$, on aura

$$\frac{\sqrt{A'}}{\sqrt{[(A'-B')(A'-C']}} = \frac{1}{\sqrt{U}},$$

où je fais, pour plus de simplicité,

$$U = -a^2(m+n)-mb^2(1+n)-nc^2(1+m)-2mn\nu(a^2+b^2+c^2)$$
$$+k[(1+m+n)+2\nu(m+n+mn)+mn\nu^2].$$

Maintenant, si l'on remplace ici k par sa valeur fournie par le premier membre de l'équation (10.), on aura:

$$U = \frac{a^2}{1+\nu}[1+\nu(m+n)+mn\nu^2] + \frac{m^2 b^2}{1+m\nu}[1+\nu(1+n)+n\nu^2] + \frac{n^2 c^2}{1+n\nu}[1+\nu(1+m)+m\nu^2].$$

Cette expression peut être écrite ainsi:

$$U = \frac{a^2(1+m\nu)(1+n\nu)}{1+\nu} + \frac{m^2 b^2(1+\nu)(1+n\nu)}{1+m\nu} + \frac{n^2 c^2(1+\nu)(1+m\nu)}{1+n\nu}:$$

et en la rapprochant de celle de Q^2 donnée par l'équation (14.), il devient manifeste, que

$$U = \frac{Q^2}{(1+\nu)(1+m\nu)(1+n\nu)};$$

ce qui rend coïncidentes les deux équations (43.) et (58.). On doit donc regarder comme directement démontrées les différentes formules rapportées dans les Nos. 12. et 13., pour exprimer l'attraction de la couche elliptique terminée par des surfaces semblables, ainsi que les formules (H.) qui donnent l'attraction de l'ellipsoïde entier. Et ces formules une fois établies, il est facile de les ramener à la forme des formules (L'.), en faisant en sens contraire la transformation opérée dans le No. 12.; c'est-à-dire en posant, respectivement:

$$\frac{1}{1+u} = \frac{x^2}{1+\nu}; \quad \frac{1}{1+mu} = \frac{y^2}{1+m\nu}; \quad \frac{1}{1+nu} = \frac{z^2}{1+n\nu},$$

dans les expressions de X, Y, Z qui constituent le second membre des équations (H.).

22. Si le point attiré était placé sur la surface extérieure de la couche elliptique, la direction de la force T serait *normale* à cette même surface, conformément à ce qui a été dit dans le No. 12. Or il est clair que, dans ce cas particulier, on a $\nu = 0$: donc la formule (43.) donne

$$59. \quad T = \frac{2\pi\, dk}{\sqrt{(a^2+m^2 b^2+n^2 c^2)}}.$$

Cela posé, il est facile de démontrer, que cette force est proportionnelle à l'épaisseur de la couche, au point déterminé par les coordonnées a, b, c; c'est-à-dire au point attiré. En effet; l'équation

$$a^2+mb^2+nc^2-k = 0$$

donne

$$\frac{dc}{da} = p = -\frac{a}{nc}; \quad \frac{dc}{db} = q = -\frac{mb}{nc}.$$

Mais on sait que $(c'-c)\sqrt{(1+p^2+q^2)}$ représente la longueur de la normale depuis la surface jusqu'au point déterminé par les coordonnées a', b', c': donc, l'épaisseur de la couche est ici exprimée par

$$\frac{(c'-c)}{nc}\sqrt{(a^2+m^2b^2+n^2c^2)}.$$

Or nous avons

$$a'^2+mb'^2+nc'^2 = k+dk, \qquad a^2+mb^2+nc^2 = k;$$

et par conséquent

$$dk = (a'+a)(a'-a)+m(b'+b)(b'-b)+n(c'+c)(c'-c):$$

donc en observant, que les équations de la normale donnent:

$$(a'-a)-(c'-c)\frac{a}{nc} = 0, \qquad (b'-b)-(c'-c)\frac{mb}{nc} = 0,$$

il viendra

$$dk = \frac{(c'-c)}{nc}[a(a'+a)+m^2b(b'+b)+n^2c(c'+c)].$$

Il suit de là qu'en nommant E_1 l'épaisseur de la couche, on a

$$E_1 = \frac{dk\sqrt{(a^2+m^2b^2+n^2c^2)}}{a^2\left(1+\frac{a'}{a}\right)+m^2b^2\left(1+\frac{b'}{b}\right)+n^2c^2\left(1+\frac{c'}{c}\right)}.$$

Si l'on observe maintenant, que les rapports $\frac{a'}{a}$, $\frac{b'}{b}$, $\frac{c'}{c}$ différent de l'unité par des quantités du premier ordre on en conclura qu'en négligeant les quantités du second ordre, on a

$$60. \qquad E_1 = \frac{dk}{2\sqrt{(a^2+m^2b^2+n^2c^2)}},$$

ce qui rend la formule (59.) équivalente à celle-ci:

$$61. \qquad T = 4\pi.E_1.$$

En rétablissant par la pensée le coefficient qui mesure l'intensité de l'attraction (coefficient que nous avons tacitement supposé égal a l'unité) cette formule revient à dire, que l'attraction d'une couche elliptique terminée par deux surfaces semblables, sur un point de sa surface extérieure est normale à cette surface, et proportionnelle à l'épaisseur de la couche en ce point. En partageant l'épaisseur E_1, depuis la surface intérieure de la couche, dans un nombre infini d'élémens rectilignes exprimés chacun par dE_1, chacun d'eux sera sollicité par une force proportionnelle à $TdE_1 = 4\pi E_1 dE_1$, puisqu'on sait que l'élément dE_1 n'éprouve aucune action de la part de la couche qui lui est supérieure. Donc, la somme des forces qui ont lieu sur la totalité des points distribués sur l'épaisseur

entière E_1 sera proportionnelle à l'intégrale $4\pi\int E_1\,dE_1 = 2\pi.E_1^2$. Cette somme, ou résultante, étant appliquée à tous les points de l'unité superficielle constitue ce qu'on a coutume d'appeler la *pression contre l'air environnant,* lorsqu'on adapte le principe précédent à une couche elliptique formée par l'electricité en équilibre sur la surface d'un ellipsoïde. Car, la loi de cette force répulsive étant la raison inverse du carré de la distance, il est évident qu'il suffit de changer le signe du résultat final pour passer du cas des forces attractives à celui des forces répulsives. La pression sur un élément superficiel ω sera donc proportionnelle à $2\pi\omega E_1^2 = \frac{1}{2}T.E_1\omega$: mais $E_1\omega$ représente le volume du petit prisme ayant ω pour base et E_1 pour hauteur: donc il est permis de dire, que le fluide électrique exerce sur chaque élément superficiel de l'air environnant une pression qui est en raison composée de la force répulsive et du volume différentiel de la couche qui lui est adhérent.

Cet énoncé revient à celui que l'on aurait immédiatement en supposant égales toutes les forces répulsives émanées du petit prisme $E_1\omega$: mais, pour la clarté des idées, il n'était pas inutile d'établir une telle distinction.

Pour une couche elliptique de révolution, la formule (43.) donne

$$62. \quad T = \frac{2\pi.dk\sqrt{(1+\nu)}}{\sqrt{[a^2(1+m\nu)^2+m^2(b^2+c^2)(1+\nu)^2]}};$$

où l'on doit mettre pour ν la valeur rapportée dans le No. 6., en se rappellant, que a, b, c sont les coordonnées du point attiré (extérieur à la couche) comptées depuis le centre de la couche.

D'après ce qui a été dit en finissant le No. 6., on pourra adapter, de la même manière, la formule (43.) au cas où le point attiré serait placé dans le plan d'une des trois sections principales de la couche elliptique.

23. Pour mettre les formules ($L.$), établies au commencement du No. 12., sous la forme explicite des transcendantes elliptiques de première et seconde espèce, il faudra leurs appliquer la transformation enseignée par *Legendre.*

Après avoir fait:

$$p^2 = \frac{a_1^2-b_1^2}{a_1^2-c_1^2}; \qquad A_1\sin\theta = \sqrt{(a_1^2-c_1^2)}; \qquad A_1\cos\theta = C_1;$$

$$\Delta = \sqrt{(1-p^2\sin^2\varphi)}; \quad F(p,\varphi) = \int\frac{d\varphi}{\Delta}; \qquad E(p,\varphi) = \int\Delta\,d\varphi;$$

on trouvera de cette manière

$$(L''.)\quad\begin{cases} X = \dfrac{3Ma}{(a_1^2-c_1^2)^{\frac{3}{2}}}\displaystyle\int_0^\theta \frac{d\varphi\sin^2\varphi}{\Delta}; \\ Y = \dfrac{3Mb}{(a_1^2-c_1^2)^{\frac{3}{2}}}\displaystyle\int_0^\theta \frac{d\varphi\sin^2\varphi}{\Delta^3}; \\ Z = \dfrac{3Mc}{(a_1^2-c_1^2)^{\frac{3}{2}}}\displaystyle\int_0^\theta \frac{d\varphi\,\mathrm{tang}^2\varphi}{\Delta}; \end{cases}$$

où M désigne la masse de l'ellipsoïde.

Les trois intégrales étant réduites aux transcendantes elliptiques sont telles que l'on a:

$$p^2\int_0^\theta \frac{d\varphi.\sin^2\varphi}{\Delta} = F(p,\theta)-E(p,\theta);$$

$$p^2(1-p^2)\int_0^\theta \frac{d\varphi.\sin^2\varphi}{\Delta^3} = E(p,\theta)-(1-p^2)F(p,\theta)-\frac{p^2\sin\theta\cos\theta}{\Delta'};$$

$$(1-p^2)\int_0^\theta \frac{d\varphi.\mathrm{tang}^2\varphi}{\Delta} = \Delta'\,\mathrm{tang}\,\theta - E(p,\theta),$$

en observant, que $\Delta' = \sqrt{(1-p^2\sin^2\theta)}$.

Pour saisir le principe de cette transformation, il faut consulter les formules données dans les pages 257 et 550 du 1[er] Volume du *Traité des fonctions elliptiques de Legendre.*

On sait que les formules ($L'''.$) s'appliquent aussi aux points attirés qui seraient intérieurs à la masse de l'ellipsoïde par le *seul changement* de la limite θ, qui, alors doit être déterminée par les équations

$$a_1\sin\theta = \sqrt{(a_1^2-c_1^2)};\qquad a_1\cos\theta = c_1.$$

Les formules ($L''.$) partagent donc avec les formules ($H.$) la propriété remarquable, d'embrasser les deux cas de l'attraction sur les points intérieurs et extérieurs à l'ellipsoïde par des intégrales qui diffèrent uniquement par les limites entre lesquelles elles sont prises.

24. Pour un analyste, il est curieux de voir, comment les formules fort simples désignées par ($L'.$) dans le No. 12., sont réductibles à la forme plus compliquée sous laquelle elles se sont présentées à *Legendre* en composant son Mémoire sur le même sujet qu'il a publié dans le Volume de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1788.

Pour cela, je remarque d'abord, que l'expression de la force X peut être écrite ainsi:

$$X = \frac{4\pi a}{3}\int_0^1 \frac{d.\left(\frac{x^2}{1+\nu}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left[\left(m-(m-1)\frac{x^2}{1+\nu}\right)\left(n-(n-1)\frac{x^2}{1+\nu}\right)\right]}},$$

où on peut faire $\nu = \frac{h}{t}$, en prenant pour t la racine positive A' de l'équation (18.).

Cela posé, j'imagine deux variables ω^2 et ζ liées par l'équation

$$63. \quad \frac{a^2}{\omega^2+\zeta} + \frac{m^2 b^2}{\omega^2+m\zeta} + \frac{n^2 c^2}{\omega^2+n\zeta} = 1,$$

tout-à-fait semblable à l'équation (18.), et je fais

$$64. \quad \frac{x^2}{1+\nu} = \frac{\omega^2}{\omega^2+\zeta} = \text{w}^2.$$

A la limite $x = 0$, on prendra $\omega^2 = 0$; et à la limite $x = 1$ on satisfera à cette équation en prenant $\zeta = h$, $\omega^2 = A'$.

En multipliant par ω^2 les deux membres de l'équation (63.), il est facile de voir qu'elle peut être mise sous cette forme:

$$65. \quad \omega^2 = \text{w}^2\left[a^2 + \frac{m^2 b^2}{m-(m-1)\text{w}^2} + \frac{n^2 c^2}{n-(n-1)\text{w}^2}\right].$$

En différentiant cette équation par rapport à ω^2 et w^2, on aura

$$d.\omega^2 = \left[a^2 + \frac{m^2 b^2}{m-(m-1)\text{w}^2} + \frac{n^2 c^2}{n-(n-1)\text{w}^2}\right] d.\text{w}^2$$
$$+\left[\frac{(m-1)m^2 b^2}{[m-(m-1)\text{w}^2]^2} + \frac{(n-1)n^2 c^2}{[n-(n-1)\text{w}^2]^2}\right]\text{w}^2 d.\text{w}^2;$$

ou bien

$$d.\omega^2 = \left[a^2 + \frac{m^2 b^2}{m-(m-1)\text{w}^2} + \frac{n^2 c^2}{n-(n-1)\text{w}^2}\right] d.\text{w}^2$$
$$-\left[\frac{m^2 b^2[m-(m-1)\text{w}^2-m]}{[m-(m-1)\text{w}^2]^2} + \frac{n^2 c^2[n-(n-1)\text{w}^2-n]}{[n-(n-1)\text{w}^2]^2}\right] d.\text{w}^2.$$

Donc en réduisant, on a

$$66. \quad d.\omega^2 = \left[a^2 + \frac{m^3 b^2}{[m-(m-1)\text{w}^2]^2} + \frac{n^3 c^2}{[n-(n-1)\text{w}^2]^2}\right] d.\text{w}^2$$

Mais $d.(\text{w}^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\omega\, d.\text{w}^2}{\sqrt{(\omega^2+\zeta)}}$; partant

$$d.(\text{w}^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{3\omega^2\, d\omega}{\sqrt{(\omega^2+\zeta)}\left[a^2 + \frac{m^3 b^2(\omega^2+\zeta)^2}{(\omega^2+m\zeta)^2} + \frac{n^3 c^2(\omega^2+\zeta)^2}{(\omega^2+n\zeta)^2}\right]}.$$

En substituant cette valeur de $d.(\text{w}^2)^{\frac{3}{2}}$ dans l'expression précédente de X, et faisant pour plus de simplicité,

$$67. \quad A = \frac{a^2(\omega^2+m\zeta)(\omega^2+n\zeta)}{\omega^2+\zeta}$$

on trouvera

$$68. \quad X = 4\pi\int_0^{\sqrt{A_1}} \frac{A^{\frac{3}{2}}.\omega^2\,d\omega}{A^2+m^2a^2b^2(\omega^2+n\zeta)^2+n^2a^2c^2(\omega^2+m\zeta)^2}.$$

Cette expression de X est conforme à celle trouvée par *Legendre* (voyez p. 483 du volume cité) en observant qu'on doit y remplacer ζ par la fonction de ω^2 qui donne la racine positive de l'équation (63.).

Par exemple, dans le cas fort simple où le point attiré serait placé dans le prolongement de l'axe des a, il faudrait faire $b=0$, $c=0$; ce qui réduit la formule (68.) à

$$X = \frac{4\pi}{a}\int_0^{\sqrt{A'}} \frac{\omega^2\,d\omega\,\sqrt{(\omega^2+\zeta)}}{\sqrt{[(\omega^2+m\zeta)(\omega^2+n\zeta)]}},$$

et l'équation (63.) à $\omega^2+\zeta=a^2$. De sorte qu'il faut ici remplacer ζ par $a^2-\omega^2$. Alors, on a

$$X = \frac{4\pi}{\sqrt{(mn)}}\int_0^{\sqrt{A_1}} \frac{\omega^2\,d\omega}{\sqrt{\left[a^2-\omega^2\left(1-\frac{1}{m}\right)\right]\left[a^2-\omega^2\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]}}.$$

Pour avoir la limite A' il faut faire $\zeta = h = a^2-a_1^2$, dans l'équation $\omega^2+\zeta=a^2$; ce qui donne $\omega^2=A'=a_1^2$. Donc, en posant $\omega=a_1x$, $m=\frac{a_1^2}{b_1^2}$, $n=\frac{a_1^2}{c_1^2}$, on aura

$$X = 4\pi a_1b_1c_1\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\{[a^2+(b_1^2-a_1^2)x^2][a^2+(c_1^2-a_1^2)x^2]\}}};$$

c'est-à-dire un résultat conforme à celui que donne la première des trois équations (L.) posées dans le No. 12., en observant que, dans ce cas particulier, $A_1=a$.

Pour donner, dans la formule (68.) à la différentielle soumise au signe intégral une interprétation géométrique, rappelons nous la remarque faite en finissant le No. 15. Suivant cette remarque, toute valeur de ω_1^2 comprise entre zéro et A' peut être égalée à la fonction désignée par R^2, et détermine une surface conique qui pénétre l'ellipsoïde de manière que la valeur de ω^2 est constante pour tous les points de la surface ainsi formée dans l'intérieur de l'ellipsoïde. Donc, les deux surfaces coniques consécutives, correspondantes aux valeurs de ω et $\omega+d\omega$ de ω, retranche-

ront dans la masse totale de l'ellipsoïde une couche conique dont l'attraction parallèle à l'axe des x, sera exprimée par

$$\frac{4\pi A^{\frac{3}{2}}.\omega^2 d\omega}{A^2 + m^2 a^2 b^2 (\omega^2 + n\zeta)^2 + n^2 a^2 c^2 (\omega^2 + m\zeta)^2};$$

c'est-à-dire par une fonction des cinq quantités constantes m, n, a, b, c et de la quantité variable ω^2. De sorte que, c'est seulement dans les limites de l'intégration subséquente par rapport à ω, qui demeure indiquée, qu'on peut apercevoir l'existence de l'élément k qui rend différente l'attraction, sur le même point, de tous les ellipsoïdes semblables et concentriques.

Les artifices de calcul par lesquels *Legendre* est parvenu à une démonstration directe de la formule (68.) sont fort ingénieux. Mais, il est impossible d'apprécier au juste le degré de la complication et le mérite de la difficulté vaincue, sans suivre pas à pas les transformations et les réductions à travers lesquelles on doit passer pour mettre en évidence la propriété caractéristique du résultat obtenu par le procède de son intégration. Malgré les indications laissées par *Legendre* il n'est pas fort aisé (du moins pour moi) de retrouver, ni les résultats intermédiaires ni le résultat final. Je pense qu'il ne sera pas tout-à-fait inutile d'exposer ici avec détail la marche que j'ai suivie par y parvenir.

§. 4.

Démonstration de la formule donnée par *Legendre* dans la page 479 du Volume de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1788.

25. Soit

$$\frac{x}{r} = \cos\alpha, \quad \frac{y}{r} = \cos\beta, \quad \frac{z}{r} = \cos\gamma:$$

d'après la formule (54.), nous avons

$$X = 2\iint \frac{R\cos\alpha.ds}{\cos^2\alpha + m\cos^2\beta + n\cos^2\gamma}$$

pour la composante parallèle à l'axe des x de la force attractive de l'ellipsoïde entier. Ici, on doit prendre pour R l'expression qui termine le No. 18.

Cela posé, si l'on fait

$$\cos\alpha = \sin p.\sin q, \quad \cos\beta = \cos p.\sin q, \quad \cos\gamma = \cos q,$$

on aura

$$ds = dp\,dq.\sin q.$$

D'un autre côté, nous avons

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}},$$

donc en faisant

$$x' = \frac{y}{x}, \quad y' = \frac{z}{x},$$

on aura;

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1+x'^2+y'^2)}}, \quad \cos\beta = \frac{x'}{\sqrt{(1+x'^2+y'^2)}}, \quad \cos\gamma = \frac{y'}{\sqrt{(1+x'^2+y'^2)}}:$$

et par conséquent

$$\operatorname{tang} p = \frac{1}{x'}; \quad \sin p . \operatorname{tang} q = \frac{1}{y}; \quad \operatorname{tang} q = \frac{\sqrt{(1+x'^2)}}{y'};$$

$$dp = -\cos^2 p . \frac{dx'}{x'^2}; \qquad dq = -\cos^2 q . \sqrt{(1+x'^2)} . \frac{dy'}{y'^2};$$

$$dp\, dq = \frac{dx'\, dy'}{(1+x'^2+y'^2)\sqrt{(1+x'^2)}}; \qquad ds = \frac{dx'\, dy'}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\cos\alpha . ds = \frac{dx'\, dy'}{(1+x'^2+y'^2)^2}.$$

Il suit de là que

$$69. \quad \begin{cases} X = 2\iint \dfrac{R\, dx'\, dy'}{(1+x'^2+y'^2)(1+mx'^2+ny'^2)}, \\ R^2 = \dfrac{(a+mbx'+ncy')^2 - h(1+mx'^2+ny'^2)}{1+x'^2+y'^2}. \end{cases}$$

Actuellement, si l'on veut introduire la variable R^2 au lieu de y', il faudra tirer de cette expression de R^2 la valeur de dy' en regardant x' comme quantité constante; ce qui donne

$$R\, dR (1+x'^2+y'^2) = dy' [nc(a+mbx'+ncy') - nhy' - y'R^2].$$

En substituant la valeur de dy' tirée de cette équation dans l'expression précédente de X, il viendra

$$X = 2\iint \frac{R^2\, dR\, dx'}{(1+mx'^2+ny'^2)[nc(a+mbx'+ncy') - nhy' - y'R^2]}.$$

Mais, en posant, pour plus de simplicité

$$F' = R^2 + nh - n^2c^2;$$
$$G' = a + mbx';$$
$$H' = (a+mbx')^2 - h(1+mx'^2) - R^2(1+x'^2),$$

l'expression de R^2 fournit l'équation

$$F'y'^2 - 2nc . G'y' = H'$$

de laquelle on tire

$$F'y' = nc . G' + \sqrt{[(ncG')^2 + H'F']};$$

partant on peut écrire

$$X = 2\iint \frac{dx' R^2\, dR}{(1+mx'^2+ny'^2)\sqrt{[(ncG')^2+H'F']}}.$$

Le binome $(ncG')^2+H'F'$ étant ordonné par rapport à x', prend la forme

$$-Mx'^2+2N'x'-E',$$

où l'on a

$$M' = (R^2+mh-m^2b^2)F'-(mnbc)^2;$$
$$N' = mab(n^2c^2+F');$$
$$E' = (R^2+h-a^2)F'-(nac)^2.$$

Donc, en décomposant ce trinome en ses facteurs, on aura

$$(ncG')^2+F'H'$$
$$= -\frac{1}{M'}[M'x'-N'-\sqrt{(N'^2-E'M')}][M'x'-N'+\sqrt{(N'^2-E'M')}].$$

Comme la quantité $\sqrt{[(ncG')^2+F'H']}$, par sa nature, doit être réelle dans toute l'étendue de la double intégrale, si l'on admet, pour un moment, que le coefficient M' demeure positif dans cette étendue, on pourra faire

$$M'x'-N' = \cos\varphi.\sqrt{(N'^2-E'M')};$$

ce qui donnera

$$\sqrt{[(ncG')^2+F'H']} = \sin\varphi.\sqrt{\left(\frac{N'^2-E'M'}{M'}\right)}.$$
$$F'y'-ncG' = \sin\varphi.\sqrt{\left(\frac{N'^2-E'M'}{M'}\right)},$$
$$dx' = \sqrt{\left(\frac{N'^2-E'M'}{M'}\right)}.\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{M'}} = d\varphi\sqrt{\left(\frac{(ncG')^2+H'F'}{M'}\right)}.$$

Ainsi, en faisant pour plus de simplicité

$$D' = \sqrt{(N'^2-E'M')},$$

et observant que

$$M'G' = M'(a+bx') = M'a+mbN'+mb.D'\cos\varphi,$$
$$M'a+mbN' = a(R^2+mh)F',$$

on aura

$$70.\quad M'x'-N' = D'\cos\varphi;$$

$$71.\quad F'y'-anc(R^2+mh)\frac{F'}{M'}-mnbc.\frac{D'}{M'}\cos\varphi = \frac{D'\sin\varphi}{\sqrt{M'}}.$$

Les expressions précédentes de M', N', E' donnent

$$D'^2 = F'\left\{\begin{matrix} F'(mab)^2+2(mnabc)^2-F'(R^2+h-a^2)(R^2+mh-m^2b^2) \\ +(mnbc)^2(R^2+h-a^2)+(nac)^2(R^2+mh-m^2b^2) \end{matrix}\right\}$$
$$= F'.\left\{\begin{matrix} F'(mab)^2+(mnbc)^2(R^2+h)+(nac)^2(R^2+mh) \\ -F'(R^2+h-a^2)(R^2+mh-m^2b^2) \end{matrix}\right\}$$

En substituant pour F' sa valeur $R^2+nh-n^2c^2$, dans le second facteur seulement, on trouvera

$$D' = D\sqrt{F'};$$

où l'on a fait pour plus de simplicité

$$72.\quad D^2 = a^2(R^2+mh)(R^2+nh)+m^2b^2(R^2+h)(R^2+nh) \\ +n^2c^2(R^2+h)(R^2+mh)-(R^2+h)(R^2+mh)(R^2+nh).$$

D'après cela, l'expression précédente de X peut être écrite ainsi:

$$63.\quad X = 2\iint \frac{M'^{\frac{1}{2}}R^2\,dR\,d\varphi}{M'^2+mP^2+nQ^2};$$

où l'on a fait:

$$\gamma.\quad \begin{cases} P = N'+D\sqrt{F'}.\cos\varphi = mab(R^2+nh)+D\sqrt{F'}.\cos\varphi; \\ Q = nac(R^2+mh)+\frac{mnbc.D}{\sqrt{F'}}\cos\varphi+D\sqrt{\frac{M'}{F'}}.\sin\varphi. \end{cases}$$

Les expressions de M', N', E' peuvent être mises sous cette forme,

$$74.\quad M' = (R^2+mh)(R^2+nh)-m^2b^2(R^2+nh)-n^2c^2(R^2+mh);$$

$$75.\quad N' = mab(R^2+nh);$$

$$76.\quad E' = (R^2+h)(R^2+nh)-n^2c^2(R^2+h)-a^2(R^2+nh).$$

Par le rapprochement des équations (72.) et (74.) on voit aussitôt, que

$$M'(R^2+h) = a^2(R^2+mh)(R^2+nh)-D^2;$$

c'est-à-dire que

$$77.\quad M' = \frac{a^2(R^2+mh)(R^2+nh)}{R^2+h}-\frac{D^2}{R^2+h}.$$

L'équation (72.) revient à dire, que

$$78.\quad D^2 = (R^2+h)(R^2+mh)(R^2+nh)\left[\frac{a^2}{R^2+h}+\frac{m^2b^2}{R^2+mh}+\frac{n^2c^2}{R^2+nh}-1\right].$$

Nous avons déjà fait remarquer, qu'on a $R^2=0$ sur la courbe de contact du cône circonscrit à l'ellipsoïde, et que la plus grande valeur de R^2 est la racine positive A' de l'équation (18.). Or il est manifeste, par le rapprochement des équations (18.) et (78.), qu'on a en même tems:

$$D^2 = 0,\qquad R^2 = A'.$$

Comme $x'=\cot p$, et $y'=\frac{\cot q}{\sin p}$ on voit par les équations (70.) et (71.), que les limites de φ sont $\varphi=0$ et $\varphi=2\pi$, tandis que celles de R sont $R=0$ et $R=\sqrt{A'}$.

Donc, l'équation (73.) étant écrite avec l'indication des limites des deux intégrations, devient

$$79.\quad X = 2\int_0^{\sqrt{A'}} M'^{\frac{1}{2}}R^2\,dR\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{M'^2+mP^2+nQ^2}.$$

L'équation (77.) démontre, que M' a une valeur positive lorsque $D^2 = 0$, ou bien $R^2 = A'$. En faisant $R^2 = 0$, on voit par l'équation (74.), que

$$M' = mnh(h - mb^2 - nc^2) = mnh(a^2 - k),$$

c'est-à-dire une quantité positive en supposant $a^2 > k$. Si on avait $a^2 < k$, la quantité M' deviendrait négative à la limite $R^2 = 0$: mais on peut faire abstraction de ce cas, et le résultat obtenu en supposant M' une quantité toujours positive s'appliquera, en vertu de sa forme, même au cas où l'on aurait $a^2 < k$.

La formule (79.) est celle que *Legendre* obtient à la page 472 du Volume cité plus haut. Avant d'aller plus loin on peut remarquer qu'en y faisant $D = 0$, et par conséquent

$$M' = \frac{a^2(R^2 + mh)(R^2 + nh)}{R^2 + h} \text{ (voyez l'équat. 77.),}$$

elle coïncide avec la formule (68.), si l'on admet en même tems, qu'on doit éliminer h, en y substituant pour h la fonction de R^2 résultante de la solution de l'équation $D = 0$ par rapport à la lettre h.

Comme on sait, que la formule (68.) est la véritable, dès qu'on prend R^2 pour variable, on a la certitude, que l'intégration par rapport à φ doit conduire au même résultat, en partant de la formule (79.). Si cette identité n'est pas évidente dans le résultat ainsi obtenu, cela tiendra à la circonstance qu'il doit coïncider avec celui qu'on obtient d'abord en faisant $D = 0$. Et souvent, dans le Calcul Intégral, il faut revenir à la formule même qui est soumise au signe de l'intégration, pour avoir moins difficilement les résultats relatifs aux cas particuliers dépendans d'une intégration moins compliquée.

Si on ne veut pas revenir de la sorte sur la formule primitive, il faut savoir *préparer* le résultat général de manière à pouvoir en conclure le cas particulier qu'on envisage. C'est ordinairement par un développement convenable, ordonné par rapport à la quantité qui doit être annulée, qu'on atteint le but. Cela revient à imiter le procédé dont *D'Alembert* a donné l'exemple dans le cas de l'intégration des équations linéaires à coefficiens constans, lorsque l'équation algébrique dont l'intégration dépend a des racines égales.

Legendre, qui voulait, à toute force, tirer de la formule (79.) le théorême de *Maclaurin* dans toute l'étendue dont il est susceptible, a conduit l'intégration de manière à mettre en évidence dans le résultat la

double propriété qu'il a: 1°. d'exiger la condition exprimée par l'équation $D=0$; 2°. d'être assujetti à la condition, que la quantité h doit être éliminée et remplacée par la fonction de R^2 tirée de l'équation $D=0$.

En suivant un procédé d'intégration différent de celui imaginé par *Legendre* on aurait un résultat, vrai en lui-même, mais sous une forme tellement différente qu'il serait très difficile d'y reconnaître cette double propriété.

Pour faire mieux sentir, en quoi cette difficulté consiste, considérons le cas particulier où le point attiré est placé dans le plan d'une des trois sections principales de l'ellipsoïde. Alors on peut faire $c=0$; ce qui réduit la formule (79.) à celle-ci:

$$X = 2\int_0^{\sqrt{A'}} R^2\,dR \int_0^{2\pi} \frac{M'^{\frac{1}{2}}\,d\varphi}{A+B\cos\varphi+C\cos^2\varphi};$$

où l'on a fait, pour plus de simplicité,

$$A = M'^2 + m^3 a^2 b^2 (R^2+nh)^2 + \frac{nM'D^2}{R^2+nh};$$
$$B = 2m^2 abD(R^2+nh)^{\frac{3}{2}};$$
$$C = mD^2(R^2+nh) - \frac{nM'D^2}{R^2+nh}.$$

Or, en exécutant l'intégration par rapport à φ (après avoir décomposé le coefficient de $d\varphi$ en deux fractions partielles), on obtient

$$\gamma'.\quad X = 4\pi\int_0^{\sqrt{A'}} \frac{M'^{\frac{1}{2}} R^2\,dR\,[A+C+\sqrt{((A+C)^2-B^2)}]}{\sqrt{((A+C)^2-B^2)}\sqrt{[(A+\sqrt{((A+C)^2-B^2)})^2-C^2)]}};$$

sans que rien puisse indiquer l'équivalence entre ce résultat et celui qu'on aurait en y faisant $D=0$, et éliminant ensuite h par sa valeur en R^2 tirée de cette équation.

Ce fait est d'autant plus remarquable que, si, au lieu de traiter la double intégrale entre les variables R^2 et φ on la traite avec les variables primitives p et q, il est possible de trouver pour X, dans le cas de $c=0$, une expression où le théorême de *Maclaurin* est rendu évident par la forme même du résultat, ainsi que cela se trouve démontré dans le Mémoire de *Legendre*. Dans le cas plus simple où l'on a à la fois, $c=0$, $b=0$, l'expression précédente de X devient à cause de $B=0$:

$$X = 4\pi\int_0^{\sqrt{A'}} \frac{M'^{\frac{1}{2}} R^2\,dR}{\sqrt{(A(A+C))}}.$$

Mais ici,

$$\begin{aligned} D^2 &= M'(a^2-R^2-h);\\ A &= M'^2\left[1+\frac{n(a^2-R^2h)}{R^2+nh}\right];\\ A+C &= M'[M'+m(R^2+nh)(a^2-R^2-h)];\\ M' &= (R^2+mh)(R^2+nh); \end{aligned}$$

partant

$$X = 4\pi\int_0^{\sqrt{A'}}\frac{R^2\,dR}{\sqrt{\{[R^2+nh+n(a^2-R^2-h)][R^2+mh+m(a^2-R^2-h)]\}}}$$

ou bien

$$X = 4\pi\int_0^{\sqrt{A'}}\frac{R^2\,dR}{\sqrt{\{[R^2(1-n)+na^2][R^2(1-m)+ma^2]\}}};$$

ce qui s'accorde avec le résultat connu.

Le paramètre h, qui disparaît ici fort simplement, doit aussi disparaître dans la formule (γ'.). Mais, pour cela, il faudrait pouvoir délivrer cette expression des facteurs communs au numérateur et au dénominateur. Alors on verrait qu'elle se réduit à une fonction des différences

$$m(R^2+nh)-n(R^2+mh);\quad m(R^2+h)-(R^2+mh);\quad n(R^2+h)-(R^2+nh).$$

Mais cette forme de l'expression de X n'est pas favorable pour apercevoir une telle réduction.

26. Voici par quels moyens ce but a été atteint. *Legendre* a d'abord remarqué, que l'intégrale de la formule (79.) relative à la variable φ demeure la même en y changeant φ en $\varphi+\varepsilon$; ε étant un angle constant. En effet; il est ici question d'une intégrale définie de la forme

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi+c\sin\varphi+e\sin2\varphi+f\cos2\varphi}=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{N}.$$

Or il est clair que, si, au lieu des limites 0 et 2π, on prend ε et $2\pi+\varepsilon$, on a $2\pi+\varepsilon$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{N}=\int_\varepsilon^{2\pi+\varepsilon}\frac{d\varphi}{N}.$$

Car, le dénominateur N prend, depuis 2π jusqu'à $2\pi+\varepsilon$ les mêmes valeurs qu'il a depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=\varepsilon$. Cela posé, faisons $\varphi=\psi+\varepsilon$, il viendra

$$\int_\varepsilon^{2\pi+\varepsilon}\frac{d\varphi}{N}=\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{a+b\cos(\psi+\varepsilon)+c\sin(\psi+\varepsilon)+e\sin(2\psi+2\varepsilon)+f\cos(2\psi+2\varepsilon)}.$$

Actuellement, rien n'empêche d'écrire Φ au lieu de ψ; ce qui rend la valeur primitive de $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{N}$ égale à celle qui a lieu, entre les mêmes limites, après avoir remplacé Φ par $\Phi+\varepsilon$.

D'après cela on peut remplacer, sous le signe intégral, P et Q par

$$P = mab(R^2+nh)+\frac{D\sqrt{F'}}{\sqrt{(1+\tang^2\varepsilon)}}[\cos\Phi-\sin\Phi.\tang\varepsilon];$$

$$Q = nac(R^2+mh)+\frac{D\sqrt{F'}}{\sqrt{(1+\tang^2\varepsilon)}}[mnbc+\sqrt{M'}.\tang\varepsilon]\cos\Phi$$
$$-\frac{D\sqrt{F'}}{F'\sqrt{(1+\tang^2\varepsilon)}}[mnbc.\tang\varepsilon-\sqrt{M'}]\sin\Phi.$$

Actuellement, si l'on fait

$$\tang\varepsilon = \frac{A}{B}\sqrt{M'}$$

(A et B étant deux quantités qui seront déterminées dans un moment) on aura

$$P = mab(R^2+nh)+\frac{DB\sqrt{F'}}{\sqrt{(B^2+M'A^2)}}\left[\cos\Phi-\sqrt{M'}.\frac{A}{B}\sin\Phi\right];$$

$$Q = nac(R^2+mh)+\frac{DB\sqrt{F'}}{F'\sqrt{(B^2+M'A^2)}}\left[mnbc+M'\frac{A}{B}\right]\cos\Phi$$
$$-\frac{DB\sqrt{F'}}{F'\sqrt{(B^2+M'A^2)}}\left[\frac{mnbc.A\sqrt{M'}}{B}-\sqrt{M'}\right]\sin\Phi.$$

Maintenant on voit qu'il convient de prendre

$$A = nc,\qquad B = mb(R^2+nh).$$

De là on tire

$$mnbc.B+M'A = nc(R^2+nh-n^2c^2)(R^2+mh) = ncF'(R^2+mh);$$
$$mnbc.A-B \;= mb(n^2c^2-nh-R^2) = -mb.F';$$

et par conséquent

$$P = mab(R^2+nh)+[mb(R^2+nh)\cos\Phi-nc\sqrt{M'}.\sin\Phi]D\sqrt{\left(\frac{F'}{B^2+M'A^2}\right)};$$

$$Q = nac(R^2+mh)+[nc(R^2+mh)\cos\Phi+mb\sqrt{M'}.\sin\Phi]D\sqrt{\left(\frac{F'}{B^2+M'A^2}\right)}.$$

D'après l'équation (74.), on a

$$B^2+M'A^2 = F'[m^2b^2(R^2+nh)+n^2c^2(R^2+mh)];$$

donc en faisant

$$80.\quad U^2 = m^2b^2(R^2+nh)+n^2c^2(R^2+mh);$$

$$81.\quad M' = T^2 = (R^2+mh)(R^2+nh)-U^2$$
$$= \frac{a^2(R^2+mh)(R^2+nh)}{R^2+h}-\frac{D^2}{R^2+h};$$

on aura

$$82.\quad P = mb(R^2+nh)\left(a+\frac{D}{U}\cos\Phi\right)-\frac{DT}{U}nc.\sin\Phi;$$

$$83.\quad Q = nc(R^2+mh)\left(a+\frac{D}{U}\cos\Phi\right)+\frac{DT}{U}mb.\sin\Phi;$$

$$84.\quad X = 2\int_0^{\sqrt{A'}} T^3R^2\,dR\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{T^4+mP^2+nQ^2}.$$

En posant, pour plus de simplicité,

$$\alpha = m^3b^2(R^2+nh)^2+n^3c^2(R^2+mh)^2;$$
$$\beta = mn(mb^2+nc^2)T^2;$$
$$\gamma = 2mnbc(n-m)R^2T;$$

il viendra

$$T^4+mP^2+nQ^2$$
$$= T^4+\alpha\left(a+\frac{D}{U}\cos\Phi\right)^2+\beta\frac{D^2}{U^2}\sin^2\Phi+\gamma\left(a+\frac{D}{U}\cos\Phi\right).\frac{D}{U}\sin\Phi.$$

On ne peut pas dire absolument, que ces dernières expressions de P et Q soient plus simples que les primitives; mais elles sont plus symétriques dans leur forme, et cela peut contribuer à donner lieu, dans le résultat de l'intégration, à des simplifications qui, autrement ne seraient pas aperçues. Toutefois, il est permis de croire, que *Legendre* n'a pas vu *a priori* un tel avantage, et que c'est seulement après des essais justifiés par des calculs ultérieurs, qu'il a donné la préférence à la formule (84.) sur la formule (79.). Un récit naïf des tâtonnements de ce genre serait fort instructif; mais, par des motifs difficiles à deviner, il est rare de rencontrer dans les écrits des grands géométres des exemples comparables à ceux qui nous frappent en lisant les ouvrages d'*Euler*.

Au reste, la formule (79.) a aussi ses avantages. Par exemple, dans le cas particulier où le point attiré serait placé sur le prolongement de l'axe des a, on aurait $b=0$, $c=0$; ce qui introduit dans les formules (82.), (83.) l'expression zéro divisé par zéro. Au contraire, les expressions de P et Q qu'on voit dans le second membre des équations (γ.) trouvées dans le No. précédent, donnent

$$P^2 = D^2F'.\cos^2\Phi;\qquad Q^2 = D^2.\frac{M'}{F'}\sin^2\Phi;$$

où on doit faire

$$M' = (R^2+mh)(R^2+nh);\quad D^2 = M'(a^2-R-h);\quad F' = R^2+nh.$$

De sorte qu'on a

$$P^2 = M'(R^2+nh)(a^2-R^2-h)\cos^2\Phi,$$
$$Q^2 = M'(R^2+mh)(a^2-R^2-h)\sin^2\Phi.$$

En introduisant ces valeurs dans la formule (79.), et faisant pour un moment

$$\alpha = M' + (a^2 - R^2 - h)\left[mnh + \frac{(m+n)}{2} R^2\right];$$

$$\beta = (a^2 - R^2 - h)\left(\frac{m-n}{2}\right) R^2$$

il viendra,

$$X = 2\int_0^{\sqrt{A'}} R^2\, dR \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{M'} . 2\, d\varphi}{\alpha + \beta \cos 2\varphi}:$$

d'où l'on tire, en exécutant l'intégration par rapport à φ:

$$X = 4\pi \int_0^{\sqrt{A'}} \frac{\sqrt{M'} . R^2\, dR}{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}}.$$

La formule (16.) donne $h = a^2 - k$: partant

$$\alpha + \beta = M' + mnh(k - R^2) + (k - R^2) m R^2;$$
$$\alpha - \beta = M' + mnh(k - R^2) + (k - R^2) n R^2;$$

ou bien

$$\alpha + \beta = M' + m(k - R^2)(R^2 + nh),$$
$$\alpha - \beta = M' + n(k - R^2)(R^2 + mh).$$

Donc l'expression précédente de X donne, après avoir substitué pour M sa valeur:

$$X = 4\pi \int_0^{\sqrt{A'}} \frac{R^2\, dR}{\sqrt{\{[R^2 + mh + m(k - R^2)][R^2 + nh + n(k - R^2)]\}}};$$

ou bien à cause de $a^2 = h + k$:

$$X = \frac{4\pi}{\sqrt{(mn)}} \int_0^{\sqrt{A'}} \frac{R^2\, dR}{\sqrt{\left\{\left[a^2 - R^2\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right]\left[a^2 - R^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]\right\}}}.$$

L'équation (18.) donne dans le cas actuel $a^2 = A' + h$, c'est-à-dire $A' = k = a_1^2$. Ainsi en faisant $R = a_1 x$ obtient

$$X = 4\pi a_1 b_1 c_1 \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{\{[a^2 + (b_1^2 - a_1^2)x^2][a^2 + (c_1^2 - a_1^2)x^2]\}}};$$

ce qui s'accorde avec les formules (L.) posées au commencement du No. 12. Mais il faut bien observer, que cette formule est ainsi trouvée directement, *sans* l'emploi du théorême de *Maclaurin*. Or cela n'est pas facile en opérant autrement. *Lagrange* même s'est contenté (Voyez Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1775, p. 273) de démontrer, pour ce cas, le théorême de *Maclaurin*, sans faire voir, comment on pouvait *a priori* réduire aux transcendantes elliptiques son expression de X qu'il obtient à la page 276. La complication de cette formule offre un contraste frappant, lorsqu'on la rapproche de celle que nous venons de trouver.

La seule inspection de la formule (84.) rend manifeste la possibilité de l'intégration relative à φ: mais elle exige, que le dénominateur $T^4 + mP^2 + nQ^2$ soit décomposé effectivement, en deux facteurs de la forme

$$(A_1 + B_1 \cos\varphi + C_1 \sin\varphi)(A'_1 + B'_1 \cos\varphi + C'_1 \sin\varphi);$$

et cette opération, qui parait facile, demande une adresse, dont *Legendre* était peut-être le seul homme capable, pour être conduite de manière à pouvoir lire dans le résultat la propriété qu'on veut démontrer.

27. Avant tout j'observe, qu'en faisant pour un moment:

$$a + \frac{D}{U}\cos\varphi = x, \qquad \frac{D}{U}\sin\varphi = y,$$

la fonction $T^4 + mP^2 + nQ^2$ prend la forme

$$A + Bx^2 + Cy^2 + Exy.$$

En multipliant les deux facteurs

$$.(\alpha + \beta x + \gamma y)\left(1 + \beta' x - \frac{\gamma}{\alpha} y\right)$$

on obtient

$$\alpha + (\beta + \alpha\beta')x + \beta\beta' x^2 + \left(\beta'\gamma - \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)xy - \frac{\gamma^2}{\alpha}y^2;$$

c'est-à-dire un produit qui ne peut devenir comparable à la fonction $A + Bx^2 + Cy^2 + Exy$, sans poser l'équation

$$\beta + \alpha\beta' = 0.$$

Mais, alors on aurait seulement disponibles les deux coefficients α et γ; et il serait impossible de satisfaire aux trois équations fournies par l'égalité des trois coefficients de x^2, xy, y^2. *Legendre* surmonte cette difficulté par l'artifice suivant. Il observe d'abord, que

$$x^2 + y^2 = \left(a + \frac{D}{U}\cos\varphi\right)^2 + \frac{D^2}{U^2}\sin^2\varphi = a^2 + \frac{D^2}{U^2} + 2a\frac{D}{U}\cos\varphi,$$

ou bien

$$x^2 + y^2 = a^2 + \frac{D^2}{U^2} + 2a\left(a + \frac{D}{U}\cos\varphi\right) - 2a^2:$$

de sorte qu'on a l'équation

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - \frac{D^2}{U^2}.$$

En remplaçant M' par T^2, l'équation (77.) donne

$$D^2 = a^2(R^2 + mh)(R^2 + nh) - (R^2 + h)T^2;$$

et l'équation (81.) donne

$$a^2U^2 = a^2(R^2 + mh)(R^2 + nh) - a^2T^2,$$

$$85. \quad a^2 - \frac{D^2}{U^2} = \frac{a^2U^2 - D^2}{U^2} = \frac{T^2}{U^2}(R^2 + h - a^2).$$

Donc nous avons l'équation

$$x^2+y^2-2ax+\frac{T^2}{U^2}(R^2+h-a^2) = 0.$$

Ainsi, rien n'empêche d'ajouter cette quantité nulle, multipliée par un coefficient indéterminé H, un trinome $T^4+mP^2+nQ^2$: alors, en remplaçant P et Q par leurs valeurs fournies par les équations (82.), (83.), on aura

$$\begin{aligned}
&T^4+mP^2+nQ^2+H(x^2+y^2)-2aHx+H\frac{T^2}{U^2}(R^2+h-a^2)\\
&= T^4+H\frac{T^2}{U^2}(R^2+h-a^2)-2aH\left(a+\frac{D}{U}\cos\Phi\right)\\
&\quad+[H+m^3b^2(R^2+nh)^2+n^3c^2(R^2+mh)^2]\left(a+\frac{D}{U}\cos\Phi\right)^2\\
&\quad+[H+mn(mb^2+nc^2)T^2]\frac{D^2}{U^2}\sin^2\Phi\\
&\quad-2mnbc(m-n)TR^2\left(a+\frac{D}{U}\cos\Phi\right)\frac{D}{U}\sin\Phi.
\end{aligned}$$

Cette expression étant de la forme

$$\begin{aligned}
&A-2aH\left(a+\frac{D}{U}\cos\Phi\right)+B\left(a+\frac{D}{U}\cos\Phi\right)^2\\
&\quad+E\frac{D^2}{U^2}\sin^2\Phi-2G\left(a+\frac{D}{U}\cos\Phi\right)\frac{D}{U}\sin\Phi,
\end{aligned}$$

on peut la supposer égale au produit de ces deux facteurs:

$$A+AV\left(a+\frac{D}{U}\cos\Phi\right)+AV'\frac{D}{U}\sin\Phi,$$

$$1-\left(V+\frac{2aH}{A}\right)\left(a+\frac{D}{U}\cos\Phi\right)-V'\frac{D}{U}\sin\Phi:$$

il suffit pour cela d'établir les équations

$$B=-V(AV+2aH),\quad E=-AV',\quad G=AVV'+aHV',$$

et d'en tirer les valeurs de V, V', H.

Comme

$$A = T^4+\frac{HT^2}{U^2}(R^2+h-a^2),$$

il convient de prendre

$$H = -\frac{U^2T^2}{Z}:$$

alors Z sera la nouvelle indéterminée qui remplace H. Par la substitution de cette valeur de H on a donc

$$A = \frac{T^4}{Z}(Z-R^2-h+a^2);$$

$$B+\frac{V^2T^4}{Z}(Z-R^2-h+a^2)=\frac{2aU^2T^2V}{Z};$$

$$E+\frac{V'^2T^4}{Z}(Z-R^2-h+a^2)=0;$$

$$\frac{VV'T^4}{Z}(Z-R^2-h+a^2)-\frac{aV'U^2T^2}{Z}=G;$$

ou bien en remplaçant B, E, G par leurs valeurs:

$$m^3b^2(R^2+nh)^2+n^3c^2(R^2+mh)^2-\frac{U^2T^2}{Z}+\frac{V^2T^4}{Z}(Z-R^2-h+a^2)$$
$$=\frac{2aU^2T^2V}{Z},$$

$$mn(mb^2+nc^2)T^2-\frac{U^2T^2}{Z}+\frac{V^2T^4}{Z}(Z-R^2-h+a^2)=0,$$

$$\frac{VV'T^4}{Z}(Z-R^2-h+a^2)-\frac{aV'U^2T^2}{Z}=(m-n)mnbcTR^2,$$

l'équation (80.) donne

$$U^2-mn(mb^2+nc^2)Z=-m^2b^2(nZ-R^2-nh)-n^2c^2(mZ-R^2-mh);$$

donc en faisant pour plus de simplicité:

$$\beta.\quad\left\{\begin{array}{l}\lambda=R^2+h\\ \mu=R^2+mh\\ \nu=R^2+nh\end{array}\right\},\qquad\beta\quad\left\{\begin{array}{l}L=\ \ Z-\lambda\\ M=mZ-\mu\\ N=nZ-\nu\end{array}\right\},$$

les trois équations précédentes pourront être écrites ainsi:

$$86.\quad V^2T_2^2(L+a^2)-U^2T^2-2aVU^2T^2+m^3b^2\nu^2Z+n^3c^2\mu^2Z=a,$$

$$87.\quad V'^2T^2(L+a^2)+m^2b^2N+n\ c^2M=0,$$

$$88.\quad VV\ T^3(L+a^2)-aV'U^2T-mnbc(m-n)ZR^2=0.$$

Maintenant, si l'on fait

$$V''=-V-\frac{2aH}{A}=-V+\frac{2aU^2}{T^2(L+a^2)},$$

on aura, en tirant la valeur de V de l'équation (88.):

$$V=\frac{1}{T^2(L+a^2)}\left[aU^2+\frac{mnbc(m-n)R^2Z}{TV'}\right],$$

$$V''=\frac{1}{T^2(L+a^2)}\left[aU^2-\frac{mnbc(m-n)R^2Z}{TV'}\right].$$

Sur cela j'observe, que

$$(m-n)R^2Z=(R^2+nh)M-(R^2+mh)N=\nu M-\mu N;$$

ainsi on peut écrire

$$89.\quad V=\frac{1}{T^2(L+a^2)}\left[aU^2+\frac{mnbc(\nu M-\mu N)}{V'T}\right],$$

$$90.\quad V''=\frac{1}{T^2(L+a^2)}\left[aU^2-\frac{mnbc(\nu M-\mu N)}{V'T}\right].$$

Cela posé je remarque, que l'expression précédente de V'' donne

$$VV'' = -V^2 + \frac{2aVU^2}{T^2(L+a^2)};$$

d'où l'on tire

$$V^2T^4(L+a^2) - 2aVU^2T^2 = -VV''T^4(L+a^2);$$

donc l'équation (86.) est équivalente à celle-ci:

$$VV''T^4(L+a^2) + U^2T^2 = Z.m^2b^2\nu^2 + Z.n^2c^2\mu^2.$$

En substituant pour T^2 sa valeur fournie par l'équation (81.), nous aurons

$$VV''T^4(L+a^2) - U^4 = M.m^2b^2\nu^2 + N.n^2c^2\mu^2.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $L+a^2$, il viendra

91. $$VV''T^4(L+a^2)^2 - a^2U^4 = LU^4 + (L+a^2)[M.m^2b^2\nu^2 + N.n^2c^2\mu^2].$$

Les équations (89.) et (90.) donnent

$$VV''T^4(L+a^2)^2 - a^2U^4 = -\frac{(mnbc)^2(L+a^2)[M\nu - N\mu]^2}{V'T^2(L+a^2)};$$

et en vertu de l'équation (87.) on peut écrire

92. $$VV''T^4(L+a^2)^2 - a^2U^4 = \frac{(mnbc)^2(L+a^2)[M\nu - N\mu]^2}{m^2b^2N + n^2c^2M}.$$

Donc en égalant les deux membres des équations (91.) et (92.) il viendra

$$LU^4 + (L+a^2)[M.m^2b^2\nu^2 + N.n^2c^2\mu^2] = \frac{(mnbc)^2(L+a^2)[M\nu - N\mu]^2}{m^2b^2N + n^2c^2M};$$

d'où l'on tire

$$0 = LU^4(m^2b^2N + n^2c^2M) + (L+a^2)\left\{\begin{matrix}(M.m^2b^2\nu^2 + N.n^2c^2\mu^2)(m^2b^2N + n^2c^2M) \\ -(mnbc)^2(M\nu - N\mu)^2\end{matrix}\right\};$$

ou bien

$$0 = LU^4(m^2b^2N + n^2c^2M) + MN(L+a^2)[m^4b^4\nu^2 + n^4c^4\mu^2 + 2(mnbc)^2\mu\nu].$$

En rapprochant cette équation de l'équation (80.), on voit aussitôt qu'elle est divisible par U^4, de sorte qu'on a

93. $$0 = m^2b^2LN + n^2c^2LM + MN(L+a^2).$$

Maintenant, si l'on combine cette équation avec l'équation (87.) multipliée par L, on voit aussitôt, que

$$V'T^2L = MN;$$

d'où l'on tire

96. $$V'T = \sqrt{\left(\frac{MN}{L}\right)}.$$

Donc les équations (89.) et (90.) sont équivalentes à celles-ci:

$$95.\quad V = \frac{1}{T^2(L+a^2)}\left[aU^2 + mnbc(M\nu - N\mu)\sqrt{\left(\frac{L}{MN}\right)}\right],$$

$$96.\quad V'' = \frac{1}{T^2(L+a^2)}\left[aU^2 - mnbc(M\nu - N\mu)\sqrt{\left(\frac{L}{MN}\right)}\right].$$

Il résulte de tout ce que nous venons d'exposer, que dans la formule (84.) on peut remplacer

$$T^4 + mP^2 + nQ^2$$

par le produit de ces trois facteurs:

$$\frac{(L+a^2)}{Z}\left[T^2 + VT^2\left(a + \frac{D}{U}\cos\phi\right) + \frac{DT}{U}\sqrt{\left(\frac{MN}{L}\right)}\sin\phi\right]$$
$$\left[T^2 + V''T^2\left(a + \frac{D}{U}\cos\phi\right) - \frac{DT}{U}\sqrt{\left(\frac{MN}{L}\right)}\sin\phi\right];$$

où les coefficients sont des fonctions de la quantité Z, laquelle est censée déterminée par l'équation (93.).

De sorte que la formule (84.) est équivalente à celle-ci:

$$97.\quad X = 2\int_0^{\sqrt{A'}} \frac{T^3 Z R^2 dR}{L+a^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(p + q\cos\varphi + r\sin\varphi)(p' + q'\cos\varphi - r\sin\varphi)},$$

en posant pour plus de simplicité

$$p = T^2 + aVT^2;\quad q = VT^2.\frac{D}{U};\quad r = \frac{DT}{U}\sqrt{\left(\frac{MN}{L}\right)};$$
$$p' = T^2 + aV''T^2;\quad q' = V''T^2.\frac{D}{U}.$$

28. L'équation (93.) étant la base fondamentale du calcul qui va suivre, il convient de faire sur elle quelques remarques afin d'en éclairer la marche. D'abord, en divisant tous les termes de cette équation par le produit MNL on la change en celle-ci:

$$98.\quad 0 = 1 + \frac{a^2}{L} + \frac{m^2b^2}{M} + \frac{n^2c^2}{N}.$$

Actuellement, si l'on L, M, N par leurs valeurs données par les équations (β.) et (β'.) posées dans le Numéro précédent, on aura

$$99.\quad \frac{a^2}{R^2+(h-Z)} + \frac{m^2b^2}{R^2+m(h-Z)} + \frac{n^2c^2}{R^2+n(h-Z)} = 1.$$

Or, c'est un caractère inhérent à la forme de cette équation, celui de donner l'expression du binome $h-Z$, et non celle de la quantité Z isolément. De sorte qu'on doit regarder $h-Z$, et par conséquent

$$L = (Z-h) - R^2,\quad M = m(Z-h) - R^2,\quad N = n(Z-h) - R^2$$

comme autant de fonctions de R^2 *indépendantes* du paramètre représenté par la lettre h. D'après cela, il est clair, que toute fonction de L, M, N

acquerra la même valeur et la même forme, soit en y substituant pour $h-Z$ la fonction de R^2, m, n, a, b, c tirée de l'équation (99.), soit en y faisant d'abord $Z=0$, et remplaçant ensuite h par sa valeur tirée de l'équation

$$100. \quad \frac{a^2}{R^2+h}+\frac{m^2b^2}{R^2+mh}+\frac{n^2c^2}{R^2+nh}=1.$$

Donc, si on parvient à démontrer, que le résultat de l'intégration par rapport à φ de la formule (97.) est réductible à la forme

$$X=2\int_0^{\sqrt{A'}} R^2\,dR \text{ fonct.}(L, M, N),$$

il sera démontré que son existence est liée à la condition exprimée par l'équation

$$D^2=0,$$

puisque l'équation (100.) détruit le second membre de l'équation (78.). Quel que soit le resultat obtenu en opérant sur la formule (97.), s'il est subordonné à l'équation $D^2=0$, il doit nécessairement coïncider ave celui de la formule (68.), ainsi que nous l'avons avancé dans le No. 25. Le but du pénible calcul que nous allons exécuter sera donc dirigé de manière à faire voir, que le produit

$$\frac{T^3Z}{L+a^2}\int\frac{d\varphi}{(p+q\cos\varphi+r\sin\varphi)(p'+q'\cos\varphi-r\sin\varphi)}$$

est, en dernière analyse, une fonction de L, M, N, et des cinq paramètres m, n, a, b, c. Si ce résultat, par son excessive complication, ne paraît pas réductible à la forme de la formule (68.), il faudra en conclure qu'il reste ici une difficulté de pure algèbre à surmonter: mais cette difficulté est isolée, et ne saurait infirmer la démonstration qui concerne l'expression de l'attraction de l'ellipsoïde.

29. Poursuivons maintenant notre calcul, en faisant

$$\sin\varphi=\frac{2z}{1+z^2},\quad \cos\varphi=\frac{1-z^2}{1+z^2},\quad d\varphi=\frac{2dz}{1+z^2};$$

$$A_2=T^2+V'T^2\left(a+\frac{D}{U}\right);\qquad B_2=T^2+V''T^2\left(a+\frac{D}{U}\right),$$

$$A_3=T^2+VT^2\left(a+\frac{D}{U}\right);\qquad B_3=T^2+VT^2\left(a-\frac{D}{U}\right);$$

$$C_2=\frac{DT}{U}\sqrt{\frac{MN}{L}};$$

ce qui changera la formule (97.) en celle-ci:

$$X=2\int_0^{\sqrt{A'}}\frac{ZT^3R^2dR}{L+a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2dz(1+z^2)}{(A_2-2C_2z+B_2z^2)(A_3+2C_2z+B_3z^2)}.$$

Cela posé si l'on fait

$$A_2 - 2C_2 z + B_2 z^2 = Z_1; \quad A_3 + 2C_2 z + B_3 z^2 = Z_2,$$

et ensuite

$$\frac{2(1+z^2)}{Z_1 Z_2} = \frac{\alpha + \beta z}{Z_1} + \frac{\alpha' + \beta' z}{Z_2},$$

on aura

$$2\int \frac{(1+z^2)\,dz}{Z_1 Z_2}$$

$$= \left(\alpha + \beta \frac{C_2}{B_2}\right)\int \frac{dz}{Z_1} + \left(\alpha' - \beta' \frac{C_2}{B_3}\right)\int \frac{dz}{Z_2} + \frac{\beta}{2B_2}\log Z_1 + \frac{\beta'}{2B_3}\log Z_2;$$

d'où l'on tire

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(1+z^2)\,dz}{Z_1 Z_2} = \frac{\pi\left(\alpha + \beta \frac{C_2}{B_2}\right)}{\sqrt{(A_2 B_2 - C_2^2)}} + \frac{\pi\left(\alpha' - \beta' \frac{C_2}{B_3}\right)}{\sqrt{(A_3 B_3 - C_2^2)}}.$$

L'expression précédente de X revient donc à dire, que

$$102. \quad X = 2\pi \int_0^{\sqrt{A'}} \frac{Z T^3 R^2\, dR \left(\alpha + \beta \frac{C_2}{B_2}\right)}{(L + a^2)\sqrt{(A_2 B_2 - C_2^2)}}$$

$$+ 2\pi \int_0^{\sqrt{A'}} \frac{Z T^3 R^2\, dR \left(\alpha' - \beta' \frac{C_2}{B_3}\right)}{(L + a^2)\sqrt{(A_3 B_3 - C_2^2)}}.$$

Les équations par lesquelles on doit déterminer les quatre coefficients α, β, α', β' étant

$$2C_2(\alpha - \alpha') + A_3\beta + A_2\beta' = 0; \quad 2C_2(\beta - \beta') + B_3\alpha + B_2\alpha' = 2;$$

$$B_3\beta + B_2\beta' = 0; \quad A_3\alpha + A_2\alpha' = 2;$$

si l'on fait, pour plus de simplicité:

$$\Delta = (A_3 B_2 - A_2 B_3)^2 + 4C_2^2 (A_2 + A_3)(B_2 + B_3),$$

on en tire sans difficulté:

$$\alpha = \frac{8C_2^2(B_2 + B_3) + 2(B_2 - A_2)(A_3 B_2 - A_2 B_3)}{\Delta};$$

$$\beta = \frac{4B_2 C_2 (A_2 + A_3 - B_2 - B_3)}{\Delta};$$

$$\alpha' = \frac{2}{A_2} - \alpha . \frac{A_3}{A_2};$$

$$\beta' = -\beta . \frac{B_3}{B_2}.$$

Maintenant, si l'on fait

$$\Omega = 4C_2^2 (A_2 + A_3 + B_2 + B_3) + 2(B_2 - A_2)(A_3 B_2 - A_2 B_3);$$

$$\Omega' = 4C_2^2 (A_2 + A_3 + B_2 + B_3) - 2(B_3 - A_3)(A_3 B_2 - A_2 B_3);$$

la formule (102.) deviendra

$$103. \quad X = 2\pi \int_0^{\sqrt{A'}} \frac{Z T^2 R^2 dR}{(L+a^2)\sqrt{(A_2 B_2 - C_2^2)}} \cdot \frac{\Omega}{\Delta} + 2\pi \int_0^{\sqrt{A'}} \frac{Z T^2 R^2 dR}{(L+a^2)\sqrt{(A_3 B_3 - C_2^2)}} \cdot \frac{\Omega'}{\Delta}.$$

Pour nous rapprocher des dénominations de *Legendre*, nous ferons

$$V = \frac{aU^2}{L+a^2},$$

$$S = -\frac{mnbcZ(nM-mN)}{L+a^2}\sqrt{\left(\frac{L}{MN}\right)};$$

ce qui donnera

$$A_2 = T^2 + (V+S)\left(a+\frac{D}{U}\right), \qquad A_3 = T^2 + (V-S)\left(a+\frac{D}{U}\right),$$

$$B_2 = T^2 + (V+S)\left(a-\frac{D}{U}\right), \qquad B_3 = T^2 + (V-S)\left(a-\frac{D}{U}\right),$$

$$C_2 = \frac{DT}{U}\sqrt{\left(\frac{MN}{L}\right)}.$$

Il est presque superflu d'avertir, que la lettre V a ici une signification différente de celle qu'elle avait dans le Nos. précédens.

Les équations (80.), (81.) et (85.) donnent

$$U^2 = m^2 b^2 \nu + n^2 c^2 \mu, \quad T^2 = \mu\nu - U^2, \quad \frac{D^2}{U^2} = a^2 + \frac{T^2}{U^2}(a^2 - \lambda).$$

Cela posé, voici le calcul des différentes parties qui composent le second membre de l'équation (103).

30. D'après ces formules, on a

$$\begin{aligned}
& A_2 B_2 - C_2^2 \\
&= [T^2 + a(V+S)]^2 - \frac{D^2}{U^2}(V+S)^2 - \frac{T^2 D^2}{U^2}\cdot\frac{MN}{L} \\
&= T^4 + 2aT^2(V+S) + \left(a^2 - \frac{D^2}{U^2}\right)(V+S)^2 - \frac{T^2 D^2}{U^2}\cdot\frac{MN}{L} \\
&= T^2\left\{T^2 + 2a(V+S) - \frac{(a^2-\lambda)}{U^2}(V+S)^2 - \frac{D^2}{U^2}\cdot\frac{MN}{L}\right\} \\
&= T^2\left\{T^2 + 2a(V+S) - \frac{(a^2-\lambda)}{U^2}(V+S)^2 - \frac{MN}{L}\left[a^2 + (a^2-\lambda)\frac{T^2}{U^2}\right]\right\} \\
&= T^2\left\{\begin{matrix} T^2 + 2aV - \frac{(a^2-\lambda)}{U^2}V^2 - \frac{(a^2-\lambda)}{U^2}S^2 \\ + 2aS\left[1 - \frac{(a^2-\lambda)V}{aU^2}\right] - \frac{MN}{L}\left[a^2 + (a^2-\lambda)\frac{T^2}{U^2}\right]\end{matrix}\right\}.
\end{aligned}$$

Comme $T^2 = \mu\nu - U^2$: en substituant cette valeur dans le second facteur seulement, il viendra

$$A_2B_2 - C_2^2 = T^2 \left\{ \begin{array}{l} \mu\nu - U^2 + \frac{2a^2U^2}{L+a^2} - \frac{(a^2-\lambda)a^2U^2}{(a^2+L)^2} - \frac{(a^2-\lambda)S^2}{U^2} \\ + 2aS\left[1 - \frac{V(a^2-\lambda)}{aU^2}\right] - \frac{MN}{L}\left[\lambda + (a^2-\lambda)\frac{\mu\nu}{U^2}\right] \end{array} \right\}.$$

Si l'on observe maintenant, que $\lambda = Z - L$, on aura

$$-U^2 + \frac{2a^2U^2}{L+a^2} - \frac{(a^2+L-Z)a^2U^2}{(a^2+L)^2} = -\frac{LU^2}{a^2+L} + \frac{Za^2U^2}{(a^2+L)^2};$$

$$2aS\left[1 - \frac{V(a^2-\lambda)}{aU^2}\right] = \frac{2aS.Z}{L+a^2} = -\frac{2mnabcZ^2(nM-mN)}{(L+a^2)^2}\sqrt{\left(\frac{L}{MN}\right)};$$

partant, en posant

$$A_2B_2 - C_2^2 + \frac{T^2.2mnabcZ^2(nM-mN)}{(L+a^2)^2}\sqrt{\left(\frac{L}{MN}\right)} = \Pi;$$

nous avons,

$$\Pi = T^2\left\{\mu\nu - \frac{LU^2}{L+a^2} + \frac{Za^2U^2}{(L+a^2)^2} - \frac{(a^2-\lambda)S^2}{U^2} - \frac{MN}{L}\left[\lambda + (a^2-\lambda)\frac{\mu\nu}{U^2}\right]\right\};$$

ou bien, à cause de $\lambda = Z - L$:

$$\Pi = T^2 \left\{ \begin{array}{l} \mu\nu - \frac{LU^2}{L+a^2} + \frac{a^2ZU^2}{(L+a^2)^2} - (a^2+L-Z)\frac{S^2}{U^2} \\ - Z\frac{MN}{L} + MN - \frac{MN}{L}(a^2+L-Z)\frac{\mu\nu}{U^2} \end{array} \right\}.$$

D'après les équations (β'.) on peut écrire

$$104. \quad U^2 = Z(m^2b^2.n + n^2c^2.m) - m^2b^2.N - n\,c^2.M,$$

et en substituant pour $m^2b^2N + n^2c^2M$ la valeur fournie par l'équation (93.), il viendra

$$105. \quad U^2 = Z(nk^2 + ml^2) + \frac{MN}{L}(a^2+L)$$

en faisant (comme *Legendre*)

$$k = mb, \quad l = nc.$$

Ainsi, on a

$$\Pi = T^2 \left\{ \begin{array}{l} \mu\nu - \frac{LZ(nk^2+ml^2)}{L+a^2} + \frac{a^2z^2(nk^2+ml^2)}{(L+a^2)^2} \\ + \frac{a^2Z\frac{MN}{L}}{a^2+L} - Z\frac{MN}{L} - \frac{MN}{L}(a^2+L-Z)\frac{\mu\nu}{U^2} \\ -(a^2+L-Z)\frac{S^2}{U^2} \end{array} \right\},$$

et en remplaçant S^2 par sa valeur, il viendra

$$\Pi = T^2 \left\{ \begin{array}{l} \mu\nu - \frac{LZ(nk^2+ml^2)}{L+a^2} + a^2Z^2(nk^2+ml^2) + \frac{a^2Z\frac{MN}{L}}{L+a^2} \\ -Z\frac{MN}{L} - \frac{MN}{L}(a^2+L-Z)\frac{\mu\nu}{U^2} \\ -\frac{(a^2+L-Z)Z^2.k^2l^2(nM-mN)^2}{(a^2+L)^2U^2\frac{MN}{L}} \end{array} \right\};$$

ou bien

$$\Pi = T^2 \left\{ \begin{array}{l} \mu\nu - \frac{LZ(nk^2+ml^2)}{L+a^2} + \frac{a^2Z^2(nk^2+ml^2)}{(L+a^2)^2} - \frac{Z.MN}{L+a^2} \\ -\frac{MN}{L}(a^2+L-Z)\frac{\mu\nu}{U^2} - \frac{(a^2+L-Z)k^2l^2Z^2(nM-mN)^2}{(a^2+L)^2U^2\frac{MN}{L}} \end{array} \right\}.$$

Maintenant si l'on écrit

$$(\mu\nu - MN) + MN$$

au lieu de $\mu\nu$, on aura en ayant égard à l'équation (105.)

$$\begin{aligned} \mu\nu - \frac{MN}{L}(a^2+L-Z)\frac{\mu\nu}{U^2} &= (\mu\nu-MN) - (\mu\nu-MN)\frac{MN}{L}\left(\frac{a^2+L-Z}{U^2}\right) \\ &\quad + \frac{MN}{U^2}\left\{U^2 - \frac{MN}{L}(a^2+L-Z)\right\} \\ &= (\mu\nu-MN) - (\mu\nu-MN)\frac{MN}{L}\left(\frac{a^2+L-Z}{U^2}\right) \\ &\quad + \frac{MN}{U^2}\left\{Z\frac{MN}{L} + Z(nk^2+ml^2)\right\}. \end{aligned}$$

Il suit de là, que

$$\Pi = T^2 \left\{ \begin{array}{l} (\mu\nu-MN) - (\mu\nu-MN)\frac{MN}{L}.\frac{(a^2+L-Z)}{U^2} - \frac{ZMN}{L+a^2} - \frac{LZ(nk^2+ml^2)}{L+a^2} \\ + \frac{MNZ}{U^2}\left[\frac{MN}{L} + (nk^2+ml^2)\right] + \frac{a^2Z^2(nk^2+ml^2)}{(L+a^2)^2} \\ -\frac{k^2l^2(nM-mN)^2(a^2+L-Z)Z^2}{(a^2+L)^2U^2\frac{MN}{L}} \end{array} \right\},$$

$$\Pi = T^2 \left\{ \begin{array}{l} (\mu\nu-MN) - (\mu\nu-MN)\frac{MN}{L}.\frac{(a^2+L-Z)}{U^2} + \frac{a^2Z^2(nk^2+ml^2)}{(L+a^2)^2} \\ -\frac{ZMN}{L+a^2} + \frac{LZ}{U^2}\left(\frac{MN}{L}\right)^2 + Z(nk^2+ml^2)\left(\frac{MN}{U^2} - \frac{L}{a^2+L}\right) \\ -\frac{k^2l^2Z^2(nM-mN)^2(a^2+L-Z)}{(a^2+L)^2U^2\frac{MN}{L}} \end{array} \right\},$$

$$\Pi = T^2 \left\{ \begin{array}{l} (\mu\nu - MN) - (\mu\nu - MN)\frac{MN}{L}.\frac{(a^2+L-Z)}{U^2} \\ \quad + \frac{Z(nk^2+ml^2)}{L+a^2}\left[\frac{a^2 Z}{L+a^2} - L\right] - \frac{ZMN}{L+a^2} \\ \quad + \frac{ZL}{U^2}\left(\frac{MN}{L}\right)^2 + Z(nk^2+ml^2)\frac{MN}{U^2} \\ \quad - \frac{k^2 l^2 Z^2 (nM-mN)^2 (a^2+L-Z)}{(a^2+L)^2 U^2 \frac{MN}{L}} \end{array} \right\}.$$

Maintenant, afin d'introduire le facteur a^2+L-Z, je remplace $\frac{a^2 Z}{L+a^2} - L$ par

$$\frac{(a^2-L)Z}{a^2+L} + \frac{LZ}{a^2+L} - L = \frac{(a^2-L)Z}{a^2+L} + \frac{L(Z-a^2-L)}{a^2+L};$$

et alors on a

$$\Pi = T^2 \left\{ \begin{array}{l} (\mu\nu - MN) - (\mu\nu - MN)\frac{MN}{L}\left(\frac{a^2+L-Z}{U^2}\right) \\ \quad + \frac{Z^2(a^2-L)(nk^2+ml^2)}{(a^2+L)^2} - \frac{ZL(nk^2+ml^2)(a^2+L-Z)}{(a^2+L)^2} \\ \quad - \frac{ZMN}{a^2+L} + \frac{LZ}{U^2}\left(\frac{MN}{L}\right)^2 + Z(nk^2+ml^2)\frac{MN}{U^2} \\ \quad - \frac{Z^2 K^2 l^2 (nM-mN)^2 (a^2+L-Z)}{(a^2+L)^2 U^2 \frac{MN}{L}} \end{array} \right\}.$$

Comme les équations (β') donnent

106. $\mu\nu - MN = mnZ^2 - Z(nM+mN)$,

on aura, en plaçant le facteur

$$\frac{1}{(L+a^2)^2}$$

hors des paranthèses:

$$\Pi = \frac{T^2}{(a^2+L)^2} \left\{ \begin{array}{l} mnZ^2(a^2+L)^2 - Z(nM-mN)(a^2+L)^2 + Z^2(a^2-L)nk^2+ml^2) \\ - \frac{MN}{L}.\frac{(a^2+L-Z)}{U^2}[mnZ^2(a^2+L)^2 - Z(nM+mN)(a^2+L)^2] \\ - ZL(nk^2+ml^2)(a^2+L-Z) - ZMN(a^2+L) \\ + Z\frac{MN}{L}.\frac{L}{U^2}(a^2+L)^2\left[\frac{MN}{L} + nk^2 + ml^2\right] \\ - \frac{Z^2.k^2 l^2 (nM-mN)^2 (a^2+L-Z)}{\frac{MN}{L}.U^2} \end{array} \right\}.$$

De là on tire

$$\Pi-\frac{T^2Z^2}{(a^2+L)^2}\left[mn(a^2+L)^2+(a^2-L)(nk^2+ml^2)\right] = \Pi' =$$

$$\frac{T^2.Z}{(a^2+L)^2}\left\{\begin{array}{l}-(nM+mN)(a^2+L)^2\\ -\left[mnZ-(nM+mN)\right]\frac{MN}{L}.\frac{(a^2+L)^2(a^2+L-Z)}{U^2}\\ -(nk^2+ml^2)L\left[a^2+L-Z-\frac{MN}{L}.\frac{(a^2+L)^2}{U^2}\right]\\ -L.\frac{MN}{L}(a^2+L)\left[1-\frac{(a^2+L)MN}{LU^2}\right]\\ -\frac{Z.k^2l^2(nM-mN)^2(a^2+L-Z)}{\frac{MN}{L}.U^2}\end{array}\right\}.$$

A cause de l'équation (105.) on peut écrire

$$\Pi' = \frac{T^2.Z}{(a^2+L)^2}\left\{\begin{array}{l}-(nM+mN)(a^2+L)^2\\ -\left[mnZ-(nM+mN)\right]\frac{MN}{L}.\frac{(a^2+L)^2(a^2+L-Z)}{U^2}\\ -L(nk^2+ml^2)\left[a^2+L-Z-\frac{MN}{L}.\frac{(a^2+L)^2}{U^2}\right]\\ -LZ(nk^2+ml^2)\frac{MN}{L}.\frac{(a^2+L)}{U^2}-\frac{Z.k^2l^2(nM-mN)^2(a^2+L-Z)}{\frac{MN}{L}.U^2}\end{array}\right\},$$

$$\Pi' = \frac{T^2.Z}{(a^2+L)^2}\left\{\begin{array}{l}-(nM+mN)(a^2+L)^2\\ -\left[mnZ-(nM+mN)\right]\frac{MN}{L}.\frac{(a^2+L)^2(a^2+L-Z)}{U^2}\\ -L(nk^2+ml^2)\left[U^2-\frac{MN}{L}(a^2+L)\right]\left[a^2+L-Z\right]\\ -\frac{Z.k^2l^2(nM-mN)^2(a^2+L-Z)}{\frac{MN}{L}.U^2}\end{array}\right\}.$$

Donc, en vertu de l'équation (105.), on a

$$\Pi = \frac{T^2.Z}{(a^2+L)^2}\left\{\begin{array}{l}-(nM+mN)(L+a^2)^2\\ -\left[mnZ-(nM+mN)\right]\frac{MN}{L}(a^2+L)^2\frac{(a^2+L-Z)}{U^2}\\ -Z.L(nk^2+ml^2)^2(a^2+L-Z)\\ -\frac{Z.k^2l^2(nM-mN)^2(a^2+L-Z)}{\frac{MN}{L}.U^2}\end{array}\right\}.$$

Pour introduire le facteur a^2+L-Z dans le premier terme, j'y remplace

$$-Z(L+a^2) \quad \text{par} \quad -Z(a^2+L-Z)-Z^2;$$

alors on obtient:

$$\Pi'+\frac{T^2Z^2}{(a^2+L)^2}(a^2+L)(nM+mN)=\Pi''=$$

$$\frac{ZT^2(a^2+L-Z)}{(a^2+L)^2}\left\{\begin{array}{l}-(nM+mN)(a^2+L)\\ -[mnZ-(nM+mN)]\frac{MN}{L}\cdot\frac{(a^2+L)^2}{U^2}\\ -\frac{LZ(nk^2+ml^2)^2}{U^2}-\frac{Z.k^2l^2(nM-mN)^2}{\frac{MN}{L}.U^2}\end{array}\right\};$$

ou bien

$$\Pi''=$$

$$\frac{ZT(a^2+L-Z)}{(a^2+L)^2U^2\frac{MN}{L}}\left\{\begin{array}{l}-Zk^2l^2(nM-mN)^2-LZ.\frac{MN}{L}(nk^2+ml^2)^2\\ -mnZ(a^2+L)^2\left(\frac{MN}{L}\right)^2\\ +(mN+nM)(a^2+L)\frac{MN}{L}\left[\frac{MN}{L}(a^2+L)-U^2\right]\end{array}\right\}.$$

Donc en ayant égard à l'équation (105.), on aura

$$\Pi''=$$

$$\frac{ZT^2(a^2+L-Z)}{(a^2+L)^2U^2\frac{MN}{L}}\left\{\begin{array}{l}-Zk^2l^2(nM-mN)^2-LZ\frac{MN}{L}(nk^2+ml^2)^2\\ -mnZ(a^2+L)^2\left(\frac{MN}{L}\right)^2\\ -Z(mN+nM)(a^2+L)\frac{MN}{L}(nk^2+ml^2)\end{array}\right\}.$$

Observons maintenant, que

$$k^2l^2(nM-mN)^2+MN(nk^2+ml^2)^2=$$

$$MN(n^2k^4+m^2l^4)+k^2l^2(n^2M^2+m^2N^2)=(k^2n^2M+m^2l^2N)(Ml^2+Nk^2).$$

Et comme l'équation (93.) donne

$$(L+a^2)\frac{MN}{L}=-(l^2M+k^2N)$$

on aura

$$107. \quad -k^2l^2(nM-mN)^2-MN(nk^2+ml^2)^2=(a^2+L)\frac{MN}{L}(k^2n^2M+m^2l^2N).$$

Il suit de là, que

$$\Pi''=$$

$$\frac{T^2Z^2(a^2+L-Z)}{(a^2+L)U^2}\left\{\begin{array}{l}k^2n^2M+l^2m^2N-mn(a^2+L)\frac{MN}{L}\\ \quad -(mN+nM)(nk^2+ml^2)\end{array}\right\}.$$

ce qui revient à dire, que

$$\Pi'' = -\frac{T^2 Z^2 (a^2+L-Z)}{(a^2+L)U^2}\left[(a^2+L)\frac{MN}{L}+k^2N+l^2M\right].$$

Or il est clair que le second facteur est *nul* en vertu de l'équation (93.): partant nous avons l'équation

$$\Pi'' = o.$$

Il suit de là que

$$\Pi' = -\frac{T^2 Z^2}{(a^2+L)^2}(a^2+L)(nM+mN);$$

$$\Pi = \frac{T^2 Z^2}{(a^2+L)^2}[mn(a^2+L)^2+(a^2-L)(nk^2+ml^2)-(a^2+L)(nM+mN)].$$

De sorte que nous avons

$$108. \quad A_2 B_2 - C_2^2 = \frac{T^2 Z^2}{(a^2+L)^2}.H,$$

en posant pour plus de simplicité,

$$109. \quad H = mn(a^2+L)^2+(a^2-L)(nk^2+ml^2)-(a^2+L)(nM+mN) \\ -2akl(nM-mN)\sqrt{\left(\frac{L}{MN}\right)}.$$

Il est évident, que pour avoir la valeur de

$$A_3 B_3 - C_3^2$$

il suffit de changer le signe du radical $\sqrt{\left(\frac{L}{MN}\right)}$; c'est-à-dire que

$$110. \quad A_3 B_3 - C_3^2 = \frac{T^2 Z^2}{(a^2+L)^2}.H';$$

$$111. \quad H' = mn(a^2+L)^2+(a^2-L)(nk^2+ml^2)-(a^2+L)(nM+mN) \\ +2akl(nM-mN)\left(\frac{L}{MN}\right).$$

Donc la formule (103.) est par là réduite à celle-ci:

$$112. \quad X = 2\pi\int_0^{\sqrt{A'}}\frac{T^2 R^2 dR}{\sqrt{H}}.\frac{\Omega}{\Delta}+2\pi\int_0^{\sqrt{A'}}\frac{T^2 R^2 dR}{\sqrt{H'}}.\frac{\Omega'}{\Delta}.$$

31. Passons au calcul de la fonction $\frac{\Omega}{\Delta}$. Les formules des No. 29. et 30. donnent immédiatement

$$2(B_2-A_2) = -L(V+S)\frac{D}{U};$$

$$A_2+B_2 = 2T^2+2a(V+S);$$

$$A_2 B_2 = T^4+T^2(V-S)\left(a+\frac{D}{U}\right)+T^2(V+S)\left(a-\frac{D}{U}\right) \\ +(V^2-S^2)\left(a^2-\frac{D^2}{U^2}\right);$$

34 *

$$A_2B_3 = T^4 + T^2(V+S)\left(a+\frac{D}{U}\right) + T^2(V-S)\left(a-\frac{D}{U}\right)$$
$$+(V^2-S^2)\left(a^2-\frac{D^2}{U^2}\right);$$

$$A_3B_2 - A_2B_3 = 2T^2\frac{D}{U}(V-S) - 2T\frac{D}{U}(V+S) = -4\frac{D}{U}.T^2S;$$
$$A_3 + B_3 = 2T^2 + 2a(V-S);$$
$$\Omega = 16\frac{T^2D^2}{U^2}\left[\frac{MN}{L}(T^2+aV) + VS + S^2\right];$$
$$\Delta = 16\frac{D^2}{U^2}T^4S^2 + \frac{4T^2D^2}{U^2}.\frac{MN}{L}\left[2T^2+2V\left(a+\frac{D}{U}\right)\right]\left[2T^2+2V\left(a-\frac{D}{U}\right)\right]$$
$$= \frac{16T^2D^2}{U^2}\left\{T^2S^2 + \frac{MN}{L}\left[(T^2+aV)^2 - \frac{V^2D^2}{U^2}\right]\right\};$$

partant il est clair, que

$$\frac{\Omega}{\Delta} = \frac{VS+S^2+\frac{MN}{L}(T^2+aV)}{T^2S^2+\frac{MN}{L}\left[(T^2+aV)^2 - V^2\frac{D^2}{U^2}\right]}.$$

Mais on a

$$\frac{D^2}{U^2} = a^2 + (a^2-\lambda)\frac{T^2}{U^2};$$

ainsi on peut écrire

$$T^2.\frac{\Omega}{\Delta} = \frac{S(V+S)+\frac{MN}{L}(T^2+aV)}{S^2+\frac{MN}{L}\left[T^2+2aV-(a^2-\lambda)\frac{V^2}{U^2}\right]}.$$

En substituant pour V sa valeur (No. 29.), dans le dénominateur seulement, il viendra

$$T^2.\frac{\Omega}{\Delta} = \frac{S(V+S)+\frac{MN}{L}(T^2+aV)}{S^2+\frac{MN}{L}\left[T^2+\frac{2a^2U^2}{a^2+L}-\frac{a^2U^2(a^2-\lambda)}{(a^2+L)^2}\right]};$$

et comme $\lambda = Z-L$, $T^2 = \mu\nu - U^2$, on a

$$113.\quad T^2.\frac{\Omega}{\Delta} = \frac{S(V+S)+\frac{MN}{L}(T^2+aV)}{S^2+\frac{MN}{L}\left[\mu\nu-\frac{LU}{a^2+L}+\frac{Z.a^2U^2}{(a^2+L)^2}\right]}$$

Nous avons

$$T^2+aV = T^2+\frac{a^2U^2}{a^2+L} = \frac{\mu\nu(a^2+L)-U^2L}{a^2+L},$$

ou bien

$$T^2+aV = \frac{(\mu\nu-MN)(a^2+L)+MN(a^2+L)-LU^2}{a^2+L}.$$

En substituant pour U^2 et $\mu\nu - MN$ leurs valeurs données par les équations (105.) et (106.), on aura

$$(T^2 + aV)\frac{MN}{L} = \frac{[mnZ - (mN + nM)]\,Z(a^2+L)\frac{MN}{L} - ZMN(nk^2 + ml^2)}{a^2+L},$$

$$SV + S^2 = \frac{akl.ZU^2(nM - mN)}{(a^2+L)^2\sqrt{\left(\frac{MN}{L}\right)}} + \frac{k^2l^2Z^2(nM-mN)^2}{(a^2+L)^2\frac{MN}{L}}.$$

Maintenant, si l'on fait pour plus de simplicité,

$$\Pi = SV + S^2 + (T^2 + aV)\frac{MN}{L} - \frac{aklZU^2(nM-mN)}{(a^2+L)^2\sqrt{\left(\frac{MN}{L}\right)}},$$

nous aurons

$$\Pi = \frac{Z}{a^2+L}\left\{\begin{array}{l}[mnZ - (nM + mN)](a^2+L)\frac{MN}{L} - MN(nk^2 + ml^2)\\ + \frac{k^2l^2Z(nM-mN)^2}{(a^2+L)\frac{MN}{L}}\end{array}\right\},$$

$$\Pi = \frac{Z}{(a^2+L)^2.\frac{MN}{L}}\left\{\begin{array}{l}[mnZ - (nM+mN)]\left[(a^2+L)\frac{MN}{L}\right]^2\\ -\frac{MN}{L}(a^2+L)MN(nk^2+ml^2) + Z.k^2l^2(nM-mN)^2\end{array}\right\}.$$

Mais l'équation (105.) donne

$$\frac{MN}{L}(a^2+L) = U^2 - Z(nk^2+ml^2);$$

partant

$$\Pi = \frac{Z}{(a^2+L)^2.\frac{MN}{L}}\left\{\begin{array}{l}[mnZ - (nM+mN)]\left[(a^2+L)\frac{MN}{L}\right]^2\\ -\frac{MN}{L}(nk^2+ml^2)U^2L + ZMN(nk^2+ml^2)^2\\ + Zk^2l^2(nM-mN)^2\end{array}\right\}.$$

En vertu de l'équation (107.) on peut écrire:

$$\Pi = \frac{Z}{(a^2+L)^2}\left\{\begin{array}{l}[mnZ - (nM+mN)](a^2+L)^2\frac{MN}{L}\\ -LU^2(nk^2+ml^2) - Z(a^2+L)(k^2n^2M + l^2m^2N)\end{array}\right\};$$

$$\Pi = \frac{Z}{(a^2+L)^2}\left\{\begin{array}{l}-LU^2(nk^2+ml^2)\\ -(a^2+L)\left\{\begin{array}{l}Z(k^2n^2M + l^2m^2N)\\ -[mnZ - (nM+mN)](a^2+L)\frac{MN}{L}\end{array}\right\}\end{array}\right\}.$$

L'équation (93.) donne

$$(a^2+L)\frac{MN}{L} = -k^2N-l^2M;$$

donc en substituant cette valeur, on aura

$$\Pi =$$

$$\frac{-Z}{(a^2+L)^2}\left\{\begin{matrix} U^2L(nk^2+ml^2) \\ +(a^2+L)\left\{\begin{matrix} Z(k^2n^2M+l^2m^2N) \\ +(k^2N+l^2M)[mnZ-(nM+mN)]\end{matrix}\right\}\end{matrix}\right\}.$$

Mais le coefficient de Z, savoir

$$k^2n^2M+l^2m^2N+mn(k^2N+l^2M) = (nM+mN)(k^2n+l^2m);$$

donc nous avons

$$\Pi =$$

$$\frac{-Z}{(a^2+L)^2}\left\{\begin{matrix} U^2L(nk^2+ml^2) \\ +(a^2+L)(nM+mN)\,[Z(k^2n+l^2m)-k^2N+l^2M)]\end{matrix}\right\}.$$

Actuellement j'observe que, d'après les équations (93.) et (105.) on a

$$Z(k^2n+l^2m)-(k^2N+l^2M) = Z(k^2n+l^2m)+(a^2+L)\frac{MN}{L} = U^2.$$

Donc en remplaçant Π par sa valeur primitive, il viendra pour le numérateur du second membre de l'équation (113.):

$$114.\quad S(V+S)+\frac{MN}{L}(T^2+aV) = \frac{-ZU^2}{(a^2+L)^2}.G,$$

en posant

$$115.\quad G = L(nk^2+ml^2)+(a^2+L)(nM+mN)-akl(nM-mN)\sqrt{\left(\frac{L}{MN}\right)}.$$

Voici maintenant le calcul du dénominateur de l'équation (113.) que je nomme Π'. Comme l'équation (105.) donne

$$\frac{U^2L}{a^2+L} = MN+\frac{ZL}{a^2+L}(nk^2+ml^2),$$

on a d'abord:

$$\Pi' = S^2+\frac{MN}{L}\left\{\mu\nu-MN-\frac{ZL}{a^2+L}(nk^2+ml^2)+\frac{a^2U^2Z}{(a^2+L)^2}\right\}.$$

En substituant pour $\mu\nu-MN$ sa valeur fournie par l'équation (106.), on aura

$$\Pi' = S^2+Z.\frac{MN}{L}\left\{mnZ-(nM+mN)-\frac{L(nk^2+ml^2)}{a^2+L}+\frac{a^2U^2}{(a^2+L)^2}\right\};$$

et en remplaçant S^2 par sa valeur:

$$\Pi' = \frac{k^2 l^2 Z^2 (nM - mN)^2}{\frac{MN}{L}(a^2+L)^2} + Z.\frac{MN}{L}[mnZ - (nM+mN)]$$
$$- \frac{MN}{L}.\frac{(a^2+L)ZL(nk^2+ml^2)}{(a^2+L)^2} + \frac{MN}{L}.\frac{Za^2U^2}{(a^2+L)^2}.$$

Cela posé, on obtient en ayant égard à l'équation (105.)

$$\Pi' = Z.\frac{MN}{L}[mnZ - (mN+mN)]$$
$$+ \frac{MN}{L}Z.\frac{a^2U^2}{(a^2+L)^2} - \frac{U^2.ZL(nk^2+ml^2)}{(a^2+L)^2}$$
$$+ \frac{Z^2.k^2l^2(nM-mN)^2 + Z^2(nk^2+ml^2)MN}{(a^2+L)^2.\frac{MN}{L}}.$$

Maintenant, en vertu de l'équation (107.) on peut écrire:

$$\Pi' = Z.\frac{MN}{L}[mnZ - (nM+mN)] + \frac{Z.\frac{MN}{L}a^2U^2 - Z.U^2L(nk^2+ml^2)}{(a^2+L)^2}$$
$$- \frac{Z^2.(k^2n^2M + l^2m^2N)}{a^2+L};$$

ou bien,

$$\Pi' = \frac{Z}{(a^2+L)^2}\left\{\begin{array}{l} \frac{MN}{L}(a^2+L)^2[mnZ-(nM+mN)] \\ + \frac{MN}{L}a^2U^2 - LU^2(nk^2+ml^2) \\ - Z(a^2+L)(k^2n^2M + l^2m^2N) \end{array}\right\};$$

$$\Pi' = \frac{Z}{(a^2+L)^2}\left\{\begin{array}{l} -(a^2+L)[mnZ-(nM+mN)][k^2N+l^2M] \\ - Z(a^2+L)(k^2n^2M + l^2m^2N) \\ + \frac{MN}{L}a^2U^2 - LU^2(nk^2+ml^2) \end{array}\right\};$$

$$\Pi' = \frac{Z}{(a^2+L)^2}\left\{\begin{array}{l} (a^2+L)(k^2N+l^2M)(nM+mN) \\ -(a^2+L)Z(k^2n+l^2m)(nM+mN) \\ + \frac{MN}{L}a^2U^2 - LU^2(nk^2+ml^2) \end{array}\right\},$$

$$\Pi' = \frac{-Z}{(a^2+L)^2}\left\{\begin{array}{l} (a^2+L)(nM+mN)[Z(nk^2+ml^2) - k^2N - l^2M] \\ - \frac{MN}{L}.a^2U^2 + LU^2(nk^2+ml^2) \end{array}\right\}.$$

En ayant égard à l'équation (93.), il viendra

$$116. \quad \Pi' = \frac{-ZU^2}{(a^2+L)^2}.F,$$

en posant pour plus de simplicité:

$$117.\quad F=(a^2+L)(nM+mN)+L(nk^2+ml^2)+MN+k^2N+l^2M.$$

De tout cela nous concluons, que la formule (112.) est réductible à celle-ci:

$$118.\quad X=2\pi\int_0^{\sqrt{A'}}\frac{R^2\,dR}{F}\left(\frac{G}{\sqrt{H}}+\frac{G'}{\sqrt{H'}}\right);$$

où les valeurs de H, H', G, F sont données par les équations (109.), (111.), (115.), (117.); et G' s'obtient en changeant la signe du radical dans le second membre de l'équation (115.).

La formule (118.) est la formule de *Legendre* qu'il s'agissait de démontrer. Elle a, comme il est manifeste, la forme que nous avions supposée dans le raisonnement exposé dans le No. 28.

32. Conformément à ce raisonnement, on peut faire $Z=0$ dans l'équation (93.) et dans les expressions de F, G, H, G, H. Alors, la formule (118.) doit être traitée d'après ces équations:

$$\beta''.\quad\left\{\begin{aligned}&0=\lambda\nu k^2+\lambda\mu l^2+(a^2-\lambda)\mu\nu;\\&F=-(a^2-\lambda)(n\mu+m\nu)-\lambda(nk^2+ml^2)+\mu\nu-k^2\nu-l^2\mu;\\&G=-(a^2-\lambda)(n\mu+m\nu)-\lambda(nk^2+ml^2)+akl(n\mu-m\nu)\sqrt{\left(\frac{-\lambda}{\mu\nu}\right)};\\&H=mn(a^2-\lambda)^2+(a^2+\lambda)(nk^2+ml^2)+(a^2-\lambda)(n\mu+m\nu)\\&\qquad\qquad-2akl(n\mu-m\nu)\sqrt{\left(\frac{-\lambda}{\mu\nu}\right)};\end{aligned}\right.$$

desquelles on déduit les expressions de G' et H' par le simple changement du signe qui affecte le radical $\sqrt{\left(\frac{-\lambda}{\mu\nu}\right)}$ dans les expressions de G et H.

Ainsi, dans le cas où le point attiré est placé sur le prolongement de l'axe des a, nous avons

$$b=0,\quad c=0,\quad k=mb=0,\quad l=nc=0;$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}0&=\quad(a^2-\lambda)\mu\nu,\\F&=\;-(a^2-\lambda)(n\mu+m\nu)+\mu\nu,\\G=G&=\;-(a^2-\lambda)(n\mu+m\nu),\\H=H&=\;mn(a^2-\lambda)^2+(a^2-\lambda)(n\mu+m\nu).\end{aligned}$$

La première de ces quatre équations admet trois solutions; savoir

$$0=a^2-\lambda;\quad 0=\mu,\quad 0=\nu.$$

Or, il est évident qu'il faut exclure la solution $a^2-\lambda=0$, puisqu'elle donnerait $F=G=H=0$; et de là on ne pourrait rien tirer de la for-

mule (118.). En adoptant la solution

$$\nu = R^2 + nh = 0, \qquad h = -\frac{R^2}{n},$$

il viendra

$$\lambda = R^2 + h = R^2\left(1 - \frac{1}{n}\right);$$

$$F = G = G' = -(a^2 - \lambda)n\mu;$$

$$H = mn(a^2 - \lambda)^2 + (a^2 - \lambda)n\mu = (a^2 - \lambda)[mn(a^2 - \lambda) + n\mu];$$

$$\mu = R^2 + mh = R^2\left(1 - \frac{m}{n}\right);$$

$$H = \left[a^2 - R^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]\left[a^2 - R^2\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right]mn;$$

ce qui réduit la formule (118.) à celle-ci:

$$119. \quad X = \frac{4\pi}{\sqrt{(mn)}}\int_0^{\sqrt{A'}} \frac{R^2\,dR}{\sqrt{\left\{\left[a^2 - R^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]\left[a^2 - R^2\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right]\right\}}}.$$

Conformément à sa définition, la limite A' doit être la valeur *positive* de R^2 tirée de l'équation

$$0 = (a^2 - \lambda)\mu\nu = (a^2 - R^2 - h)(R^2 + mh)(R^2 + nh)$$

lorsqu'on y fait $h = a^2 - a_1^2$, ou bien $a^2 - h = a_1^2$. Donc on doit prendre $R^2 = a_1^2$; ce qui donne, en posant

$$R = a_1 x, \qquad m = \frac{a_1^2}{b_1^2}, \qquad n = \frac{a_1^2}{c_1^2},$$

$$X = 4\pi a_1 b_1 c_1 \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\{[a^2 - (b_1^2 - a_1^2)x^2][a^2 + (c_1^2 - a_1^2)x^2]\}}}.$$

Ce résultat s'accorde avec celui que nous avons tiré de la formule (68.) dans le No. 24., et de la formule (79.) dans le No. 25. Mais on voit qu'il faut ici exécuta la transformation avec les précautions convenables, afin d'éviter les contradictions qui seraient apparentes.

Au reste, l'élimination de h étant *exécutée* dans la formule (119.), si l'on établit maintenant entre les deux variables R^2 et ζ l'équation

$$\frac{a^2}{R^2 + \zeta} = 1,$$

il est clair, que la formule (119.) devient équivalente à celle-ci:

$$120. \quad X = \frac{4\pi}{a}\int_0^{\sqrt{A'}} \frac{R^2\,dR\sqrt{(R^2 + \zeta)}}{\sqrt{[(R^2 + m\zeta)(R^2 + n\zeta)]}},$$

dont la forme est précisément la même que celle donnée par la formule (68.).

Pour imiter ce procédé dans le cas général, il faudrait d'abord éliminer h de la formule (118.) à l'aide de la première des équations (β''.). En établissant ensuite entre les deux variables R^2 et ζ l'équation

$$\frac{a^2}{R^2+\zeta}+\frac{m^2 b^2}{R^2+m\zeta}+\frac{n^2 c^2}{R^2+n\zeta}=1,$$

on parviendrait à une expression de X, qui serait identique à la formule (68.), après avoir remplacé R^2 et ζ par ω^2 et h, respectivement. Il est remarquable que, ce calcul, effrayant pour le plus intrépide algèbriste, puisse être exécuté dans un moment, en revenant (comme nous l'avons fait observer dans le No. 25.) à l'expression de X affectée du double signe intégral.

C'est l'exécution même d'une des deux intégrations qui détruit la simplicité inhérente au double signe intégral et à l'existence de l'équation $D=0$.

C'est ainsi, par exemple, que le *second* membre de l'équation

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\log\left[\frac{2c+b+2\sqrt{c}.\sqrt{(a+b+c)}}{b+2\sqrt{c}.\sqrt{a}}\right]$$

donne, avec quelque difficulté, la véritable valeur que prend le premier lorsqu'on y fait $c=0$; tandisqu'en faisant $c=0$, avant d'exécuter l'intégration on obtient immédiatement

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)}}=\frac{2}{b}(\sqrt{(a+b)}-\sqrt{a}).$$

Le calcul dont nous venons de parler (fort pénible même dans le cas particulier où le point attiré serait placé dans le plan d'une des trois sections principales de l'ellipsoïde) est sans doute celui que Mr. *Poisson* qualifie d'*inextricable:* mais la démonstration de *Legendre* ne réclame point, ni l'exécution effective de ce calcul, ni l'appui d'aucun théorême dérivé d'une autre source. Le théorême qu'il avait en vue, et son expression analytique sous la forme la plus simple, découlent des principes les plus rigides du Calcul Intégral. L'état progressif de l'analyse fait espérer que cette espèce de lacune laissée par *Legendre* sera un jour heureusement remplie. Il est même probable qu'elle le sera par un de ces traits de génie qui attestent la force des principes, et la difficulté de saisir le véritable mode d'en faire l'application.

Turin le 12. Octobre 1838.

18.

Note sur l'intégrale $\int \frac{dM}{r} = V$, qui exprime la somme des élémens de la masse d'un ellipsoïde, divisés respectivement par leur distance à un point attiré *).

(Par Mr. *J. Plana* à Turin.)

On sait que V est une telle fonction des coordonnées a, b, c du point attiré, prises relativement au centre de l'ellipsoïde, que si elle était connue on en tireroit immédiatement les trois composantes X, Y, Z de l'attraction, au moyen des équations

$$X = -\left(\frac{dV}{da}\right), \qquad Y = -\left(\frac{dV}{db}\right), \qquad Z = -\left(\frac{dV}{dc}\right),$$

de sorte qu'on a

$$1'. \quad dV = -X\,da - Y\,db - Z\,dc,$$

pour la différentielle complète de V. D'après les formules (H.) posées dans le No. 12. de mon Mémoire sur l'attraction de l'ellipsoïde, si l'on fait, pour plus de simplicité,

$$U = (1+u)(1+mu)(1+nu),$$

on a:

$$X = -2\pi a \int_{\infty}^{v} \frac{du}{(1+u)\sqrt{U}}; \qquad Y = -2\pi m b \int_{\infty}^{v} \frac{du}{(1+mu)\sqrt{U}};$$

$$Z = -2\pi n c \int_{\infty}^{v} \frac{du}{(1+nu)\sqrt{U}};$$

où la seconde limite v de ces intégrales définies doit être regardée comme une fonction de a, b, c implicitement connue par la résolution de l'équation (10.) donnée dans le même Mémoire. Ces expressions de X, Y, Z étant substituées dans l'expression précédente de dV on en tire aussitôt la conséquence, qu'on doit avoir pour V une expression de cette forme:

$$V = \pi a^2 \int_{\infty}^{v} \frac{du}{(1+u)\sqrt{U}} + \pi m b^2 \int_{\infty}^{v} \frac{du}{(1+mu)\sqrt{U}} + \pi n c^2 \int_{\infty}^{v} \frac{du}{(1+nu)\sqrt{U}}$$
$$- \pi \int_{\infty}^{v} P\,du;$$

---

*) En lisant cette Note, je suppose qu'on a sous les yeux le Mémoire précédent.

P indiquant une fonction de u facile à déterminer. En effet; en prenant la différentielle complète de cette valeur de V, on obtient l'équation

$$dV+Xda+Ydb+Zdc=\frac{\pi\,dv}{\sqrt{U'}}\left[\frac{a^2}{1+v}+\frac{mb^2}{1+mv}+\frac{nc^2}{1+nv}\right]-\pi dv.P';$$

en observant, qu'ici on a

$$dv=\left(\frac{dv}{da}\right)da+\left(\frac{dv}{db}\right)db+\left(\frac{dv}{dc}\right)dc,$$

et que les lettres accentuées U', P' désignent ce que deviennent U et P en y remplaçant u par v. Mais l'équation (10.) donne

$$2'.\quad \frac{a^2}{1+v}+\frac{mb^2}{1+mv}+\frac{nc^2}{1+nv}=k:$$

donc il est manifeste que pour mettre d'accord l'équation précédente avec l'équation (1'.) il faut prendre

$$P'=\frac{k}{\sqrt{U'}},\quad \text{et par conséquent}\quad P=\frac{k}{\sqrt{U}}.$$

Il suit de là que nous avons

$$3'.\quad V=\pi a^2\int_\infty^v\frac{du}{(1+u)\sqrt{U}}+\pi mb^2\int_\infty^v\frac{du}{(1+mu)\sqrt{U}}$$
$$+\pi nc^2\int_\infty^v\frac{du}{(1+nu)\sqrt{U}}+\pi k\int_\infty^v\frac{du}{\sqrt{U}};$$

ou bien

$$4.\quad V=-\tfrac{1}{2}(aX+bY+cZ)-\pi k\int_\infty^v\frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Cela posé, si l'on fait $x^2=\frac{1+v}{1+u}$, on aura

$$5'.\quad -\pi k\int_\infty^v\frac{du}{\sqrt{U}}$$
$$=2\pi k\sqrt{(1+v)}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{\{[m(1+v)+(1-m)x^2][n(1+v)+(1-n)x^2]\}}}$$

ou bien

$$6'.\quad -\pi k\int_0^v\frac{du}{\sqrt{U}}=2\pi a_1b_1c_1A_1.\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{\{[A_1^2+(b_1^2-a_1^2)x^2][A_1^2+(c_1^2-a_1^2)x^2]\}}},$$

en remplaçant m et n par leurs valeurs et observant que $A_1^2=a_1^2(1+v)$. On pourra maintenant employer pour X, Y, Z les expressions fournies par les équations (L.) ou (L'.) du No. 12., ou bien celles données par les équations (L''.) posées dans le No. 23. Dans ce dernier cas, il faut observer, que

$$7'.\quad -\pi k\int_\infty^v\frac{du}{\sqrt{U}}=\frac{2\pi a_1b_1c_1}{\sqrt{(a_1^2-c_1^2)}}\int_\theta^\theta\frac{d\varphi}{\Delta}=\frac{3M}{2\sqrt{(a_1^2-c_1^2)}}\int_0^\theta\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Ainsi on a

$$8'. \quad V = \frac{-3M}{2(a_1^2-c_1^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} a^2 \int_0^\theta \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{\Delta} + b^2 \int_0^\theta \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{\Delta^3} \\ + c^2 \int_0^\theta \frac{d\varphi \operatorname{tang}^2\varphi}{\Delta} - (a_1^2-c_1^2) \int_0^\theta \frac{d\varphi}{\Delta} \end{array} \right\}.$$

Les formules (3'.) et (8'.) sont applicables aux points extérieurs et aux points intérieurs, en observant que dans ce dernier cas on doit faire $v = 0$.

Relativement à la sphère, on a $m = n = 1$: en outre on peut disposer les axes de manière que $b = 0$, $c = 0$. Alors la formule (3'.) donne

$$V = \pi a^2 \int_\infty^v \frac{du}{(1+u)^{\frac{5}{2}}} - \pi k \int_\infty^v \frac{du}{(1+u)^{\frac{3}{2}}};$$

d'où l'on tire

$$V = -\tfrac{2}{3}\pi a^2 (1+v)^{-\frac{3}{2}} + 2\pi k (1+v)^{-\frac{1}{2}}.$$

Si le point attiré est extérieur à la sphère on doit faire $\frac{a^2}{1+v} = k$; ce qui donne

$$V = -\tfrac{2}{3}\pi . \frac{k\sqrt{k}}{a} + \frac{2\pi k \sqrt{k}}{a} = \frac{4\pi}{3} . \frac{k\sqrt{k}}{a} = \frac{M}{a};$$

mais si le point attiré est sur sa surface ou dans son intérieur, on doit faire $v = 0$, ce qui donne $V = 2\pi k - \frac{2}{3}\pi a^2$.

Pour comparer la formule (3'.) avec l'expression directe de V, il faut se rappeler, qu'en posant

$$h = a^2 + m b^2 + n c^2 - k;$$
$$I = a\cos\theta + \sin\theta\,(m b \cos\omega + n c \sin\omega);$$
$$L = \cos^2\theta + \sin^2\theta\,(m\cos^2\omega + n\sin^2\omega),$$

on a, pour les points *extérieurs:*

$$9'. \quad V = \frac{dM}{r} = \iint \frac{r^2\, dr . \sin\theta\, d\theta\, d\omega}{r} = \tfrac{1}{2}\iint (\varrho_2^2 - \varrho_1^2) \sin\theta\, d\theta\, d\omega$$
$$= 2\iint \frac{I\sqrt{(I^2 - h . L)}}{L^2} \sin\theta\, d\theta\, d\omega;$$

et pour les points *intérieurs:*

$$10'. \quad V = \tfrac{1}{2}\iint (\varrho_2^2 + \varrho_1^2) \sin\theta\, d\theta\, d\omega = \iint \frac{(2I^2 - hL)}{L^2} \sin\theta\, d\theta\, d\omega$$
$$= 2\int_0^\pi \int_0^\pi \frac{I^2 \sin\theta\, d\theta\, d\omega}{L^2} - h \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\omega}{L}$$
$$= 2\int_0^\pi \int_0^\pi \frac{I^2 \sin\theta\, d\theta\, d\omega}{L^2} - (a^2 + m b^2 + n c^2) \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\omega}{L}$$
$$+ k \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\omega}{L}.$$

En exécutant l'intégration par rapport à ω on obtient facilement

$$k\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\omega}{L} = -\pi k\int_\infty^0 \frac{du}{\sqrt{U}};$$

ce qui s'accorde avec la formule (3'.). L'inspection de ces formules suffit pour démontrer que dans le second membre de l'équation (3'.) on ne doit pas ajouter aucune constante arbitraire pour avoir la valeur de V conformément à sa définition.

La formule (3'.) donne

$$\left(\frac{d^2V}{da^2}\right) = 2\pi\int_\infty^v \frac{du}{(1+u)\sqrt{U}} + \frac{2\pi a}{(1+v)\sqrt{U'}}\left(\frac{dv}{da}\right),$$

$$\left(\frac{d^2V}{da^2}\right) = 2\pi m\int_\infty^v \frac{du}{(1+mu)\sqrt{U}} + \frac{2\pi m b}{(1+mv)\sqrt{U'}}\left(\frac{dv}{db}\right),$$

$$\left(\frac{d^2V}{dc^2}\right) = 2\pi n\int_\infty^v \frac{du}{(1+nu)\sqrt{U}} + \frac{2\pi n c}{(1+nv)\sqrt{U'}}\left(\frac{dv}{dc}\right).$$

En faisant la somme de ces trois équations, et remarquant que

$$\frac{du}{\sqrt{U}}\left(\frac{1}{1+u} + \frac{m}{1+mu} + \frac{n}{1+nu}\right) = -2\,d.(v)^{-\frac{1}{2}},$$

on aura

$$11'.\quad \left(\frac{d^2V}{da^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{db^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{dc^2}\right)$$

$$= -\frac{4\pi}{\sqrt{U'}} + \frac{2\pi}{\sqrt{U'}}\left[\frac{a}{1+v}\left(\frac{dv}{da}\right) + \frac{mb}{1+mv}\left(\frac{dv}{db}\right) + \frac{nc}{1+nv}\left(\frac{dv}{dc}\right)\right].$$

Cette équation exige, que la valeur de v en a, b, c soit tirée de l'équation (2'.). Or, avant d'aller plus loin, il importe d'observer, que si le point attiré est sur la surface ou dans l'intérieur de l'ellipsoïde, on doit faire $v = 0$: alors l'équation (11'.) donne

$$12'.\quad \left(\frac{d^2V}{da^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{db^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{dc^2}\right) = -4\pi:$$

mais si le point attiré est extérieur, l'équation (2'.) donne

$$\frac{a}{1+v}\left(\frac{dv}{da}\right) + \frac{mb}{1+mv}\left(\frac{dv}{db}\right) + \frac{nc}{1+nv}\left(\frac{dv}{dc}\right) = 2;$$

ce qui réduit l'équation (11'.) à celle-ci:

$$13'.\quad \left(\frac{d^2V}{da^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{db^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{dc^2}\right) = 0.$$

Ces deux résultats sont connus; mais en les établissant de cette manière on pénétre mieux le mode de leur existence.

L'équation (4'.) donne

$$aX + bY + cZ = -2V - 2\pi k \int_{\infty}^{v} \frac{du}{\sqrt{U}}:$$

donc la fonction F considérée par *Laplace* dans la page 15 du second volume de la Mécanique Céleste est exprimée par le second membre de cette équation.

La formule (3'.) donne, par un simple changement dans les limites de l'intégration, l'expression de V, relative à une couche elliptique d'épaisseur finie terminée par deux surfaces elliptiques *semblables*. Car, en nommant v et v' les deux valeurs de v correspondantes à ces deux surfaces et ΔV la différence des valeurs de V, on aura

$$14'. \quad \Delta V = \pi a^2 \int_{v'}^{v} \frac{du}{(1+u)\sqrt{U}} + \pi m b^2 \int_{v'}^{v} \frac{du}{(1+mu)\sqrt{U}} + \pi n c^2 \int_{v'}^{v} \frac{du}{(1+nu)\sqrt{U}} - \pi(k-k') \int_{v'}^{v} \frac{du}{\sqrt{U}};$$

où k' répond à la valeur de v'.

Si cette couche elliptique d'épaisseur finie était composée de couches elliptiques *semblables* infiniment minces, de densité variable, exprimés par une fonction donnée de k, que je désigne par $F(k)$, il faudrait multiplier par $F(k)$ les élémens de ces intégrales; ce qui donnera

$$15'. \quad \Delta V = \pi a^2 \int_{v'}^{v} \frac{du.F(k)}{(1+u)\sqrt{U}} + \pi m b^2 \int_{v'}^{v} \frac{du F(k)}{(1+mu)\sqrt{U}} + \pi n c^2 \int_{v'}^{v} \frac{du.F(k)}{(1+nu)\sqrt{U}} - \pi \int_{v'}^{v} \frac{du.kF(k)}{\sqrt{U}}.$$

Mais on doit observer, qu'ici

$$k = \frac{a^2}{1+u} + \frac{mb^2}{1+mu} + \frac{nc^2}{1+nu}.$$

De là on tire la conséquence, qu'en posant

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}.\Pi(k)$$

on pourra obtenir ΔV par les transcendantes ordinaires si on prend pour $\Pi(k)$ une fonction rationnelle de k.

Ces résultats sont conformes à ceux trouvés par Mr. *Jacobi:* mais je n'ai pas encore connaissance du Mémoire où cet illustre Géomètre a exposé ses recherches sur cette matière. La démonstration que Mr. *Poisson*

en a donnée dans la *Conn. des Tems* pour 1837 est explicitement indépendante de la considération de la fonction V. Mais on voit par cette Note qu'il est très-facile d'appliquer à cette fonction les formules qui expriment la force attractive de l'ellipsoïde et la force attractive des couches elliptiques semblables *).

Turin le 11. Mars 1839.

---

*) Au moment où j'achève cette Note, j'apprends, en lisant le No. 5. des *Comptes-Rendus* (Séance du 4. Février 1839), que Mr. *Lejeune-Dirichlet* a fait disparaître, par une heureuse idée, la difficulté que la nature des limites apportait dans la recherche directe de l'attraction de l'ellipsoïde sur un point extérieur. On ne saurait donner des préceptes pour appliquer avec succès le nouveau principe; mais on peut donner des exemples. Mr. *Lejeune-Dirichlet* vient d'en publier deux qui sont frappans. On voit par là que le secret de l'intégrale triple $\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r}$ consiste: 1°. à multiplier l'élément $\frac{dx\,dy\,dz}{r}$ par la fonction *discontinue*

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\varphi \sin\varphi}{\varphi} \cos\left[\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}+\frac{z^2}{c_1^2}\right]\varphi,$$

qui a la propriété d'être égale à l'unité ou à zéro, suivant que le trinome $\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}+\frac{z^2}{c_1^2}$ demeure inférieur ou supérieur à l'unité: 2°. à transformer $\frac{1}{r}$ d'après l'équation

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,(1+\sqrt{-1})}\int_0^\infty \frac{d\psi}{\sqrt{\psi}}\,.\,e^{r^2\psi\sqrt{-1}}$$

Cela posé si l'on fait, pour abréger:

$$p = \left[\left(\psi+\frac{\varphi}{a_1^2}\right)x^2-2ax\right]+\left[\left(\psi+\frac{\varphi}{b_1^2}\right)y^2-2by\right]+\left[\left(\psi+\frac{\varphi}{c_1^2}\right)z^2-2cz\right)\Big] \\ +\psi(a^2+b^2+c^2)$$

on aura la valeur de $\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r}$ en prenant la *partie réelle* de l'intégrale quintuple

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}\,(1+\sqrt{-1})}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty dx\,dy\,dz\,\frac{d\varphi\sin\varphi}{\varphi}\,.\,\frac{d\psi}{\sqrt{\psi}}\,.\,e^{p\,.\,\sqrt{-1}}.$$

Les trois intégrations relatives à x, y, z sont par là rendues possibles: ensuite, en prenant la différence partielle relative à l'abscisse a, on pourra aisément exécuter l'intégration relative à φ. La partie réelle de l'intégrale simple restante est réductible à l'expression connue de la force X.

Par cet artifice fort ingénieux, la difficulté laissée par *Legendre* est éludée, mais non surmontée.

Continuation de la Note précédente.

La formule (3'.) donnerait difficilement le développement de la fonction V suivant les puissances impaires de $\frac{1}{r}$; r étant la distance $\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$ du point attiré au centre de l'ellipsoïde. Et s'il fallait former effectivement ce développement, je pense que le meilleur parti serait celui d'arriver au but par une combinaison de deux méthodes absolument différentes proposées par *Laplace* et *Lagrange.* Sans remonter aux sources primitives je dirai, que la première de ces méthodes est indiquée dans les pages 47 et 48 du second Volume de la *Mécanique céleste,* et qu'on trouve la seconde exposée dans le premier Volume de la *Mécanique analytique* (Voyez p. 113 et 114). Lorsqu'on borne ce développement à ses premiers termes, les calculs sont assez simples, soit en développant le radical comme *Lagrange*, soit en formant successivement les termes de V par la formule désignée par (4.) dans la page 19 du second Volume de la Mécanique céleste. Mais ces procédés ne fournissent pas immédiatement le véritable terme général du développement de la fonction V sous la forme la plus simple dont il est susceptible; il faut les examiner dans leurs rapports intimes, si l'on veut parvenir à une solution explicite de ce problème. Voici de quelle manière j'ai obtenu un résultat qui me paraît remarquable par sa simplicité, en égard à la complication du sujet.

Il est d'abord clair que la forme du développement de V est celle-ci:

$$V=\frac{U^{(0)}}{r}+\frac{U^{(2)}}{r^3}+\frac{U^{(4)}}{r^5}+\ldots+\frac{U^{(2\lambda)}}{r^{1+2\lambda}}+\text{etc.}$$

D'après la théorie exposée dans le Chapitre II. du second Volume de la Mécanique céleste, on peut établir l'équation

$$U^{(2\lambda)}=\frac{4\pi Z^{(2\lambda)}}{(2\lambda+3)(4\lambda+1)},$$

où $Z^{(2\lambda)}$ est une fonction des deux angles θ et ϖ qui déterminent les coordonnées a, b, c du point attiré par les équations

$$a=r\cos\theta,\qquad b=r\sin\theta.\cos\varpi,\qquad c=r\sin.\sin\varpi.$$

Cette fonction est telle, qu'en posant pour plus de simplicité:

$$P^{(2\lambda)}=\frac{1.3.5.7\ldots.4\lambda-1}{1.2.3.4\ldots.2\lambda}\Big[\cos^{2\lambda}\theta-\frac{2\lambda.2\lambda-1}{2.4\lambda-1}\cos^{2\lambda-2}\theta$$
$$+\frac{2\lambda.2\lambda-1.2\lambda-2.2\lambda-3}{2.4.4\lambda-1.4\lambda-3}\cos^{2\lambda-4}\theta-\text{etc.}\Big];$$

$$Q^{(2\lambda)} = \cos^{2\lambda-n}\theta - \frac{(2\lambda-n)(2\lambda-n-1)}{2.4\lambda-1}\cos^{2\lambda-n-2}\theta + \text{etc.}$$

on a

$$Z^{(2\lambda)} = A_{(2\lambda)}P^{(2\lambda)} + \sum_1^{2\lambda}[B_{(n)}\cos n\varpi + C_{(n)}\sin n\varpi]\,Q^{(2\lambda)}\sin^n\theta.$$

Le signe $\sum_1^{2\lambda}$ indique, qu'on doit prendre la totalité des termes semblables qu'on obtient en faisant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots 2\lambda$. Mais, dans le cas particulier de l'ellipsoïde homogène, on a $C_{(n)} = 0$ pour toute valeur de n, et $B_{(n)} = 0$ pour toute valeur impaire de n. Donc, il convient de remplacer n par $2n$, et écrire d'abord

$$Z^{(2\lambda)} = A_{(2\lambda)}P^{(2\lambda)} + \sum_1^{2\lambda} B_{(2n)}\cos 2n\varpi\,.\,Q^{(2\lambda)}\sin^{2n}\theta.$$

Cela posé, j'observe que, pour chaque valeur de λ et de n, il y a dans la formule

$$Q^{(2\lambda)} = \cos^{2\lambda-2n}\theta - \frac{(2\lambda-2n)(2\lambda-2n-1)}{2.4\lambda-1}\cos^{2\lambda-2n-2}\theta + \text{etc.}$$

un terme où l'exposant de $\cos\theta$ devient égal à zéro. Soit donc $2\lambda - 2n - 2p = 0$ cet exposant. Le coefficient de ce même terme peut être écrit ainsi:

$$\frac{(-1)^p(2\lambda-2n)(2\lambda-2n-1)(2\lambda-2n-2)\ldots(2\lambda-2n-2p+1)}{2.4.6\ldots 2p.(4\lambda-1)(4\lambda-3)\ldots(4\lambda-2p+1)}$$
$$= \frac{(-1)^p.1.2.3.4\ldots 2\lambda-2n}{2.4.6\ldots 2p.(4\lambda-1)(4\lambda-3)\ldots(4\lambda-2p+1)};$$

et à cause de $2\lambda - 2n = 2p$ il est égal à

$$\frac{(-1)^p.1.3.5.7\ldots 2p-1}{(4\lambda-1)(4\lambda-3)\ldots(2\lambda+2n+1)} = \frac{(-1)^p.1.3.5.7\ldots(2\lambda-2n-1)}{(4\lambda-1)(4\lambda-3)\ldots(2\lambda+2n+1)}.$$

Donc en *séparant* ce terme dans l'expression de $Z^{(2\lambda)}$, on aura:

$$p.\begin{cases} U^{(2\lambda)} = \dfrac{4\pi Z^{(2\lambda)}}{(2\lambda+3)(4\lambda+1)}; \\ Z^{(2\lambda)} = A_{(2\lambda)}P^{(2\lambda)} \\ \qquad + \sum_1^{\lambda} \dfrac{(-1)^{\lambda-n}.1.3.5.7\ldots 2\lambda-2n-1}{(4\lambda-1)(4\lambda-3)\ldots(2\lambda+2n+1)}\,.\,B_{(m)}\cos 2n\varpi\,Q^{(2\lambda)}\sin^{2n}\theta \\ \qquad + \sum_1^{\lambda} B_{(2n)}\cos 2n\varpi\,.\,Q^{(2\lambda)}\sin^{2n}\theta. \end{cases}$$

Les coefficiens $A_{(2\lambda)}$ et $B_{(2n)}$ sont indépendans des valeurs de l'angle θ: de sorte que s'ils étaient connus pour des valeurs particulières de θ, on pourrait former l'expression générale de $Z^{(2\lambda)}$. Or, en faisant $\theta = 0$, on a $P^{(2\lambda)} = 1$ et $Z^{(2\lambda)} = A_{(2\lambda)}$. Donc on connoîtra les coefficiens $A_{(2\lambda)}$ en dé-

terminant la valeur de V relative à un point attiré placé sur l'axe des a extérieurement à l'ellipsoïde *).

Comme la troisième partie de $Z^{(2\lambda)}$ devient nulle pour $\theta = 90°$ on conçoit qu'il suffit de déterminer pour ce cas la valeur de V pour pouvoir en conclure les coefficiens $B_{(2n)}$. Car, abstraction faite des termes indépendans de ϖ qui entreront dans ce développement, il est manifeste, que si

$$\frac{H \cos 2n\varpi}{r^{1+2\lambda}}$$

est un de ces termes, on aura l'équation

$$H = \frac{4\pi(-1)^{\lambda-n}}{(2\lambda+3)(4\lambda+1)} \cdot \frac{(1.3.5.7\ldots.2\lambda-2n-1)\,B_{(2n)}}{(4\lambda-1)(4\lambda-3)\ldots.(2\lambda+2n+1)},$$

de laquelle on tirera la valeur du coefficient $B_{(2n)}$.

Telle est la méthode indiquée par *Laplace*. Mais, au lieu de calculer ces coefficiens par le moyen qu'il propose dans la page 48 citée plus haut, il sera beaucoup plus simple d'appliquer aux deux cas particuliers qui comprennent le cas général le procédé de *Lagrange*.

Conformément à cette méthode on doit d'abord développer un quelconque de ces trois radicaux:

$$(a^2+b^2+c^2-2by-2cz+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}};$$
$$(a^2+b^2+c^2-2by-2ax+y^2+x^2)^{-\frac{1}{2}};$$
$$(a^2+b^2+c^2-2ax-2cz+x^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Soient $Hy^{2m}x^{2n}$, $Fy^{2m}x^{2n}$, $Gx^{2m}z^{2n}$ les trois termes généraux de ces développemens affecté d'exposans pairs. On aura pour les termes généraux correspondans dans le développement de V:

$$\frac{(1.3.5\ldots.2m-1)(1.3.5\ldots.2n-1)}{1.3.5\ldots.2m+2n+3} \cdot 3MH(b_1^2-a_1^2)^m(c_1^2-a_1^2)^n;$$
$$\frac{(1.3.5\ldots.2m-1)(1.3.5\ldots.2n-1)}{1.3.5\ldots.2m+2n+3} \cdot 3MF(b_1^2-c_1^2)^m(a_1^2-c_1^2)^n;$$
$$\frac{(1.3.5\ldots.2m-1)(1.3.5\ldots.2n-1)}{1.3.5\ldots.2m+2n+3} \cdot 3MG(a_1^2-b_1^2)^m(c_1^2-b_1^2)^n.$$

Dans le cas de $\theta = 0$, et par conséquent $b = 0$, $c = 0$, on prendra la première de ces trois formules. Alors en posant $\lambda = m+n$, on a

$$H = -\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\ldots.(-\frac{1}{2}-\lambda+1)}{a^{1+2\lambda}(1.2.3\ldots.m)(1.2.3\ldots.n)},$$

---

*) Cet important théorème est dû à *Legendre*. Voyez p. 422 du Tome X. des anciens Volumes des *Savans Etrangers*.

ou bien

$$H = \frac{(-1)^\lambda (1.3.5\ldots.2\lambda-1)}{a^{1+2\lambda}.2^\lambda(1.2.3\ldots.m)(1.2.3\ldots.n)}.$$

Donc le coefficient de $\frac{3M.(b_1^2-a_1^2)^m(c_1^2-a_1^2)^n}{a^{1+2\lambda}}$, sera

$$\frac{(-1)^\lambda(1.3.5\ldots.2\lambda-1)(1.3.5\ldots.2m-1)(1.3.5\ldots.2n-1)}{2^\lambda(1.3.5\ldots.2\lambda+3)(1.2.3\ldots.m)(1.2.3\ldots.n)}$$

$$= \frac{(-1)^\lambda}{2^\lambda(2\lambda+1)(2\lambda+3)}\cdot\frac{(1.3.5\ldots.2\lambda-2n-1)(1.3.5\ldots.2n-1)}{(1.2.3\ldots.\lambda-n)(1.2.3\ldots.n)}.$$

Il suit de là, qu'en faisant pour plus de simplicité

$$b_1^2-a_1^2 = e'^2, \qquad c_1^2-a_1^2 = e''^2;$$

$$E^{(2\lambda)} = \frac{(-1)^\lambda}{2^\lambda(2\lambda+1)(2\lambda+3)},$$

on a

$$p'. \quad \frac{3ME^{(2\lambda)}}{a^{1+2\lambda}}\sum_0^\lambda\frac{(1.3.5\ldots.2\lambda-2n-1)(1.3.5\ldots.2n-1)}{(1.2.3\ldots.\lambda-n)(1.2.3\ldots.n)}e'^{2\lambda-2n}.e''^{2n}$$

pour le terme général du développement de V dans le cas particulier de $\theta=0$. Le signe $\sum\limits_0^\lambda$ indique, qu'on doit prendre la somme des $\lambda+1$ termes, qui résultent de cette formule en y faisant successivement $n=0, 1, 2, 3, \ldots. \lambda$. La formule ($p'$.) donne donc les coefficients désignés par $A_{(2\lambda)}$ dans la formule (p.).

Considérons maintenant le cas où l'on aurait $\theta=90^0$, et par conséquent $a=0$. Alors, il faut développer le radical

$$(b^2+c^2-2by+y^2+x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

qui devient

$$\frac{1}{r}\left[1-2\cos\varpi.\frac{y}{r}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{x^2}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

en y faisant $b=r\cos\varpi$, $c=r\sin\varpi$.

Les termes du développement de cette fonction qui sont multipliés par une puissance paire de y et x sont de la forme

$$\frac{N}{r}\left(\frac{y^2}{r^2}\right)^m\left(\frac{x^2}{r^2}\right)^n\left(2\cos\varpi\,\frac{y}{r}\right)^{2l};$$

où l'on a, après avoir fait $m+n+l=\lambda$:

$$N = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\ldots.(-\frac{1}{2}-\lambda-l+1)}{(1.2.3\ldots.m)(1.2.3\ldots.n)(1.2.3\ldots.2l)},$$

ou bien

$$N = \frac{(-1)^{\lambda+l}.(1.3.5.7\ldots.2\lambda+2l-1)}{2^{\lambda+l}(1.2.3\ldots.m)(1.2.3\ldots.n)(1.2.3\ldots.2l)}.$$

Le terme général du développement précédent étant

$$\frac{N(2\cos\varpi)^{2l}}{r^{1+2\lambda}} y^{2m+2l} x^{2n},$$

on aura

$$\frac{3MNN'(2\cos\varpi)^{2l}}{r^{1+2\lambda}} (b_1^2 - c_1^2)^{m+l} (a_1^2 - c_1^2)^n,$$

pour le terme correspondant du développement de V, après avoir fait

$$N' = \frac{(1.3.5\ldots.2m+2l-1)(1.3.5\ldots.2n-1)}{1.3.5.7\ldots.2\lambda+3}.$$

On a donc

$$NN' = \frac{(-\frac{1}{2})^{\lambda+l}(1.3.5\ldots.2\lambda+2l-1)(1.3.5\ldots.2m+2l-1)(1.3.5\ldots.2n-1)}{(1.3.5\ldots.2\lambda+3)(1.2.3\ldots.m)(1.2.3\ldots.n)(1.2.3\ldots.2l)}.$$

Comme l doit prendre toutes les valeurs 0, 1, 2, 3, ... λ, nous écrirons

$$NN' = \frac{(-\frac{1}{2})^{\lambda+l}(2\lambda-1)(2\lambda+1)\ldots.(2\lambda+2l-1)}{(2\lambda-1)(2\lambda+1)(2\lambda+3)} \cdot \frac{(1.3.5\ldots.2m+2l-1)(1.3.5\ldots.2n-1)}{(1.2.3\ldots.m)(1.2.3\ldots.n)(1.2.3\ldots.2l)},$$

ou bien

$$NN' = \frac{(-\frac{1}{2})^{\lambda}.N''}{(2\lambda-1)(2\lambda+1)(2\lambda+3)},$$

en faisant

$$N'' = \frac{(-1)^l.(2\lambda-1)(2\lambda+1)\ldots.(2\lambda+2l-1)(1.3.5\ldots.2m+2l-1)(1.3.5\ldots.2n-1)}{2^l.(1.2.3\ldots.m)(1.2.3\ldots.n)(1.2.3\ldots.2l)}.$$

Il suit de là que le terme général de V peut être exprimé ainsi:

$$p''. \quad \frac{(-1)^{\lambda}.3M}{r^{1+2\lambda}.2^{\lambda}(2\lambda-1)(2\lambda+1)(2\lambda+3)} . \Sigma N''(2\cos\varpi)^{2\lambda}.(b_1^2 - c_1^2)^{m+l}(a_1^2 - c_1^2)^n.$$

Pour une valeur donnée de λ il faudra prendre la totalité des termes qu'on obtient en prenant pour m, n, l tous les nombres entiers et positifs (y compris zéro) qui satisfont à l'équation $m+n+l=\lambda$. Or on sait, que pour avoir toutes les solutions de cette équation il faut développer le trinome $(y+x+z)^{\lambda}$, et prendre ensuite pour m l'exposant de y, pour n celui de x, et pour l celui de z. De sorte que le nombre total des solutions est égal à

$$1+2+3\ldots.+\lambda+1 = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2}.$$

Nous avons

$$(2\cos\varpi)^{2\lambda} = 2\left\{\begin{array}{c}\cos 2l\varpi + 2l\cos 2(l-1)\varpi + \frac{2l(2l-1)}{2}\cos 2(l-2)\varpi \\ + \frac{2l(2l-1)(2l-2)}{2.3}\cos 2(l-3)\varpi + \text{etc.}\end{array}\right\}$$

$$+ \frac{2l(2l-1)(2l-2)\ldots.(l+1)}{1.2.3\ldots.l}\cos 0\varpi.$$

Donc en supprimant le terme multiplié par $\cos 0\varpi$ et observant que λ est la plus grande valeur de l, on aura par la formule (p''.) une expression de la forme

$$\frac{3M}{r^{1+2l}}\left[G_{(1)}\cos 2\varpi + G_{(2)}\cos 4\varpi \ldots . + G_{(\lambda)}\cos 2\lambda\varpi\right];$$

d'où on pourra conclure les coefficiens désignés par $B_{(2n)}$ dans la formule (p.).

Turin le 10. Avril 1839.

19.

Addition à la Note de Mr. Plana, intitulée „Note, où l'on explique une remarquable objection faite par Euler en 1751 etc."

§. V.

Voici le calcul de deux exemples relatifs au cas, où une des deux parties du binome $A \pm B$ serait imaginaire. Soit d'abord

$$M = \sqrt[7]{(41\sqrt{5} - 7\sqrt{-7})} = \sqrt[7]{(A-B)};$$

nous avons $A = 41\sqrt{5}$; $B = 7\sqrt{-7}$; partant $A^2 = 8405$; $B^2 = -343$; $A^2 - B^2 = 8748 = 2^2.3^7$; $A^2 + B^2 = 8062 = 2.29.139$; $p = 2^5 = 32$; $r = 2.3 = 6$. La formule (II.) donne

$$M = \frac{\sqrt{(z+12)} \pm \sqrt{(z-12)}}{2\sqrt[14]{32}} = \frac{\sqrt{(\frac{1}{2}z+6)} \pm \sqrt{(\frac{1}{2}z-6)}}{\sqrt[7]{64}}.$$

L'équation (III.) devient

$$2^7.29.139 = 2^7.4031 = z^7 - 7.6^2.z^5 + 14.6^4.z^3 - 7.6^6.z.$$

Il est facile de voir, qu'on satisfait à cette équation en prenant $z = -2$: donc on a

$$M = \frac{\pm\sqrt{5} \pm \sqrt{-7}}{\sqrt[7]{64}}.$$

Maintenant, on ignore avec quels signes on doit prendre ces quantités radicales; mais l'élévation à la septième puissance démontre, qu'on doit prendre

$$M = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{-7}}{\sqrt[7]{64}}.$$

Cette ambiguité est moins un inconvenient qu'un signe de la perfection du langage algébrique: car dans cet exemple, l'équation qui détermine z demeure la même dans ces quatre cas:

$$\sqrt[7]{(A-B)}, \quad \sqrt[7]{(-A-B)}, \quad \sqrt[7]{(A+B)}, \quad \sqrt[7]{(-A+B)};$$

ainsi il est évident qu'on doit trouver quatre valeurs pour M.

Pour offrir un second exemple de ce genre; soit

$$M = \sqrt[7]{(13\sqrt{3} + \sqrt{-5})} = \sqrt[7]{(A+B)};$$

$A^2 = 507$; $B^2 = -5$; $A^2 - B^2 = 512 = 2^9$; $A^2 + B^2 = 502$; $p = 2^{-2}$; $r = 2$; partant

$$M = \frac{\sqrt{(z+4)} + \sqrt{(z-4)}}{2\sqrt[14]{2^{-2}}} = \frac{\sqrt{(z+4)} + \sqrt{(z-4)}}{\sqrt[7]{64}}$$

L'équation $2.2^{-2}.502 = z^7 - 7.2^2.z^5 + 7.2^5.z^3 - 7.2^6.z$ est satisfaite, en prenant $z = -1$: donc

$$M = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{-5}}{\sqrt[7]{64}}.$$

L'élévation à la septième puissance démontre la justesse des signes.

Il y a des cas où, au lieu d'une telle élévation, il conviendra d'employer ce procédé. Soit $\sqrt[n]{(a + b\sqrt{-1})}$ le radical en question: en posant $a = \sqrt{(a^2 + b^2)}\cos\varphi$, $b = \sqrt{(a^2 + b^2)}\sin\varphi$, on sait que

$$\sqrt[n]{(a + b\sqrt{-1})} = \sqrt[2n]{(a^2 + b^2)}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right].$$

Actuellement, si l'on fait $k = 0, 1, 2, 3$ on pourra juger par les valeurs numériques ainsi calculées, quelle est celle qui doit coïncider avec la valeur obtenue par l'autre méthode.

§. VI.

Il y a une autre manière d'envisager le radical $\sqrt[n]{(A + B)}$: elle consiste à faire $A = -\frac{1}{2}a$; $B = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}$: alors on a

$$y = \sqrt[n]{A + B)} = \sqrt[n]{(-\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)})}, \quad \frac{\sqrt[n]{b}}{y} = \sqrt[n]{(-\tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)})}.$$

Or on sait, qu'en posant $y + \frac{\sqrt[n]{b}}{y} = z$, on a

$$y^n + \frac{b}{y^n} = z^n - nz^{n-2}\sqrt[n]{b} + \frac{n(n-3)}{2}z^{n-4}\sqrt[n]{b^2} - \text{etc.}$$

D'un autre côté $y^n + \frac{b}{y^n} = -a$: donc en faisant $z = u\sqrt[2n]{b}$, on aura l'équation

$$\frac{-a}{\sqrt{b}} = u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}u^{n-4} - \text{etc.}$$

Comme $a = -2A$, $b = A^2 - B^2$, cela revient à dire, qu'on a ces trois équations:

$$M. \begin{cases} y = \sqrt[n]{(A + B)}; \\ y^2 - uy\sqrt[2n]{(A^2 - B^2)} + \sqrt[n]{(A^2 - B^2)} = 0; \\ \frac{2A}{\sqrt{(A^2 - B^2)}} = u^n - nu^{n-2} + \frac{n(u-3)}{2}u^{n-4} - \frac{n(n-3)(n-5)}{2.3}u^{n-6} + \text{etc.} \end{cases}$$

De cette manière on évite la considération du facteur désigné par p dans l'autre méthode. Mais, dans celle-ci il faudra faire $\frac{2A}{\sqrt{(A^2 - B^2)}} = k\sqrt{f}$, $u = v\sqrt{f}$, pour éliminer la quantité irrationnelle $\sqrt{f}$, si l'exposant n est impair: ensuite il faudra faire disparaître les dénominateurs. Tout cela rend l'application de la méthode moins expéditive. En général, il faudra s'en tenir aux formules (II.) et (III.).

Turin le 30. Avril 1838.

20.

De curvis et superficiebus secundi ordinis.

(Auctore Dr. *Ottone Hesse* Regiom.)

Sectio prima.

De relationibus inter coefficientes duorum systematum substitutionum linearium, quorum utrumque efficit ut data functio quaelibet homogenea secundi ordinis transformetur in aliam, quae solis variabilium quadratis constet.

1.

Propositis inter variabiles:

$$x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_n \quad \text{et} \quad y_1\ y_2\ y_3\ \ldots\ y_n$$

n aequationibus linearibus hujusmodi:

$$1. \quad x_\lambda = x_\lambda^{(1)} y_1 + x_\lambda^{(2)} y_2 + \ldots x_\lambda^{(n)} y_n$$

coefficientes $x_\lambda^{(\varkappa)}$, quorum numerus est $n.n$, ita determinari possunt, ut data functio quaelibet homogenea secundi ordinis variabilium $x_1\ x_2 \ldots x_n$ transformetur in aliam variabilium $y_1\, y_2 \ldots y_n$ de qua binorum producta evanuerunt. Cui conditioni ut aequationes (I) satisfaciant, $\frac{n(n-1)}{2}$ aequationes inter coefficientes $x_\lambda^{(\varkappa)}$ valere necesse est, quod substitutionibus (1.) factis $\frac{n(n-1)}{2}$ termini in binas variabiles $y_1\, y_2 \ldots y_n$ ducti evanescere et soli n termini earum quadrata continentes remanere debent.

Jam ut aequationes, de quibus dictum est, nanciscamur, $\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}.x_\varkappa.x_\lambda$ functionem esse datam statuamus. Qua in summa numeris $\varkappa$, λ valores $1\ 2 \ldots n$ omnes ita tribuantur, ut posita aequatione $a_{\varkappa,\lambda} = a_{\lambda,\varkappa}$ termini in $x_\varkappa x_\lambda$ ducti, ubi $\varkappa$, λ diversi sunt, duplices, sin vero $\varkappa$, λ aequales, simplices appareant. Si porro ponamus:

$$G_1 y_1^2 + G_2 y_2^2 + \ldots G_n y_n^2$$

expressionem esse, in quam summa $\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda$ substitutione (1) facta abit, nihil impedit quominus substituendo valores $x_1\ x_2 \ldots x_n$ e (1) in aequatione

$$2. \quad \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda = G_1 y_1^2 + G_2 y_2^2 + \ldots G_n y_n^2$$

et comparando singulos terminos aequationes deducemus sequentes:

$$3.\quad 0 = x_1^{(p)} \frac{d\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(q)} x_\lambda^{(q)}}{dx_1^{(q)}} + x_2^{(p)} \frac{d\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(q)} x_\lambda^{(q)}}{dx_2^{(q)}} + \dots + x_n^{(p)} \frac{d\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(q)} x_\lambda^{(q)}}{dx_n^{(q)}},$$

$$4.\quad G_p = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(p)} x_\lambda^{(p)}$$

quarum prior, positis e numerorum $1\ 2 \dots n$ serie loco p et q diversis numeris, illas $\frac{n(n-1)}{2}$ aequationes conditionales suppeditat, quibus in aequationibus fugere non potest, numeris p, q inter se commutatis, eas integras manere. E posteriori formula, posito $1\ 2 \dots n$ loco p, n aequationes fluunt, quibus coefficientes G_p quadratorum ipsarum variabilium $y_1 . y_2 \dots y_n$ tanquam functiones coefficientium $x_\lambda^{(\varkappa)}$ determinantur.

2.

Repraesentetur per formulam:

$$5.\quad x_\lambda = x_\lambda^{(n+1)} . y_{n+1} + x_\lambda^{(n+2)} . y_{n+2} + \dots x_\lambda^{(2n)} . y_{2n}$$

alterum n aequationum systema, quibus eadem functio data $\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda$ in formam redigatur sequentem:

$$-G_{n+1} y_{n+1}^2 - G_{n+2} y_{n+2}^2 - \dots - G_{2n} y_{2n}^2$$

eadem ratione atque antea sequuntur aequationes:

$$6.\quad 0 = x_1^{(n+p)} \frac{d\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(n+q)} x_\lambda^{(n+q)}}{dx_1^{(n+q)}} + x_2^{(n+p)} \frac{d\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(n+q)} x_\lambda^{(n+q)}}{dx_2^{(n+q)}} + \dots$$
$$\dots + x_n^{(n+p)} \frac{d\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(n+q)} x_\lambda^{(n+q)}}{dx_n^{(n+q)}},$$

$$7.\quad -G_{n+p} = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(n+p)} x_\lambda^{(n+p)}$$

qua ex aequatione priori, positis valoribus $1\ 2 \dots n$ diversis loco p, q, aequationes $\frac{n(n-1)}{2}$ conditionales fluunt, posteriori n coefficientes G_{n+p} determinantur.

Contemplemur illas $n(n-1)$ formulas (3), (6) quibus solis coefficientes $x_\lambda^{(\varkappa)}$ et $x_\lambda^{(n+\varkappa)}$ satisfaciant necesse est, ita ut de functione $\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda$ substitutionibus (1) vel (5) factis variabilium $y_1\ y_2 \dots y_n$ vel $y_{n+1}\ y_{n+2} \dots y_{2n}$ binarum producta evanescant. Facile patet aequationibus (3), (6) $\frac{n(n+1)}{2}$ constantes $a_{\varkappa,\lambda}$ inesse, vel potius $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, quippe e quarum numero unam aliquam $= 1$ ponere licet. Unde sequitur illarum $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ constantium

eliminatione $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aequationes inter coefficientes substitutionum (1), (5) solas existere. Sed hae $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aequationes alio aequationum systemate repraesentari possunt, quae neque inter omnes coefficientes $x_\lambda^{(\varkappa)}.x_\lambda^{(n+\varkappa)}$ symmetria careant, nec tam multas constantes eliminandae praebeant. Quas aequationes ut nanciscamur antecedentibus formulis alias quasdam addi convenit.

3.

Quum ad finem si supponimus ex aequationibus (1) vice versa sequi:

$$8. \quad y_\lambda = X_1^{(\lambda)} x_1 + X_2^{(\lambda)} x_2 + \ldots + X_n^{(\lambda)}$$

inter coefficientes $X_\varkappa^{(\lambda)}$ et $x_\lambda^{(\varkappa)}$ duo aequationum systemata valent haec:

$$9. \quad \begin{cases} 1 = x_1^{(\lambda)} X_1^{(\lambda)} + x_2^{(\lambda)} X_2^{(\lambda)} + \ldots + x_n^{(\lambda)} X_n^{(\lambda)} \\ 0 = x_1^{(\varkappa)} X_1^{(\lambda)} + x_2^{(\varkappa)} X_2^{(\lambda)} + \ldots + x_n^{(\varkappa)} X_n^{(\lambda)} \\ \text{et } 1 = x_\lambda^{(1)} X_\lambda^{(1)} + x_\lambda^{(2)} X_\lambda^{(2)} + \ldots + x_\lambda^{(n)} X_\lambda^{(n)} \\ 0 = x_\varkappa^{(1)} X_\lambda^{(1)} + x_\varkappa^{(2)} X_\lambda^{(2)} + \ldots + x_\varkappa^{(n)} X_\lambda^{(n)} \end{cases}$$

in quorum posterioribus aequationibus numeris $\varkappa$, λ e numerorum serie $1\ 2 \ldots n$ valores diversi tribuendi sunt. Quibus expressionibus (8) variabilium $y_1\ y_2 \ldots y_n$ substitutis in aequatione (2) singulos comparando terminos adipiscimur:

$$10. \quad a_{\varkappa,\lambda} = G_1 X_\varkappa^{(1)} X_\lambda^{(1)} + G_2 X_\varkappa^{(2)} X_\lambda^{(2)} + \ldots G_n X_\varkappa^{(n)} X_\lambda^{(n)}.$$

Facile patet ex aequatione proposita, si multiplicetur per $x_\lambda^{(p)}$ et pro λ deinceps ponetur $1\ 2 \ldots n$, aequationum systema prodire, quod additione facta abit in:

$$a_{\varkappa,1} x_1^{(p)} + a_{\varkappa,2} x_2^{(p)} + \ldots a_{\varkappa,n} x_n^{(p)} = G_p X_\varkappa^{(p)}.$$

Qua ex aequatione numeros $1\ 2 \ldots n$ loco $\varkappa$ deinceps ponendo sequuntur n aequationes:

$$11. \quad \begin{cases} a_{1,1} x_1^{(p)} + a_{1,2} x_2^{(p)} + \ldots + a_{1,n} x_n^{(p)} = G_p X_1^{(p)} \\ a_{2,1} x_1^{(p)} + a_{2,2} x_2^{(p)} + \ldots + a_{2,n} x_n^{(p)} = G_p X_2^{(p)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1} x_1^{(p)} + a_{n,2} x_2^{(p)} + \ldots + a_{n,n} x_n^{(p)} = G_p X_n^{(p)} \end{cases}$$

quarum solutio secundum $x_1^{(p)}\ x_2^{(p)} \ldots x_n^{(p)}$ suppeditat n aequationes sequentis formae:

$$12.\quad \begin{cases} \dfrac{x_1^{(p)}}{G_p} = A_{1,1}X_1^{(p)} + A_{1,2}X_2^{(p)} + \dots + A_{1,n}X_n^{(p)} \\ \dfrac{x_2^{(p)}}{G_p} = A_{2,1}X_1^{(p)} + A_{2,2}X_2^{(p)} + \dots + A_{2,n}X_n^{(p)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{x_n^{(p)}}{G_p} = A_{n,1}X_1^{(p)} + A_{n,2}X_2^{(p)} + \dots + A_{n,n}X_n^{(p)} \end{cases}$$

ubi adnotandum est, cum sit $a_{\varkappa,\lambda} = a_{\lambda,\varkappa}$, etiam $A_{\varkappa,\lambda}$ et $A_{\lambda,\varkappa}$ functiones quasdam coefficientium $a_{\varkappa,\lambda}$ inter se aequales esse. Aequationum vero (12) loco hanc statui licet:

$$\frac{x_\varkappa^{(p)}}{G_p} = A_{\varkappa,1}X_1^{(p)} + A_{\varkappa,2}X_2^{(p)} + \dots + A_{\varkappa,n}X_n^{(p)}$$

quam si multiplicamus per $x_\lambda^{(p)}$ et numeros $1\ 2 \dots n$ loco p deinceps ponimus n aequationes nanciscimur, e quibus facta additione procrescit:

$$13.\quad A_{\varkappa,\lambda} = \frac{x_\varkappa^{(1)}x_\lambda^{(1)}}{G_1} + \frac{x_\varkappa^{(2)}x_\lambda^{(2)}}{G_2} + \dots + \frac{x_\varkappa^{(n)}x_\lambda^{(n)}}{G_n}.$$

Eadem ratione e substitutionibus (5) formula sequitur haec:

$$14.\quad -A_{\varkappa,\lambda} = \frac{x_\varkappa^{(n+1)}x_\lambda^{(n+1)}}{G_{n+1}} + \frac{x_\varkappa^{(n+2)}x_\lambda^{(n+2)}}{G_{n+2}} + \dots + \frac{x_\varkappa^{(2n)}x_\lambda^{(2n)}}{G_{2n}}$$

quam si addimus ad (13) fit:

$$15.\quad \frac{x_\varkappa^{(1)}x_\lambda^{(1)}}{G_1} + \frac{x_\varkappa^{(2)}x_\lambda^{(2)}}{G_2} + \dots + \frac{x_\varkappa^{(2n)}x_\lambda^{(2n)}}{G_{2n}} = 0.$$

Hac ex aequatione, positis loco $\varkappa$, λ valoribus $1\ 2 \dots n$ et diversis et aequalibus, fluunt $\frac{n(n+1)}{2}$ aequationes et inter coefficientes omnes $x_\lambda^{(\varkappa)}\,x_\lambda^{(n+\varkappa)}$ et inter quantitates $G_1\,G_2 \dots G_{2n}$ symmetricas. E quibus, facta eliminatione illarum $2n$ quantitatum, quippe quae $2n-1$ quantitatum vicem impleant, eaedem inter substitutionum (1), (5) coefficientes $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ relationes sequuntur, quas ex aequationibus (3), (6) eliminatione constantium prodire adnotavimus.

4.

Sed facile est perspecta ab aequatione (15) vice versa ad (3), (6) nos redire posse. Quem ad finem assequendum convenit aequationem (15) in duas (13) et (14) dirimi, quarum e priori, positis aequationibus (9), aequationes (12) derivantur, quarum solutio secundum $X_1^{(p)}\,X_2^{(p)} \dots X_n^{(p)}$

suppeditat aequationes (11) e quibus facile sequuntur (3), (4); et simili modo e posteriori (14) aequationes (6), (7) invenimus. Quibus in aequationibus constantes, quas functio $\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda$ continet, ita insitae reperiuntur, ut functio ipsa ex iis facile restitui possit.

Cum vero aequatio (15) $\frac{1\,2\,3\ldots.(2n)}{2.1\,2\,3\ldots.n.1\,2\ldots.n}$ modis in duas aequationes formae (13) et (14) dirimi possit, totidem functiones $\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda$ diversas cognoscimus, e quarum quaelibet duo aequationum systemata nascantur, quae quomodo (3), (6) eodem modo et ipsae loco (15) poni possunt.

Id quo melius perspiciatur aequatio (15) exempli gratia dividatur in duas has:

$$A'_{\varkappa,\lambda} = \frac{x_\varkappa^{(1)} x_\lambda^{(1)}}{G_1} + \frac{x_\varkappa^{(2)} x_\lambda^{(2)}}{G_2} + \ldots. + \frac{x_\varkappa^{(n-1)} x_\lambda^{(n-1)}}{G_{n-1}} + \frac{x_\varkappa^{(n+1)} x_\lambda^{(n+1)}}{G_{n+1}}$$

$$-A'_{\varkappa,\lambda} = \frac{x_\varkappa^{(n)} x_\lambda^{(n)}}{G_n} + \frac{x_\varkappa^{(n+2)} x_\lambda^{(n+2)}}{G_{n+2}} + \ldots. + \frac{x_\varkappa^{(2n-1)} x_\lambda^{(2n-1)}}{G_{2n-1}} + \frac{x_\varkappa^{(2n)} x_\lambda^{(2n)}}{G_{2n}},$$

e quarum priori, positis aequationibus:

$$\begin{aligned}
1 &= x_1^{(p)} Y_1^{(p)} + x_2^{(p)} Y_2^{(p)} + \ldots. + x_n^{(p)} Y_n^{(p)} \\
0 &= x_1^{(p)} Y_1^{(q)} + x_2^{(p)} Y_2^{(q)} + \ldots. + x_n^{(p)} Y_n^{(q)} \\
1 &= x_\lambda^{(1)} Y_\lambda^{(1)} + x_\lambda^{(2)} Y_\lambda^{(2)} + \ldots. + x_\lambda^{(n-1)} Y_\lambda^{(n-1)} + x_\lambda^{(n+1)} Y_\lambda^{(n+1)} \\
0 &= x_\varkappa^{(1)} Y_\lambda^{(1)} + x_\varkappa^{(2)} Y_\lambda^{(2)} + \ldots. + x_\varkappa^{(n-1)} Y_\lambda^{(n-1)} + x_\varkappa^{(n+1)} Y_\lambda^{(n+1)}
\end{aligned}$$

ubi numeris p, q diversi valores $1\;2\ldots.(n-1)\;(n+1)$, numeris $\varkappa$, λ diversi valores $1\;2\ldots.n$ tribuendi sunt, facile prodit:

$$\frac{x_\varkappa^p}{G_p} = A'_{\varkappa,1} Y_1^{(p)} + A'_{\varkappa,2} Y_2^{(p)} + \ldots. + A'_{\varkappa,n} Y_n^{(p)}$$

e qua aequatione vice versa sequatur:

$$a'_{\varkappa,1} x_1^{(p)} + a'_{\varkappa,2} x_2^{(p)} + \ldots. + a'_{\varkappa,n} x_n^{(p)} = G_p X_\varkappa^{(p)}$$

unde, cum sit $a'_{\varkappa,\lambda} = a'_{\lambda,\varkappa}$ quia est $A_{\varkappa,\lambda} = A_{\lambda,\varkappa}$ prodeunt:

$$a.\quad 0 = x_1^{(p)} \frac{d\Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(q)} x_\lambda^{(q)}}{dx_1^{(q)}} + x_2^{(p)} \frac{d\Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(q)} x_\lambda^{(q)}}{dx_2^{(q)}} + \ldots. + x_n^{(p)} \frac{d\Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(q)} x_\lambda^{(q)}}{dx_n^{(q)}},$$

$$G_p = \Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(p)} x_\lambda^{(p)},$$

ubi loco p, q diversi valores $1\;2\ldots.(n-1)\;(n+1)$, loco λ, $\varkappa$ diversi valores $1\;2\ldots.n$ omnes ponendi sunt. Simili modo e secunda aequatione, quam supra statuimus, sequuntur:

$$b.\quad 0 = x_1^{\mu}\frac{d\Sigma a'_{\varkappa,\lambda}x_\varkappa^{(\nu)}x_\lambda^{(\nu)}}{dx_1^{(\nu)}} + x_2^{\mu}\frac{d\Sigma a'_{\varkappa,\lambda}x_\varkappa^{(\nu)}x_\lambda^{(\nu)}}{dx_2^{(\nu)}} + \dots + x_n^{(\mu)}\frac{d\Sigma a'_{\varkappa,\lambda}x_\varkappa^{(\nu)}x_\lambda^{(\nu)}}{dx_n^{(\nu)}}$$

$$-G_\mu = \Sigma a'_{\varkappa,\lambda}x_\varkappa^{\mu}x_\lambda^{\mu}$$

ubi numeris μ, ν diversi valores n, $(n+2)$, ... $(2n)$ omnes tribuendi sunt.

His quatuor aequationibus efficitur ut functio $\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a'_{\varkappa,\lambda}x_\varkappa x_\lambda$ substitutionibus:

$$x_\lambda = x_\lambda^{(1)}y_1 + x_\lambda^{(2)}y_2 + \dots + x_\lambda^{(n-1)}y_{n-1} + x_\lambda^{(n+1)}y_{n+1}$$

$$\text{et}\quad x_\lambda = x_\lambda^{(n)}y_n + x_\lambda^{(n+2)}y_{n+2} + \dots + x_\lambda^{(2n-1)}y_{2n-1} + x_\lambda^{(2n)}y_{2n}$$

transeat in:

$$G_1y_1^2 + G_2y_2^2 + \dots + G_{n-1}y_{n-1}^2 + G_{n+1}y_{n+1}^2$$

$$\text{et}\quad -G_ny_n^2 - G_{n+2}y_n^2 - \dots - G_{2n-1}y_{2n-1}^2 - G_{2n}y_{2n}^2$$

qua ratione functionem $\Sigma a'_{\varkappa,\lambda}x_\varkappa x_\lambda$ unam ex iis reperimus, quarum mentionem fecimus, e qua nascuntur aequationes (a), (b), quae aeque ac (3), (6) aequationem (15) repraesentant.

5.

Si aequationem (15) per $b_{\varkappa,\lambda}$ multiplicamus et numeris $\varkappa$, λ valores 1 2 .... n omnes et diversos et aequales ex ordine tribuimus, $\frac{n(n+1)}{2}$ aequationes prodire videmus, quarum summam hunc in modum designari licet:

$$16.\quad \frac{\Sigma b_{\varkappa,\lambda}x_\varkappa^{(1)}x_\lambda^{(1)}}{G_1} + \frac{\Sigma b_{\varkappa,\lambda}x_\varkappa^{(2)}x_\lambda^{(2)}}{G_2} + \dots + \frac{\Sigma b_{\varkappa,\lambda}x_\varkappa^{(2n)}x_\lambda^{(2n)}}{G_{2n}} = 0.$$

Facile vero patet $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficientes $b_{\varkappa,\lambda}$ multimodis ita determinari posse, ut ex $(2n)$ summis, e quibus conflata est aequatio antecedens, $(2n-1)$ earum evanescant, unde fit ut reliquam semper sponte evanescat.

Sed et in aequationibus (15) quantitates G_1 G_2 .... G_{2n} et in (3), (6) quantitates $a_{\varkappa,\lambda}$ ut indeterminatas habere licet. Unde satis elucet e quantitatum $x_\varkappa^{(p)}$ numero, cum conditionibus $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ solis satisfaciant, $\frac{3n^2+3n-2}{2}$ earum ex arbitrio determinari posse. Quas quantitates omnes si tanquam $2n$ systemata valorum variabilium X_1 X_2 .... X_n consideramus, ex antecedentibus theorema fluit hoc:

Theorema 1.

Si functio aliqua secundi ordinis variabilium X_1 X_2 .... X_n homogenea pro $(2n-1)$ systematis valorum evanescit sequentium $X_1 = x_1^{(1)}$, $X_2 = x_2^{(1)}$, ... $X_n = x_n^{(1)}$; $X_1 = x_1^{(2)}$, $X_2 = x_2^{(2)}$, ... $X_n = x_n^{(2)}$; ....

$X_1 = x_1^{(2n)}$, $X_2 = x_2^{(2n)}$, ... $X_n = x_n^{2n}$ inter quos $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aequationes valent, quae e (3), (6) facta coefficientium $a_{\varkappa,\lambda}$ eliminatione prodeunt; functio illa etiam pro reliquo systemate evanescit.

6.

Theorema propositum per se dignum quod adnotetur inprimis magno est usui in geometria, quoniam in theoria curvarum et superficierum secundi ordinis quaedam problemata, quae valde diversa esse videntur, prorsus congruum docet. Id sequentibus illustrabo.

Posito $n = 3$ per $\frac{x_1^{(p)}}{x_3^{(p)}}$, $\frac{x_2^{(p)}}{x_3^{(p)}}$ distantias designemus puncti alicujus p a duobus axibus fixis cum puncto in eodem plano sitis, sub angulo recto se intersecantibus. Tum facile est inquirere, quid in geometria significat aequatio (3), quae positis loco p, q valoribus 1 2 3 diversis tres aequationes praebet has:

$$0 = x_1^{(1)}(a_{1,1}x_1^{(2)} + a_{1,2}x_2^{(2)} + a_{1,3}x_3^{(2)}) + x_2^{(1)}(a_{2,1}x_1^{(2)} + a_{2,2}x_2^{(2)} + a_{2,3}x_3^{(2)}) + x_3^{(1)}(a_{3,1}x_1^{(2)} + a_{3,2}x_2^{(2)} + a_{3,3}x_3^{(2)})$$

$$0 = x_1^{(2)}(a_{1,1}x_1^{(3)} + a_{1,2}x_2^{(3)} + a_{1,3}x_3^{(3)}) + x_2^{(2)}(a_{2,1}x_1^{(3)} + a_{2,2}x_2^{(3)} + a_{2,3}x_3^{(3)}) + x_3^{(2)}(a_{3,1}x_1^{(3)} + a_{3,2}x_2^{(3)} + a_{3,3}x_3^{(3)})$$

$$0 = x_1^{(3)}(a_{1,1}x_1^{(1)} + a_{1,2}x_2^{(1)} + a_{1,3}x_3^{(1)}) + x_2^{(3)}(a_{2,1}x_1^{(1)} + a_{2,2}x_2^{(1)} + a_{2,3}x_3^{(1)}) + x_3^{(3)}(a_{3,1}x_1^{(1)} + a_{3,2}x_2^{(1)} + a_{3,3}x_3^{(1)}).$$

Constat enim aequatione prima conditionem exprimi ut punctum 1 in linea polari puncti 2 vel punctum 2 in linea polari puncti 1 situm sit respectu curvae secundi ordinis, quae analytice repraesentatur aequatione:

$$0 = x_1(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3) + x_2(a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3) + x_3(a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3)$$

in qua rursus $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ coordinatas orthogonales designant.

Unde haud difficile est animadversu aequationes illas tres conditiones continere, ut puncta 1 2 3 ita inter se conjugata sint, ut linea polaris cujuslibet eorum reliqua tangat. Proposita igitur curva aliqua secundi ordinis bina puncta, quorum alterum in linea polari alterius situm est, puncta respectu curvae propositae conjugata et terna puncta, quorum quodque polus est lineae per duo reliqua ductae, systema punctorum respectu curvae propositae conjugatorum in sequentibus appellabo.

Eodem modo aequatione (6), quae positis loco p, q valoribus 1 2 3 diversis suppeditat has aequationes:

$$0 = x_1^{(4)}(a_{1,1}x_1^{(5)} + a_{1,2}x_2^{(5)} + a_{1,3}x_3^{(5)}) + x_2^{(4)}(a_{2,1}x_1^{(5)} + a_{2,2}x_2^{(5)} + a_{2,3}x_3^{(5)})$$
$$+ x_3^{(4)}(a_{3,1}x_1^{(5)} + a_{3,2}x_2^{(5)} + a_{3,3}x_3^{(5)})$$
$$0 = x_1^{(5)}(a_{1,1}x_1^{(6)} + a_{1,2}x_2^{(6)} + a_{1,3}x_3^{(6)}) + x_2^{(5)}(a_{2,1}x_1^{(6)} + a_{2,2}x_2^{(6)} + a_{2,3}x_3^{(5)})$$
$$+ x_3^{(5)}(a_{3,1}x_1^{(6)} + a_{3,2}x_2^{(6)} + a_{3,3}x_3^{(6)})$$
$$0 = x_1^{(6)}(a_{1,1}x_1^{(4)} + a_{1,2}x_2^{(4)} + a_{1,3}x_3^{(4)}) + x_2^{(6)}(a_{2,1}x_1^{(4)} + a_{2,2}x_2^{(4)} + a_{2,3}x_3^{(4)})$$
$$+ x_3^{(6)}(a_{3,1}x_1^{(4)} + a_{3,2}x_2^{(4)} + a_{3,3}x_3^{(4)})$$

conditiones exprimi intelligimus ut puncta 4 5 6 respectu ejusdem curvae ac puncta 1 2 3 systema punctorum conjugatorum constituant. Cum uno secundum theorema 1. aequationis:

$$0 = b_{1,1}X_1^2 + b_{2,2}X_2^2 + b_{3,3}X_3^2 + 2b_{2,3}X_2X_3 + 2b_{3,1}X_1X_3 + 2b_{1,2}X_1X_2$$

coefficientes $b_{1,1}$ $b_{2,2}$ .... semper ita determinari liceat ut coordinatae punctorum 1 2 .... 6 pro $\frac{X_1}{X_3}$, $\frac{X_2}{X_3}$ substitutae aequationi satisfaciant, per sex puncta, quae consideramus, curva quaedam secundi ordinis duci potest. Unde hoc fluit theorema:

Theorema 2.

Proposita curva aliqua secundi ordinis bina systemata quaecunque punctorum respectu ejus conjugatorum in alia curva secundi ordinis sita sunt.

7.

Hic quaestio praetermittenda non videtur num vice versa sex puncta in curva aliqua s. o. ex arbitrio sumta tanquam duo systemata punctorum respectu alias curvae s. o. conjugatorum considerari liceat. Facta in (3), (6) coefficientium $a_{\varkappa,\lambda}$ eliminatione, ut vidimus, $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aequationes conditionales prodeunt; hoc igitur casu, quo $n = 3$ ponitur, unica aequatio inter coordinatas intercedit. Unde sequitur si e duobus systematis punctorum respectu alicujus curvae s. o. quinque ad arbitrium ponantur, sextum in curva quadam ex arbitrio sumi posse, quam curvam per secundum theorema eam secundi ordinis esse videmus, quae per quinque puncta ex arbitrio sumta determinatur.

Simulac vero sex puncta 1 2 ... 6 ita determinata sunt, ut pro duobus systematis curvae alicujus s. o. habere liceat, quoque ipsa prorsus determinata est, quod coefficientium $a_{\varkappa,\lambda}$, quas aequatio curvam analytice re-

praesentans continet, determinandorum numerus aequationum conditionalium numero superatur. Unde habetur:

Theorema 3.

Quaelibet sex puncta in curva aliqua secundi ordinis sita et quolibet modo in duo systemata trium punctorum divisa, duo sunt systemata punctorum respectu curvae cujusdam alius secundi ordinis conjugatorum.

Sed cum sex puncta decem rationibus in duo systemata trium punctorum dividi possint, decem curvae s. o. diversae exstant, quarum cuique sex illa puncta duo sunt systemata punctorum conjugatorum.

Igitur si spectamus theorema antecedens, facile intelligitur problema: datis e duobus systematis punctorum conjugatorum quinque punctis sextum punctum invenire cum problemate: datis quinque punctis curvae alicujus s. o. sextum aliquod punctum in eadem curva positum invenire, prorsus congruere.

8.

Vidimus supra proposita curva aliqua s. o. $f(x_1 x_2 x_3) = 0$, ut puncta p, q respectu ejus conjugata sint, inter coordinatas eorum aequationem respectu coefficientium expressionis $f(x_1 x_2 x_3)$ linearem locum habere:

$$x_1^{(p)} f'(x_1^{(q)}) + x_2^{(p)} f'(x_2^{(q)}) + x_3^{(p)} f'(x_3^{(q)}) = 0.$$

Igitur quot paria punctorum conjugatorum consideramus tot hujusmodi aequationes habemus. Cum vero expressio $f(x_1 x_2 x_3)$ quinque coefficientes contineat, quinque paribus punctorum conjugatorum datis curva ipsa determinata erit. Quare proponere licet problema: datis quinque paribus punctorum respectu alicujus curvae s. o. conjugatorum curvam construere. Si vero quatuor tantum paria punctorum respectu alicujus curvae s. o. data sunt, inter quinque coefficientes aequationis curvae quatuor aequationes lineares locum habent; quarum ope ex uno coefficiente reliqui lineariter determinari possunt. Sit λ coefficiens, quo reliqui lineariter determinantur. Quo facto curvae aequatio formam induet:

$$\varphi(x_1 x_2 x_3) + \lambda \psi(x_1 x_2 x_3) = 0$$

designantibus φ et ψ functiones s. o., quarum coefficientes e coordinatis punctorum datorum compositi sunt.

Has igitur aequatione λ pro arbitrio sumto omnes curvae repraesentantur, quibus quatuor paria data punctorum conjugatorum sunt. Cum vero, quicunque sit valor ipsius λ aequationi quatuor punctorum coordi-

natae satisfaciant, in quibus curvae $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ concurrunt, omnes curvae s. o. quibus sunt quatuor paria punctorum conjugatorum data, in quatuor punctis concurrunt. Sese offert igitur nobis alterum problema, dignum quod suscipiatur: quatuor puncta intersectionis omnium curvarum s. o. invenire, quae quaelibet quatuor paria punctorum respectu earum conjugatorum data habeant.

Proposita curva aliqua s. o. quodlibet systema punctorum respectu ejus conjugatorum vice trium parium punctorum conjugatorum fungitur. Quare curva ipsa cum dato quolibet systemate punctorum conjugatorum datisque duobus quibuslibet paribus punctorum conjugatorum, tum duobus quibuslibet systematis punctorum conjugatorum in curva aliqua s. o. sitis determinata erit. Si vero e duobus systematis punctorum respectu curvae alicujus s. o. conjugatorum quinque puncta data sunt, hoc modo quatuor tantum puncta in illa curva sita determinata erunt.

9.

Jam legem reciprocitatis, quoad ejus usum faciam, paucis verbis adumbrem, cujus ope ex antecedentibus alia theoremata sine magno negotio fluunt, quas commemorandas existimaverim. Haec lex ea re nititur quod, curva aliqua s. o. proposita, quae directrix appelletur, si puncta quaedam in linea recta sita sunt eorum lineae polares in polo illius lineae concurrunt et si lineae quaedam in uno puncto concurrunt earum poli in linea polari illius puncti siti sunt. Unde elucet cuique theoremati, quod docet quasdam lineas in uno puncto concurrere aut quaedam puncta in linea recta sita esse, alterum theorema respondere, quod vice versa enuntiat, quaedam puncta in linea recta sita esse, aut quasdam lineas in uno puncto concurrere, ita ut cuique lineae alterius quoddam punctum alterius theorematis respondeat.

Sic porro cuique puncto in curva aliqua s. o. sito linea aliam curvam s. o. tangens et cuique lineae curvam priorem tangenti punctum in posteriori situm respondet. Talium curvarum alteram alterius curvam respectu directricis propositae polarem vocabimus. Proposita curva aliqua s. o. binas lineas, quarum altera ducta est per polum alterius respectu curvae propositae conjugatas appellare convenit, cum respondeant binis punctis respectu curvae polaris conjugatis. Denique ternae lineae, quarum quaeque linea est polaris puncti, in quo coeunt duae reliquae, systema linea-

rum respectu curvae propositae conjugatarum constituant, quippe quod systemati punctorum respectu curvae polaris conjugatorum respondeat.

His praemissis theoremata adjiciamus legis reciprocitatis ope e theorematis 2., 3. sequentia:

Theorema 4.

Proposita curva aliqua secundi ordinis bina systemata quaecunque linearum respectu ejus conjugatarum aliam secundi ordinis curvam tangunt.

Theorema 5.

Latera duorum triangulorum curvae alicui secundi ordinis circumscriptorum pro duobus systematis linearum respectu alius cujusdam curvae secundi ordinis conjugatarum habere licet.

Eadem ratione e §. 8. sequitur: datis quinque paribus linearum respectu curvae alicujus s. o. conjugatarum curvam ipsam determinatam esse: omnes curvas s. o., quae eadem quatuor paria linearum conjugatarum data habeant, quibusdam quatuor lineis simul tangi. Cum vero systema linearum respectu curvae alicujus s. o. conjugatarum pro tribus paribus linearum respectu ejus conjugatarum habere liceat, duo systemata data linearum respectu curvae alicujus s. o. conjugatarum, quae, ut supra intelleximus, curva aliqua s. o. tangantur necesse est, curvam ipsam determinabunt. Si vero e duobus systematis linearum respectu curvae alicujus s. o. conjugatarum quinque lineae datae sunt ea ratione quatuor tantum lineae eam curvam tangentes determinatae erunt.

Denique respicientibus nobis ad definitionem systematis linearum respectu curvae alicujus s. o. conjugatarum observare licet, puncta tria, in quibus binae earum linearum concurrant, systema punctorum respectu ejus curvae conjugatorum constituere. Quare ex antecedentibus hoc fluit theorema notum:

Theorema 6.

Quaelibet triangula duo curvae alicui secundi ordinis inscripta, alii curvae secundi ordinis circumscripta et vice versa quaelibet triangula duo curvae alicui secundi ordinis circumscripta alii curvae secundi ordinis inscripta esse.

10.

Revertamur ad theorema 1. posito $n = 4$ geometrice interpretandum. Quo consilio coordinatae punctorum aliquorum p, q nocentur

$\frac{x_1^{(p)}}{x_4^{(p)}}, \frac{x_2^{(p)}}{x_4^{(p)}}, \frac{x_3^{(p)}}{x_4^{(p)}}; \frac{x_1^{(q)}}{x_4^{(q)}}, \frac{x_2^{(q)}}{x_4^{(q)}}, \frac{x_3^{(q)}}{x_4^{(q)}}$, quae ternis directionibus sibi invicem normalibus sunt parallelae. Quae coordinatae si satisfaciant aequationi (3) puncta determinant, quorum alterum in plano polari alterius situm sit respectu superficiei secundi ordinis aequatione $\Sigma_{\varkappa,\lambda}\, a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda = 0$ repraesentatae. Quo apparet aequationibus sex, quas aequatio (3) positis pro p, q valoribus 1 2 3 4 diversis praebeat, conditiones exprimi ut puncta 1 2 3 4 ita conjugata sint ut planum polare cujuslibet eorum reliqua tangat. Proposita aliqua superficie s. o. bina puncta, quorum alterum in plano polari alterius situm est, puncta respectu superficiei propositae conjugata et quaterna puncta, quorum quodque est polus plani per tria reliqua ducti in sequentibus puncta respectu superficiei propositae conjugata vocabimus. Igitur positis pro p, q valoribus 1 2 3 4 diversis aequatio (6) suppeditat sex relationes quibus satisfieri necesse est, ut puncta 5 6 7 8 conjugata sint respectu ejusdem superficiei ac puncta 1 2 3 4. His vero conditionibus cum theorema (1) doceat omnibus aequationibus homogeneis s. o. variabilium $X_1\, X_2\, X_3\, X_4$, quibus coordinatae 1 2 .... 7 pro variabilibus substitutae satisfaciant, etiam octavi puncti 8 coordinatas satisfacere, hac ex re concludere licet, omnes superficies per septem puncta 1 2 .... 7 ductas etiam per octavum punctum transire. Unde fluit theorema:

Theorema 7.

Proposita superficie aliqua secundi ordinis bina systemata punctorum respectu ejus conjugatorum ita inter se disposita sunt, ut omnes superficies secundi ordinis per septem eorum ductae etiam per reliquum punctum transeant.

Quod theorema, cum quaelibet tres superficies s. o. octo puncta communia habeant, et per septem puncta innumerabiles superficies non eadem curva intersectionis gaudentes duci possint, sic quoque enuntiare licet:

Proposita superficie aliqua secundi ordinis bina systemata punctorum respectu ejus conjugatorum considerari possunt tanquam octo puncta intersectionis trium aliarum superficierum quarundam secundi ordinis non eadem curva intersectionis gaudentium.

11.

Vidimus supra facta e (3), (6) coefficientium $a_{\varkappa,\lambda}$ eliminatione $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aequationes conditionales relinqui. Si igitur $n=4$ ponatur tribus aequationibus coordinatae octo punctorum 1 2 3 .... 8 satisfaciant necesse est, ut tanquam duo systemata punctorum conjugatorum respectu alicujus superficiei s. o. haberi possint. Unde sequitur septem ex iis ad arbitrium sumi posse, octavum inde determinatum esse. Notasse hic juvabit cum aequationes (3), (6) novem aequationes, quibus octavi puncti coordinatae desint, et tres aequationes respectu coordinatarum octavi puncti lineares complectentur, priores ad coefficientes $a_{\varkappa,\lambda}$ determinandas suppeditare, quibus factis posteriores in coordinatis octavi puncti lineariter determinandis succurrere. Igitur si e duobus systematis punctorum respectu superficiei cujusdam s. o. septem puncta data sunt cum superficies ipsa determinata erit, quia coefficientes $a_{\varkappa,\lambda}$ aequationis $\Sigma a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda = 0$ eam repraesentantis coordinatis punctorum datorum exprimere possumus, tum octavum punctum duorum systematum. Cum vero illa septem puncta ad arbitrium ponere liceat e theoremate antecedente sequitur theorema notum:

Theorema 8.

Omnes superficies secundi ordinis per septem puncta ex arbitrio posita ductae octavum punctum quoddam illis determinatum tangunt.

Adjicio alterum theorema antecedentibus probatum:

Theorema 9.

Quaelibet superficies tres secundi ordinis non eadem curva intersectionis gaudentes in octo punctis se invicem secant, quae tanquam duo systemata punctorum respectu alius cujusdam superficiei secundi ordinis conjugatorum considerari licet.

Adnotandum vero hic videtur, cum octo puncta 35 modis in duo systemata quatuor punctorum dirimi possint, 35 superficies s. o. diversae exstare, quarum cuique puncta octo intersectionis trium superficierum s. o. datarum duo sint systemata punctorum conjugatorum.

Jam si respicimus ad theoremata antecedentia dubium non relinquitur, quin problema: e duobus systematis punctorum conjugatorum respectu superficiei alicujus secundi ordinis datis septem punctis octavum punctum invenire, cum problemate datis septem punctis intersectionis trium

superficierum secundi ordinis octavum punctum intersectionis invenire, prorsus congruat.

12.

Proposita superficie aliqua s. o., ut duo puncta respectu ejus conjugata sint, inter coordinatas eorum unica aequatio respectu coefficientium aequationis superficiei linearis locum habere debet. Quare cum aequatio superficiei s. o. novem coefficientes contineat, ad determinandam superficiem novem paria punctorum respectu ejus conjugatorum data esse necesse est. Igitur octo paria punctorum conjugatorum data superficiem non prorsus determinabunt, sed curvam solum intersectionis omnibus superficiebus s. o. communem, quae datis octo paribus punctorum conjugatorum gaudent. Cum enim inter coefficientes aequationis superficiei octo aequationes valeant, earum ope ex uno coefficiente reliqui lineariter determinari possunt. Si igitur per λ coefficiens designatur, quo reliqui lineariter determinantur, aequatio superficiei formam induit:

$$\varphi(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) + \lambda \psi(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0$$

designantibus φ et ψ functiones s. o., quarum coefficientes e coordinatis punctorum datorum compositi sunt. Quae aequatio, λ ad arbitrium sumto, cum repraesentet omnes superficies octo paribus punctorum conjugatorum gaudentes et ei omnium punctorum coordinatae satisfaciant, quae aequationibus $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ simul satisfaciunt, omnes illae superficies eandem curvam intersectionis habebunt. Systema punctorum respectu curvae alicujus conjugatorum vice sex parium punctorum conjugatorum fungitur. Quare omnibus superficiebus dato systemate datisque duobus paribus punctorum conjugatorum gaudentibus eadem est curva intersectionis.

Simili modo probatur omnes superficies, quae septem paria punctorum respectu earum conjugatorum data vel unum systema et unum par punctorum conjugatorum datum habeant, in octo punctis coire. Nam si aequationum septem conditionalium ope e duobus coefficientibus λ, μ reliqui determinantur, hac ratione aequatio superficiei in formam redigitur hanc:

$$\varphi(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) + \lambda . \psi(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) + \mu . \chi(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0.$$

Qua aequatione, cum coefficientes, quos contineat functiones φ, ψ, χ, coordinatis punctorum datorum determinati sint, λ, μ pro arbitrio sumtis, omnes superficies repraesentantur, quae in iisdem octo punctis coeunt.

13.

Lex reciprocitatis, quam adhuc usque ad theoremata adhibuimus, quae ad figuras in eodem tantum plano sitas pertinent, idonea est, quae dilatetur ad figuras in spatio quolibet modo sitas. Omnia enim quae in §. 9. de punctis, lineis, curvis in eodem plano sitis breviter sunt exposita ad puncta in spatio sita, plana, superficies transferri licet. Notum enim est omnium punctorum in plano aliquo sitorum plana polaria respectu superficiei s. o. ad arbitrium sumtae, cui nomen tribuatur directricis, in polo illius plani coire, et omnium planorum in uno puncto concurrentium polos in plano polari illius puncti sitos esse. Si porro punctum in superficie aliqua s. o. movetur, ejus planum respectu directricis polare aliam superficiem s. o. tangit, in qua sibi sunt poli omnium planorum superficiem priorem tangentium. Talium superficierum altera alterius superficiei respectu directricis polaris vocetur. Hac superficies porro ea proprietate sunt, ut si binorum punctorum respectu alterius superficiei conjugatorum plana respectu directricis polaria ducantur, horum planorum respectu alterius superficiei alterum ductum sit per polum alterius et si systematis alicujus punctorum respectu alterius superficiei conjugatorum plana respectu directricis polaria ducantur, terna eorum respectu alterius superficiei in polo reliqui concurrant. Quare proposita superficie aliqua s. o. bina plana, quorum alterum ductum est per polum alterius plana respectu superficiei propositae conjugata et quaterna plana, quorum quodque est planum polare puncti, in quo tria reliqua concurrunt systema planorum respectu superficiei propositae conjugatorum appellabo.

Haec breviter exposita sufficiunt ad theoremata sequentia e theorematis (7), (8), (9) eruenda:

Theorema 10.

Proposita superficie aliqua s. o. bina systemata planorum respectu ejus conjugatorum ita inter se disposita sunt, ut omnes superficies secundi ordinis, quaecunque septem eorum tangunt, etiam octavum planum tangunt.

Cum vero quaelibet tres superficies s. o. octo communia plana tangentia habeant et innumerabiles superficies septem plana data tangentes exstent, quae octo planis neque aliis simul tanguntur, theorema propositum sic quoque enuntiare licet:

Proposita superficie aliqua secundi ordinis bina systemata planorum respectu ejus conjugatorum considerari possunt tanquam octo plana tangentia tribus superficiebus quibusdam communia, quae non alio plano simul tanguntur.

Theorema 11.

Omnes superficies secundi ordinis, quae septem plana ex arbitrio posita tangunt, quoddam octavum quoque planum illis determinatum tangunt.

Theorema 12.

Octo plana tangentia tribus quibuslibet superficiebus secundi ordinis communia, quae non aliis planis simul tanguntur, considerari possunt ut duo systemata punctorum respectu alius cujusdam superficiei secundi ordinis conjugatorum.

Notatu hic dignum est, cum octo plana 35 modis in duo systemata quatuor planorum dirimi possint, 35 superficies exstare quarum cuique, datis tribus superficiebus s. o. non plus quam octo plana tangentia communia habentibus, octo plana tangentia duo sint systemata planorum conjugatorum.

Deinde e §. 12. legis reciprocitatis ope apparet: datis novem paribus planorum respectu superficiei alicujus s. o., vel e duobus systematis planorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum datis septem planis superficiem ipsam determinatum esse: omnes superficies s. o. iisdem octo paribus planorum conjugatorum vel uno systemate et duobus paribus planorum respectu earum conjugatorum datis gaudentes omnibus planis tangi, quae earum quaslibet duas simul tangant: omnes superficies, s. o. septem paribus planorum conjugatorum vel uno systemate et uno pari planorum respectu earum conjugatorum dato gaudentes octo planis simul tangi.

Denique theorema adjicio, quod ex antecedentibus facile fluit simulac cognitum est quatuor plana, quae ductae sint per terna puncta systematis alicujus punctorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum, systema planorum respectu ejusdem superficiei conjugatorum constituere, et quatuor puncta, in quibus terna plana systematis planorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum concurrant, systema punctorum respectu ejusdem superficiei conjugatorum efficere.

Theorema 13.

Duo tetraedra tribus superficiebus secundi ordinis non eadem curva intersectionis gaudentibus simul inscripta tribus aliis superficiebus secundi ordinis simul circumscripta sunt, quae non plus quam octo plana tangentia communia habent, et vice versa: duo tetraedra tribus superficiebus secundi ordinis, quae non plus quam octo plana tangentia habent, simul circumscripta tribus aliis superficiebus secundi ordinis non eadem curva intersectionis gaudentibus simul inscripta sunt.

Sectio altera.

Solvuntur quaedam problemata in sectione antecedente commemorata.

14.

Juvat theoremata (2), (3) geometricis quoque considerationibus probare. Quod cum lemmatis cujusdam ope assecuturi simus, cujus usus in sequentibus erit frequens, inprimis id lemma ad demonstrandum proponamus:

Lemma.

Si in quadrilatero aliquo completo, cujus diagonales tres sunt aa', bb', cc', puncta aa' et bb' pro curva quadam secundi ordinis duo paria punctorum conjugatorum constituunt, etiam puncta cc' puncta respectu ejus curvae sunt conjugata.

Notum enim est proposita curva aliqua s. o. si per puncta respectu ejus conjugata linea ducatur, hanc lineam curvae duobus punctis occurrere, quae cum prioribus quatuor puncta harmonica constituant. Igitur si (Fig. 1) puncta, in quibus diagonales tres curvam secant, vocemus AA', BB', CC' et $aa'AA'$ et $bb'BB'$ puncta harmonica sunt, lemma demonstratum erit simulac puncta $cc'CC'$ harmonica esse ostenderimus. Licet vero figuram 1 pro projectione centrali alius figurae 2 habere, in qua curva secundi ordinis circulus et linea per puncta $a'b'c'$ ducta in infinito posita sit *). Qua in figura, cum punctis figurae 1 respondentibus

---

*) *Poncelet.* Traité des propriétés projectives etc. pag. 54.

eadem signa tributa sint, lineae $AA'bc$; $BB'ac$; $CC'ab$ parallelae reperiuntur. Porro cum notum sit puncta harmonica in projectione centrali harmonica manere, utrasque chordas AA' et BB' linea ab in duas partes inter se aequales secat et, ut puncta $cc'CC'$ in figura 1 harmonica sint, chordam CC' in figura 2 puncto c in duas partes inter se aequales dividi necesse est. Restat igitur ut demonstremus chordam CC' puncto c bifariam dividi, vel perpendiculares tres in chordis AA', BB', CC' erectas per puncta a, b, c ductas in uno puncto convenire. Sed hae lineae ab angulis trianguli abc ad latera opposita perpendiculariter ductae sunt. Igitur in uno puncto concurrunt.

Ex hoc lemmate legis reciprocitatis ope sequitur:

Proposito quadrilatero aliquo si latera opposita duo paria linearum respectu curvae alicujus secundi ordinis conjugatorum constituant etiam diagonales lineas respectu ejusdem curvae conjugatas esse.

15.

Lemma propositum et theorema de hexogrammate curvae alicui s. o. inscripto a *Pascale* litteris mandatum et theorema hocce: duo quaelibet systemata punctorum respectu curvae alicujus s. o. conjugatorum curvae cuidam alii s. o. inscripta esse et vice versa quaelibet sex puncta in curva aliqua s. o. sita pro duobus systematis punctorum respectu cujusdam curvae alius s. o. haberi posse, ea ratione inter se nexa sunt ut ex eorum binis reliquum facile sequatur. Sint enim (Fig. 3) abc; $a'b'c'$ duo systemata punctorum respectu curvae alicujus s. o. conjugatorum. Cum punctum p', in quo lineae ac puncti b polaris linea $b'c'$ occurrit et b puncta sint conjugata, cum porro punctum p, in quo $a'c'$ puncti b' polaris et bc coeunt, et b' puncta sint conjugata; secundum lemma propositum puncta P et P', in quibus concurrunt lineae bc, $b'c'$ et bb', pp' conjugata erunt. Igitur puncti P polaris per P' transibit. Punctum P vero situm est in utraque linea bc et $b'c'$ quare linea aa' earum polos jungens puncti P polaris erit et hac ex causa punctum P' tanget. Igitur lineae tres aa', bb', pp' in uno puncto concurrant necesse est. Quod sic quoque enuntiari licet: latera hexagoni $aa'c'b'bc$ opposita in tribus punctis concurrere, quae in linea recta reperiantur. Unde theorematis *Pascalis* ope sequitur altera pars theorematis supra propositi, hexagonum illud curvae alicui inscriptum esse.

Si vero ad alteram partem illius theorematis demonstrandam statuimus hexagonum $aa'c'b'bc$ curvae alicui s. o. inscriptum esse e theoremate *Pascalis* sequitur lineas aa', bb', pp' in uno puncto concurrere. Cum vero curva aliqua s. o. quinque paribus punctorum conjugatorum determinetur, puncta abc pro systemate punctorum conjugatorum et $b'c'$ et $b'p$ pro duobus paribus punctorum conjugatorum respectu curvae alicujus s. o. considerare possumus. Haec curva gaudet punctis PP' conjugatis quia bp' et $b'p$ puncta conjugata sunt. Quare linea $P'a$ puncti P polaris erit. Praeterea linea pc' puncti b' polaris erit quia $b'p$ et $b'c'$ puncta conjugata sunt. Unde sequitur punctum a' in quo coeant lineae $P'a$ et pc lineae $b'c'$ polum esse. Igitur etiam puncta $a'b'c'$ systema punctorum respectu ejus curvae conjugatorum constituunt, cui alterum systema abc punctorum conjugatorum esse supposuimus.

Hujus theorematis et lemmatis ope theorema *Pascalis* hac ratione probatur. Sit $aa'c'b'bc$ hexagonum quodlibet curvae alicui s. o. inscriptum. Cum puncta abc, $a'b'c'$ pro duobus systematis punctorum respectu curvae cujusdam s. o. conjugatorum habere liceat, ita inter se disposita sunt, quod lemmatis ope antea demonstravimus, ut hexagoni latera opposita in tribus punctis concurrant, quae in recta linea sita sint.

Denique restat ut lemma demonstretur. Proposita curva aliqua s. o. ab et $a'b'$ (Fig. 4) duo paria sint punctorum respectu ejus conjugatorum. Si puncta, in quibus lineae aa', bb' et ab', $a'b'$ concurrunt per P_1 et P_2 designamus lemma probatum erit, simulac puncta P_1P_2 conjugata esse ostenderimus. Quo consilio supponamus c et c' polos esse linearum ab et $a'b'$. Quibus statutis puncta abc, $a'b'c'$ duo systemata punctorum respectu curvae propositae conjugatorum erunt. Qua ex causa latera hexagoni $b'acba'c'$ in tribus punctis $P_2P_3P_4$ concurrunt in linea recta sitis. Cum vero punctum P' polus sit lineae per P_3P_4 ductae puncta P_1P_2 conjugata erunt respectu curvae propositae.

16.

Problema 1.

Dato systemate abc punctorum respectu cujusdam secundi ordinis curvae conjugatorum datisque duobus paribus $a''A$, $b''B$ punctorum respectu ejus conjugatorum punctorum a'', b'' lineas polares invenire.

Ducantur (Fig. 5) lineae aa'' et bb'' in p coeuntes. Inde ducantur lineae pA et pB lineis bc et ac in α et β occurrentes et $\beta b''$, bB, $\alpha a''$, aA lineis jungantur, quarum priores in β', posteriores in α' concurrant. Denique linea $\alpha'\beta'$ ducatur lineae ac in β'', lineae bc in α'' occurrens et jungantur $B\beta''$ et $A\alpha''$. Quibus factis $B\beta''$ ipsius b'', $A\alpha''$ ipsius a'' erit linea polaris. Nam si lineas $b\beta$, $b''B$ tanquam quadrilateri completi diagonales contemplemur, tertia ejus diagonalis $p\beta'$ erit, et cum $b\beta$, $b''B$ duo paria sint punctorum conjugatorum, secundum lemma etiam $p\beta'$ puncta erunt conjugata. Sic porro demonstratur lineis $a\alpha$, $a''A$, $p\alpha$ tanquam quadrilateri completi diagonalibus habitis puncta $p\alpha'$ conjugata esse. Unde elucet $\alpha'\beta'$ polarem esse ipsius p. Cum vero in β'' lineae $\alpha'\beta'$, ac coeant, linea $b\beta''$, quippe quae earum polos tangat, est puncti β'' polaris. Tangit igitur puncti b'' polaris et B et β''. Unde sequitur $B\beta''$ ipsius b'' eademque ratione $A\alpha''$ ipsius a'' polarem esse.

In posterum usum adjiciendum videtur, quomodo puncti c'', in quo coeunt lineae Ab'' Ba'', linearum jamjam ductorum ope linea polaris construatur, quam cum lineis $a''b''$ et AB in uno puncto C concurrere lemma antecedens enuntiat cum $a''A$, $b''B$, $c''C$ diagonales sint ejusdem quadrilateri completi. Hunc in finem ducantur lineae $\beta''c''$, $\alpha''c''$ lineis pa et pb in a''' et b''' occurrentes. Porro si linea $a'''b'''$ ducitur lineam $\alpha'\beta'$ in γ'' secans, junctis $\gamma''C$ punctis, $\gamma''C$ puncti c'' est polaris. Etenim $\alpha''a'''$, $\beta''b'''$, $\gamma''c'''$ diagonales sunt quadrilateri cujusdam completi et puncta $\alpha''a'''$, $\beta''b'''$ duo paria punctorum conjugatorum constituunt.

17.

Problema 2.

Datis e duobus systematis punctorum respectu superficiei alicujus secundi ordinis septem punctis octavum punctum invenire.

Sint $abcd$, $a'b'c'd'$ duo systemata punctorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum. Ducantur lineae da', db', dc', $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$, quae planum per abc ductum in punctis $a''b''c''$, ABC secent. Quae puncta ita inter se disposita sunt, ut per $a''b''C$, $b''c''A$, $c''a''B$ tres lineae rectae duci possint. Porro tria plana per puncta $d'b'c'$, $d'c'a'$, $d'a'b'$ ducantur, quae planum abc in lineis $A\alpha''$, $B\beta''$, $C\gamma''$ secent. Per has lineas et punctum d si tria plana ducimus, haec plana erunt polaria punctorum $a''b''c''$. Cum enim omnium punctorum, quae sita sunt in linea da',

plana polaria per intersectionem planorum $b'c'd'$ et abc ducta sint et punctum a'' in hac linea et in plano abc situm sit, ejus planum polare per lineam Aa'' et punctum d transeat necesse est. Eademque ratione probatur $B\beta''d$ ipsius b'' et $C\gamma''d$ ipsius c'' planum polare esse. Sed superficiei et plani abc curvam intersectionis contemplemur et lineas et puncta in plano abc constituta respectu ejus curvae interpretemur. Respectu hujus curvae puncta abc systema punctorum conjugatorum constituent et Aa'' ipsius a'', $B\beta''$ ipsius b'', $C\gamma''$ ipsius c'' lineae polares erunt. Jam si punctum d' non est datum linearum Aa'', $B\beta''$, $C\gamma''$ nonnisi puncta ABC ea ratione, qua usi sumus, determinari possunt. Sed in usu sunt hae lineae ad determinandum punctum d'. Nam si per eas et per lineas $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ tria plana ducantur in puncto d' concurrent. Quam meditemur quomodo lineae Aa'', $B\beta''$, $C\gamma''$, puncto d' non cognito reperiemus. Haec rem questio in problema I. redit. Si enim respicimus ad curvam in plano abc sitam respectu ejus datum est systema abc punctorum conjugatorum et tria paria $a''A$, $b''B$, $c''C$ punctorum conjugatorum.

18.

Etsi problema antecedens omnino est absolutum ad nexum octo punctorum, quae duo systemata punctorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum constituunt, melius intelligendum et inde alteram problematis antecedentis solutionem deducendam investigationem datorum octo punctorum de integro succipiamus.

Datis systematis duobus $abcd$, $a'b'c'd'$ punctorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum punctum plane dbb' et lineae aa' commune p vocetur. Hujus puncti, quia situm est in linea polas aa' jungente, planum polare per intersectionem planorum polarium bcd et $b'c'd'$ transibit, et quia hoc punctum in plano dbb' inest, ejus planum polare per intersectionem plani $a'c'd'$ et lineae ac transeat necesse est. Si igitur planum ducis per puncta tria intersectionis plani bcd et lineae $b'c'$; $b'c'd'$ et bc; $a'c'd'$ et ac puncti p habes planum polare. Sed ejusdem plani quartum punctum facile invenitur hoc modo. Ducantur lineae pa' et pb', quarum altera punctum a tanget, altera lineam db in puncto aliquo secabit, quod vocemus q. Hujus vero puncti planum polare cum per a, et ipsius b' planum polare per a' transeat, puncti p planum polare secundum

lemma per intersectionem linearum qa' et ab', id est per intersectionem plani bda' et lineae ab' transibit. Hoc igitur punctum intersectionis, si designemus per $(da'b.ab')$ eademque ratione alia puncta, quae contemplabimur, per planum et lineam, in quibus sita sunt; puncta quatuor $(d'b'c'.bc)$, $(d'c'a'.ca)$, $(dbc.b'c')$, $(da'b.ab')$ in eodem plano sita sunt, vel, si lineae per puncta designentur, per quae ductae sunt, ea ratione ut $(b'c'd'.bc)$ $(a'c'd'.ac)$ lineam significet per puncta $(b'c'd'.bc)$ et $(a'c'd'.ac)$ ductam; linearum:

$$(d'b'c'.bc)(d'c'a'.ca) \quad \text{et} \quad (da'b.ab')(dbc.b'c')$$

altera alteram secat.

19.

Nunc puncta octo, quae ut supra adnotavimus, quolibet modo in duo systemata quatuor punctorum divisa pro duobus systematis punctorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum haberi possint, quam nullum inter reliqua eminent, relatione eorum inventa per numeros designari convenit, ita ut signorum $cab'c'a'bd'd$ loco scribantur 12345678. Quo facto linearum (734.61)(745.12), (856.23)(861.34) priorem, quam designemus per I, a posteriori secari, quam vocemus (III), paragrapho antecedente jamjam demonstratum est. Sic porro designentur:

(734.61)(745.12)	per	I,	(834.61)(845.12)	per	(I),
(745.12)(756.23)	-	II,	(845.12)(856.23)	-	(II),
(756.23)(761.34)	-	III,	(856.23)(861.34)	-	(III),
(761.34)(712.45)	-	IV,	(861.34)(812.45)	-	(IV),
(712.45)(723.56)	-	V,	(812.45)(823.56)	-	(V),
(723.56)(734.61)	-	VI,	(823.56)(834.61)	-	(VI).

Quarum expressionum quaelibet ex antecedente obtinetur signa 1 2 3 4 5 6 mutando in 2 3 4 5 6 1. Sed ut perspiciatur quomodo hae duodecim lineae inveniantur, puncta 1 2 3 ... 6 deinceps sex lineis jungamus ita ut hexagonum efficiatur, quod vocemus *H*. Hujus hexagoni latus quodque plano per latus oppositum et punctum 7 ducto secetur. Quo facto sex puncta intersectionis nanciscimur quibus ex ordine per lineas junctis lineas habemus I II .... VI alterum efficientes hexagonum quod designemus per *A*. Tertium hexagonum *B* nanciscimur, si loco puncti 7 eadem ratione puncto 8 utamur. Cujus hexagoni latera ea erunt, quae per (I) (II) .... (VI) designavimus. Haec tria hexagona proprietatibus memoratu dignis gau-

dent, quarum explicationem jam aggrediamur. Lineae tres per angulos hexagoni *A* oppositos ductae in puncto 7 sicuti lineae tres per angulos hexagoni *B* oppositos ductae in puncto 8 concurrunt. Cum enim puncta (734.61) et (761.34) in oppositis angulis hexagoni *A* siti sint, quae in intersectione planorum 734 et 761 punctum 7 tangentium coincidant, linea per haec puncta ducta punctum 7 tanget etc. Qua ex re apparet hexagoni *A* sicuti hexagoni *B* latus quodcunque per oppositum secari, et tria plana per latera opposita hexagoni *A* ducta in puncto 7, sicuti tria plana per latera opposita hexagoni *B* ducta in puncto 8 concurrere. Quod vero ad latera hexagonorum diversorum attinet I III V et (I) (III) (V) altera ab alteris secantur. Cum enim latera I (III) concurrere ostensum sit et signis 1 2 3 4 5 6 7 8 mutatis in 5 6 1 2 3 4 8 7 signa lineae (III) in I et I in (V) abeant, latus I etiam a (V) secatur. Praeterea lineae I (I) concurrunt, quia utraque in plano 612 sita est. Quo facto signa 1 2 3 4 5 6 in 3 4 5 6 1 2 vel 5 6 1 2 3 4 mutando linearum III V utramque a lineis (I) (III) (V) secari ostenditur. Eademque ratione laterum II IV VI et (II) (IV) (VI) altera cum alteris concurrere demonstratur. Si igitur, quae de lateribus hexagonum *A* et *B* enuntiata sunt, breviter complectimur, cum laterum I III V (II) (IV) (VI) et (I) (III) (VI) II IV VI altera ab alteris secentur ea omnia in eadem hyperbolida sita esse dicere possumus. Unde respicientibus nobis ad theoremata antecedentia hoc fluit theorema:

Theorema 14.

Si ex octo punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis non eadem curva intersectionis gaudentium sex puncta certo quodam ordini disposita lineis jungantur, ita ut hexagonum efficiatur, cujus latus quodque plano per latus oppositum et septimum punctum ducto secetur, qua constructione sensu peripheriae pergendo certo ordini sex puncta obtinentur, quae sex lineis deinceps junguntur, ita ut alterum hexagonum *A* efficiatur, si porro prioris hexagoni latus quodque plano per latus oppositum et octavum punctum ducto secetur, quae puncta intersectionis lineis deinceps jungendo eodem modo tertium hexagonum *B* nanciscamur; utrumque hexagonum *A, B* in eadem hyperbolida situm est.

Hexagona *H, A, B* ita inter se comparata sunt, ut si eorum bina data sint, tertium facile reperiatur. Quod sine magno negotio patet, si hexagona *A, B* data sunt. Linea enim, quae jungit laterum I II et

(I) (II) puncta intersectionis, latus 12 hexagoni H erit. Si vero hexagona H, A data sunt videamus quomodo hexagonum B inveniatur. Hujus hexagoni latus (I) cum situm sit in plano per I et 1 ducto et a lineis III et V secetur, ea linea erit, quae puncta jungit, in quibus lineae III et V plano per I et 1 ducto occurrunt. Sic porro invenimus secundum latus (II) si puncta jungimus, in quibus latera IV et VI plano per II et 2 ducto occurrunt etc. Sed notam juvat cum hexagona H et A septem punctis 1 2 3 .... 7 datis determinata sint hexagonum B horum punctorum ope construere nos docuisse. Quo hexagono B datorum septem punctorum ope invento intersectio trium planorum, quorum quodque per bina latera opposita ipsius B transit, octavum punctum x determinabit.

Regiom. 25 Jan. 1840.

21.
Ein früherer Brief Lagrange's an Laplace.

Vorwort.

Dieser merkwürdige Brief ist mir während meines letzten Aufenthalts in Paris von der verwittweten Marquise *de Laplace,* die das Andenken ihres Gatten auf eine edle Weise selbst durch wissenschaftliche Stiftungen zu feiern weiſs, mitgetheilt worden. *Laplace* hatte kurz vor seinem Tode die Briefe, die er von *Lagrange* empfangen, sorgfältig geordnet und selbst abgeschrieben. Die Thatsache, daſs es der Berliner Akademie fast geglückt wäre, beide groſsen Männer in ihrem Schooſse zu vereinigen, ist von groſsem historischen Interesse und bisher, so viel ich weiſs, ganz unbekannt. Sie war mir um so auffallender, als *Laplace,* in dem vieljährigen, so nahen Umgange, dessen er mich würdigte, dieses Umstandes seines frühern Lebens nie in Gesprächen erwähnt hatte.

Berlin im October 1839.

Al. v. Humboldt.

A Berlin le 15 Mars 1773.

Monsieur.

J'ai reçu votre Mémoire manuscrit sur l'intégration des équations etc., et je l'ai présenté à notre Académie qui m'a d'abord chargé de vous faire ses remercimens. Comme ce n'est point l'usage chez nous de faire examiner par des commissaires les ouvrages et les pièces présentées, et encore moins d'en délivrer aux auteurs des rapports authentiques, comme cela se pratique à l'Académie des sciences de Paris, je ne puis vous satisfaire à cet égard; mais il me semble que vous n'y devez avoir aucun regret; les personnes de votre mérite n'ont pas besoin de se faire valoir pas ces sortes de moyens; d'ailleurs le suffrage de Mr. *d'Alembert* ne doit vous rien laisser à désirer, et je suis très persuadé que l'Académie des Sciences ne manquera pas de vous rendre la justice qui vous est due à moins que des raisons étrangères ne l'en empêchent, auquel cas je ne vois pas de quelle influence pourroit être l'approbation de Académie de Berlin.

Je suis charmé de voir par votre lettre que vous conserviez le dessein de venir ici; je souhaite de tout mon coeur que vous puissiez l'exécuter, et je serois très-flatté de pouvoir y contribuer en quelque chose; mais ayant de nouveau réflechi sur cette affaire, je suis de plus en plus convaincu que le meilleur, et peut être le seul moyen de la faire réussir, est celui que j'ai conseillé à Mr. *d'Alembert.* Le Roi vient d'assigner une pension de 500 écus sur la caisse de l'Académie à un Mr. *Pilati* qui est auteur d'un ouvrage italien intitulé „Della Reforma d'Italia," mais il ne l'a point mis de l'Académie; ensorte qu'elle doit regarder cela comme une perte; c'est pourquoi en faisant votre acquisition elle aura doublement à se feliciter. De mon coté je serai enchanté de pouvoir lier avec vous une connaissance plus intime, et votre amitié sera pour moi un avantage auquel je serai toujours infiniment sensible.

Je n'ai pas eu encore le loisir de lire votre Mémoire d'un bout à l'autre, mais ce que j'en ai lu suffit pour me donner la plus haute idée de vos talents. Votre théorie de l'intégration des équations linéaires à différences finies est très-belle, et ne laisse ce me semble rien a désirer; je ne sais pas si vous aurez lu ce que j'ai donné autrefois sur cette matière dans le 1er Vol. des Mélanges de Turin. Je n'avais fait alors que l'effleurer, et je me proposois toujours de l'approfondir davantage, mais vous venez de l'épuiser et je suis charmé que vous ayez si bien rempli les engagemens que j'avois contractés à cette occasion avec les géomètres. J'ai vu surtout avec beaucoup de plaisir l'application heureuse que vous avez faite à ces sortes d'équations, de mon théorème sur la manière de trouver les intégrales completes à l'aide des particulières. Quant aux séries recurro-recurrentes à deux ou plusieurs indices variables, c'est une matière toute neuve que vous aurez l'honneur d'avoir défriché le premier. Cependant il me semble que vous ne l'avez pas envisagé avec toute la généralité dont elle est susceptible; car les équations de ce genre sont parmi les équations à différences finies, ce que les équations à différences partielles sont parmi les équations différentielles ordinaires. Si l'on a par exemple l'équation $y_{n,x} = k y_{n-1,x-1}$, k étant une constante; il est visible que son intégrale complete sera $y_{n,x} = k^n \varphi(n-x)$, φ désignant une fonction arbitraire, d'où l'on voit que pour résoudre ces sortes d'équations il n'est pas nécessaire comme vous paroissez le croire d'avoir une équation

particulière pour le cas de $n = 1$, qu'au contraire cette équation particulière empêche qu'on ne parvienne à la solution générale.

Comme notre Académie ne peut faire aucun usage de votre Mémoire puisqu'elle ne fait point imprimer les Mémoires présentés, je vous le renverrai par la première occasion que je pourrai trouver; Mr. *d'Alembert* pourra facilement vous procurer un libraire qui se charge de l'imprimer avec les autres dont vous me parlez, et dont d'avance j'ai une grande idée.

A l'égard de ma théorie de Jupiter et de Saturne, comme ce n'est qu'un essai, il se peut que les équations séculaires que j'en ai déduites ne soient pas assez exactes faute de n'avoir pas poussé l'approximation assez loin; c'est aussi une des matières que je me proposois de discuter de nouveau lorsque je serois debarassé de quelques autres travaux. Je me féliciterai d'avoir été prévenu par vous si vos recherches ne me laissent plus rien à faire sur ce sujet.

Il est vrai que les équations séculaires doivent être indépendantes de la position du plan de projection, comme le sont les mouvemens moyens, mais cela ne doit proprement avoir lieu, ce me semble, que pour les équations séculaires vraies qui augmentent toujours avec le temps, et non pour celles qui ne sont qu'apparentes, et qui dependent des sinus et des cosinus d'angles: or celles que j'ai trouvées par ma théorie sont de cette dernière espèce.

J'ai l'honneur d'être avec la plus parfaite considération

Monsieur

votre très humble et très obéissant serviteur

De Lagrange.

Je remets à Monsieur le Baron *de Humboldt,* une copie de la lettre qui ouvre une correspondance entre Mr. *de Lagrange,* et Mr. *de Laplace,* depuis 1773 jusqu'à 1784 dont le manuscrit est écrit de la main de Mr. *de Laplace.* Arcueil ce 22 Octobre 1838.

Marquise de Laplace.

22.

Recension der „Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludwig August Seeber, Dr. der Philosophie, ordentl. Professor an der Universität in Freiburg. 1831. 248 S. in 4."

(Mit Genehmigung des Herrn Verfassers aus den Göttingischen gelehrten Anzeigen vom Jahre 1831, 108tes Stück, abgedruckt.)

Die Functionen zweier unbestimmten Gröſsen x und y von der Gestalt $axx+2bxy+cyy$, wo a, b, c bestimmte ganze Zahlen vorstellen, bilden bekanntlich unter dem Namen der *quadratischen Formen*, oder, wo eine weitere Unterscheidung erforderlich wird, der *binären quadratischen Formen*, einen der interessantesten und reichhaltigsten Gegenstände der höhern Arithmetik. Die dabei zunächst vorkommenden Aufgaben: zu entscheiden, ob eine solche gegebene Form eine andere $a'x'x'+2b'x'y'+c'y'y'$ unter sich begreift, d. i. durch eine Substitution $x=\alpha x'+\beta y'$, $y=\gamma x'+\delta y'$, in welcher α, β, γ, δ ganze Zahlen sind, in dieselbe verwandelt werden kann; ob eine solche Relation zweier Formen eine gegenseitige ist, wo die Formen äquivalent heiſsen; ferner in beiden Fällen alle möglichen Umformungen der einen in die andere anzugeben; endlich alle möglichen Darstellungen einer gegebenen ganzen Zahl durch eine gegebene Form vermöge ganzer Werthe der unbestimmten Gröſsen aufzufinden — diese Aufgaben sind in den *Disquisitiones Arithmeticae* vollständig aufgelöset, machen aber von dem die quadratischen Formen betreffenden Abschnitte dieses Werks nur den bei weiten kleineren Theil aus. Die darauf folgenden feineren Untersuchungen erforderten zum Theil eine vorläufige Bearbeitung eines um eine Stufe höheren und viel gröſsere Schwierigkeiten darbietenden Feldes, nemlich der Lehre von ähnlichen Functionen dreier unbestimmter Gröſsen x, y, z, welche also die Gestalt haben $axx+byy+czz+2a'yz+2b'xz+2c'xy$, und ternäre quadratische Formen heiſsen.

Die Auflösung der diese ternären Formen betreffenden Haupt-Aufgaben ist in dem erwähnten Werke entwickelt, jedoch nur so weit, als zu dem angezeigten Zwecke nothwendig war. Nach einem Zwischenraum von dreifsig Jahren hat nun der Verfasser des vorliegenden Werks zuerst diese Untersuchungen wieder aufgenommen und in Beziehung auf die eine Hauptgattung der ternären Formen, nemlich die positiven, dasjenige was in den *Disquisitiones Arithmeticae* unvollendet gelassen war, zur Vollständigkeit gebracht. Für Diejenigen, welche aus der höheren Arithmetik ein tieferes Studium gemacht haben, würden wir dasjenige, was in dem vorliegenden Werke Neues geleistet ist, mit wenigen Worten bezeichnen können; allein, um auch Andern verständlich zu sein, müssen wir uns etwas mehr Ausführlichkeit verstatten, und wir thun dies um so lieber, da diese Untersuchungen auch aufserhalb des Gebietes der höheren Arithmetik ein eigenthümliches Interesse haben.

Die Eigenschaften einer binären Form $axx+2bxy+cyy$ hängen vornehmlich von der Zahl $bb-ac$ ab, welche daher der Determinant jener Form heifst. Zwei äquivalente Formen haben allemal gleiche Determinanten. Allein nicht alle Formen, die einen gegebenen Determinanten haben, sind darum schon äquivalent: vielmehr zerfallen solche Formen in eine kleinere oder gröfsere, aber stets endliche, Anzahl von Classen, so dafs die zu einerlei Classe gehörigen unter sich äquivalent, die zu verschiedenen Classen gehörenden hingegen nicht äquivalent sind. Durch Formen, deren Determinant positiv ist, lassen sich ohne Unterschied positive und negative Zahlen darstellen; hingegen durch Formen mit negativem Determinanten sind nur solche Zahlen darstellbar, welche mit a und c einerlei Zeichen haben, daher hier positive und negative Formen unterschieden werden. Die einfachsten Formen in jeder Classe haben bestimmte Kriterien, heifsen reducirte Formen, und können als Repräsentanten der ganzen Classe betrachtet werden.

Aehnliche Verhältnisse in Beziehung auf die ternären Formen sind in den *Disquisitiones Arithmeticae* nachgewiesen. Determinant der ternären Form $axx+byy+czz+2a'yz+2b'xz+2c'xy$ heifst die Zahl $aa'a'+bb'b'+cc'c'-abc-2a'b'c'$. Auch hier ist zur Aequivalenz zweier Formen die Gleichheit der Determinanten erforderlich, aber nicht zureichend, sondern sämmtliche Formen mit einem bestimmten Determinanten zerfallen in eine endliche Anzahl von Classen, in deren jeder die

einfachsten Formen reducirte heifsen können und alle übrigen gleichsam repräsentiren. Mit dem Unterschiede zwischen positiven und negativen Formen verhält es sich aber hier anders, als bei den binären Formen. Für jeden gegebenen Determinanten, er sei positiv oder negativ, giebt es theils Formen, durch welche ohne Unterschied positive und negative Zahlen darstellbar sind (indifferente Formen), theils solche Formen, durch die entweder nur positive oder nur negative Zahlen sich darstellen lassen (positive oder negative Formen); allein positive Formen giebt es nur für negative Determinanten, und negative nur für positive. Uebrigens ist es von selbst klar, dafs die Qualification einer Form, insofern sie indifferent, positiv oder negativ ist, zugleich der ganzen Classe, zu welcher sie gehört, zukommt. Das vorliegende Werk beschränkt sich auf die positiven Formen, deren Determinanten also negativ sein müssen: offenbar findet aber alles, was von diesen gilt, von selbst seine Uebertragung auf die negativen Formen, während die in dem Werke ganz ausgeschlossenen indifferenten Formen eine ganz abweichende Behandlung erfordern.

In den *Disquisitiones Arithmeticae* war, wie schon erwähnt ist, die Theorie der ternären Formen nur so weit entwickelt, als für den dortigen Zweck nöthig war, und daher die Aufgabe, die Aequivalenz zweier gegebenen ternären Formen zu entscheiden, noch nicht in vollständiger Allgemeinheit aufgelöset. Zwar war daselbst gezeigt, wie man zu jeder vorgegebenen Form eine äquivalente der einfachsten Art finden, und dafs es solcher reducirten Formen für jeden gegebenen Determinanten nur eine endliche Anzahl geben könne; allein da es in jeder Classe mehrere solcher reducirten Formen giebt, die sich nicht in allen Fällen *sogleich* als äquivalent ergeben, so fehlte noch ein Kriterium, woran man die Aequivalenz oder Nicht-Aequivalenz solcher Formen mit Gewifsheit erkennen kann. Dieses Bedürfnifs hat nun der Verfasser des vorliegenden Werks in Beziehung auf die positiven Formen vollständig und mit musterhafter Gründlichkeit gehoben. Sein Verfahren ist übrigens etwas anders eingekleidet, als wir die Sache so eben ausgesprochen haben, und wie sie sich verhalten müfste, wenn man in den Begriff der reducirten positiven Formen nur die wesentlichsten Bedingungen der gröfsten Einfachheit aufnimmt, welche in dem Fall der positiven Formen die sind, dafs die (ihrer Natur nach positiven) Zahlen a, b, c nicht kleiner sein dürfen, als respective b' oder c', a' oder c', a' oder b' ohne Rücksicht auf die Zeichen. Herr *Seeber*

hat nemlich dem Begriffe der reducirten Formen noch solche Modificationen hinzugesetzt, dafs es in jeder Classe immer nur Eine der Art geben kann, Eine aber geben mufs. Wegen eines schönen, von Herrn *Seeber* durch Induction gefundenen, weiter unten noch zu erwähnenden Theorems führen wir hier die Hauptbedingungen, welche Herr *S.* in den Begriff der reducirten Formen aufgenommen hat, an: diese sind 1) dafs unter den Zahlen a', b', c' nicht zwei von entgegengesetzten Zeichen sein dürfen; 2) dafs ohne Rücksicht auf das Zeichen $2b'$ und $2c'$ nicht gröfser als a sein dürfen, ferner a und $2a'$ nicht gröfser als b, und b nicht gröfser als c; 3) dafs in dem Falle, wo a', b', c' zugleich negativ sind, die doppelte Summe dieser Zahlen nicht gröfser als $a+b$ sein darf. Die übrigen noch für einige specielle Fälle hinzukommenden Modificationen können wir hier übergehen.

Den Hauptinhalt des Werkes macht nun zuerst die Auflösung der Aufgabe aus, zu jeder gegebenen positiven Form eine äquivalente zu finden, die nach der festgesetzten Definition den Charakter einer reducirten hat, und dann der strenge Beweis des Lehrsatzes, dafs zwei nicht identische reducirte Formen nicht äquivalent sein können, oder, was dasselbe ist, dafs es in jeder Classe nur eine reducirte Form giebt. Dem Geiste der Gründlichkeit, womit diese Gegenstände drrchgeführt sind, müssen wir volle Gerechtigkeit widerfahren lassen, und wenn wir es dabei bedauern müssen, dafs damit eine sehr grofse und vielleicht Manchen abschreckende Weitläuftigkeit verbunden gewesen ist, da die Auflösung des Problems 41 Seiten und der Beweis des Theorems 91 Seiten einnimmt, so wollen wir dies doch keinesweges als einen Tadel angesehen wissen. Wenn ein schwieriges Problem oder Theorem aufzulösen oder zu beweisen vorliegt, so ist allezeit der erste und mit gebührendem Danke zu erkennende Schritt, dafs überhaupt eine Auflösung oder ein Beweis gefunden werde, und die Frage, ob dies nicht auf eine leichtere und einfachere Art hätte geschehen können, bleibt so lange eine müfsige, als die Möglichkeit nicht zugleich durch die That entschieden wird. Wir halten es daher für unzeitig, hier bei dieser Frage zu verweilen. — Der übrige Theil des Werkes enthält noch hauptsächlich die mit gleicher Gründlichkeit durchgeführten Auflösungen der Aufgaben: zu entscheiden, ob eine gegebene Form eine andere gegebene, ihr nicht äquivalente unter sich begreife; alle möglichen Transformationen einer gegebenen Form in eine gegebene äquivalente oder nur

unter ihr begriffene zu finden; endlich für einen gegebenen Determinanten alle möglichen Classen positiver ternärer Formen anzugeben.

Wir müssen noch bemerken, dafs Herr *Seeber* die Gestalt der ternären Formen etwas anders gefafst hat, als in den *Disquisitiones Arithmeticae* geschehen war, wo, mit Vorbedacht, die Coefficienten der Producte yz, xz, xy als gerade Zahlen vorausgesetzt waren, wogegen Hr. *S.* auch ungerade zuläfst, und daher mit a', b', c' bezeichnet, was oben mit $2a'$, $2b'$, $2c'$ bezeichnet war. Offenbar ist die gröfsere Allgemeinheit, welche dadurch erreicht wird, nur scheinbar, oder doch überflüssig, da alles, was von solchen Formen mit ungeraden Coefficienten gesagt werden kann, sich auch von selbst ergiebt, wenn man anstatt derselben ihr Doppeltes in Betracht zieht: wir können daher diese Abänderung, wodurch überdies einiger Verlust an Einfachheit entsteht, nicht billigen. Eine Folge davon ist gewesen, dafs das, was Herr *Seeber* Determinant nennt, allemal das Vierfache von der Zahl ist, welche in den *Disquisitiones Arithmeticae* diesen Namen führt. In gegenwärtiger Anzeige haben wir die Terminologie der *Disquisitiones Arithmeticae* beibehalten.

Bei dem zuletzt erwähnten Problem (zu jedem gegebenen Determinanten alle möglichen reducirten Formen anzugeben) hat Herr *Seeber*, um Grenzen für die drei ersten Coefficienten zu haben, ein Theorem benutzt, vermöge dessen das Product derselben abc nicht gröfser sein kann, als der dreifache Determinant. Dieses Theorem ist von Hrn. *Seeber* strenge bewiesen; allein in der Vorrede bemerkt er, dafs er unter mehr als 600 von ihm untersuchten Fällen nicht einen einzigen gefunden habe, wo jenes Product das Doppelte des Determinanten überschritten hätte, und hält es daher für höchst wahrscheinlich, dafs diese engere Begrenzung allgemein gültig sei; es sei ihm jedoch nicht gelungen, einen strengen Beweis dafür zu finden. Da dieses auf dem Wege der Induction von Herrn *Seeber* gefundene Theorem sowohl an sich merkwürdig, als für die Abkürzung der Auflösung der erwähnten Aufgabe wichtig ist, so wollen wir hier, um auch unsererseits in dieser Anzeige einen Beitrag zur Vervollkommnung dieser Theorie zu geben, einen sehr einfachen Beweis beifügen. Es müssen dabei zwei Fälle unterschieden werden.

I. Wenn von den Zahlen a', b', c' keine negativ ist, so setze man

$$b-2a' = d, \quad c-2b' = e, \quad a-2c' = f,$$
$$c-2a' = g, \quad a-2b' = h, \quad b-2c' = i,$$

wo aus der Definition der reducirten positiven Formen sogleich folgt, dafs wenn

$$axx + byy + czz + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy$$

eine solche ist, keine jener sechs Zahlen negativ ist, so wie sich von selbst versteht, dafs a, b, c positiv sind. Bezeichnet man nun den (negativen) Determinanten der Form durch $-D$, so hat man, wie man sich durch die Entwickelung leicht überzeugt, die identische Gleichung

$$2D - abc = aa'd + bb'e + cc'f + a'hi + b'gi + c'gh + ghi,$$

in welcher keines der sieben Glieder zur Rechten negativ sein kann, und folglich abc nicht gröfser als $2D$. Dasselbe folgt auf gleiche Weise aus der identischen Gleichung

$$2D - abc = aa'g + bb'h + cc'i + a'ef + b'df + c'de + def.$$

II. Wenn keine der Zahlen a', b', c' positiv ist, setze man

$$\begin{aligned} &b + 2a' = d, \quad c + 2b' = e, \quad a + 2c' = f, \\ &c + 2a' = g, \quad a + 2b' = h, \quad b + 2c' = i, \\ &b + c + 2a' + 2b' + 2c' = k, \\ &a + c + 2a' + 2b' + 2c' = l, \\ &a + b + 2a' + 2b' + 2c' = m, \end{aligned}$$

und den Determinanten der Form wie vorhin $= -D$. Vermöge der Definition der reducirten positiven Formen wird keine der neun Zahlen d, e, f, g, h, i, k, l, m negativ sein können, und so ergiebt sich aus der identischen Gleichung

$$\begin{aligned} 6D - 3abc = &- aa'(d + 2k) - bb'(e + 2l) \\ &- cc'(f + 2m) \\ &- a'hi - b'gi - c'gh + def + 2ghi, \end{aligned}$$

in welcher, weil a', b', c' nicht positiv, sondern negativ oder Null sind, alle Glieder zur Rechten positiv oder Null werden, dafs $3abc$ nicht gröfser als $6D$, oder abc nicht gröfser als $2D$ sein kann. Dasselbe folgt eben so aus der identischen Gleichung

$$\begin{aligned} 6D - 3abc = &- aa'(g + 2k) - bb'(h + 2l) \\ &- cc'(i + 2m) \\ &- a'ef - b'df - c'de + 2def + ghi. \end{aligned}$$

Beide Gleichungen sind symmetrisch. Verzichtet man auf völlige Symmetrie, so ist der Beweis mit einer noch geringern Anzahl von Gliedern

zu führen, z. B. durch die identische Gleichung

$$8D - 4abc = -2aa'(g+k) - 2bb'(e+l) - 4cc'm + (c+e)df + (c+g)hi.$$

Wir wollen nun noch Einiges über die Bedeutung der positiven binären und ternären quadratischen Formen aufser dem Gebiete der höheren Arithmetik hinzusetzen: von den negativen besonders zu handeln ist unnöthig, und die indifferenten entziehen sich dieser Behandlung ganz.

Die positive binäre Form $axx + 2bxy + cyy$ stellt allgemein das Quadrat der Entfernung zweier unbestimmten Puncte in einer Ebene vor, deren Coordinaten in Beziehung auf zwei unter einem Winkel, dessen Cosinus $= \frac{b}{\sqrt{ac}}$ ist, gegen einander geneigte Axen um $x\sqrt{a}$, $y\sqrt{c}$ verschieden sind. Insofern x und y also nur *ganze* Zahlen bedeuten sollen, bezieht sich die Form auf ein System parallelogrammatisch geordneter Puncte, die in den Durchschnitten zweier Systeme von Parallellinien liegen. Die Linien jedes Systems sind in gleichen Entfernungen von einander, und zwar sind die des einen, wenn sie parallel mit den Linien des zweiten gemessen werden, $= \sqrt{a}$; die Entfernung des andern, parallel mit den Linien des ersten gemessen, $= \sqrt{c}$: die Neigung beider Systeme gegen einander die oben angegebene. Auf diese Weise erscheint die Ebene in lauter gleiche Parallelogramme getheilt, deren Endpuncte das Punctensystem ausmachen, ohne dafs irgend einer der Puncte innerhalb eines Parallelogramms fallen kann. Der Determinant mit positivem Zeichen genommen, also $ac - bb$, bedeutet das Quadrat des Flächeninhalts eines Elementar-Parallelogramms. Ein und dasselbe System solcher Puncte kann auf unendlich viele verschiedene Arten parallelogrammatisch abgetheilt und also auf eben so viele verschiedene Formen zurückgeführt werden: alle diese verschiedenen Formen sind aber, was in der Kunstsprache äquivalent heifst, und der Inhalt eines Elementar-Parallelogramms bleibt allemal derselbe. Zwei Formen, die nicht äquivalent sind, von denen aber die eine die andere unter sich begreift, beziehen sich auf dasselbe System von Puncten, aber die erstere Form auf das ganze System, die zweite auf einen Theil. Zwei Formen, die, nach der Kunstsprache, uneigentlich äquivalent (*improprie aequivalentes*) heifsen, beziehen sich auf zwei gleiche aber verkehrt liegende Systeme von Puncten, indem man sich die Ebene umgekehrt gelegt denkt u. s. w.

Auf gleiche Weise bedeutet allgemein die positive ternäre Form $axx+byy+czz+2a'yz+2b'xz+2c'xy$ das Quadrat der Entfernung zweier unbestimmten Puncte im Raume, deren Coordinaten in Beziehung auf drei Axen (1), (2), (3) die Unterschiede $x\sqrt{a}$, $y\sqrt{b}$, $z\sqrt{c}$ geben: die Cosinus der Winkel zwischen den Axen (2) und (3), (1) und (3), (1) und (2) sind hier resp. $\frac{a'}{\sqrt{bc}}$, $\frac{b'}{\sqrt{ac}}$, $\frac{c'}{\sqrt{ab}}$. Insofern hier x, y, z bloſs ganze Zahlen bedeuten sollen, bezieht sich die Form auf ein System parallelopipedisch geordneter, d. i. durch die Durchschnitte dreier Systeme paralleler äquidistanter Ebenen sich ergebender Puncte. Der ganze Raum erscheint so in lauter gleiche Parallelopipeden getheilt, deren Endpuncte jenes System von Puncten ausmachen, und das Quadrat des Raum-Inhalts eines Elementar-Parallelopipedum ist dem mit positivem Zeichen genommenen Determinanten der ternären Form gleich. Aequivalente Formen repräsentiren ein und dasselbe System von Puncten, nur auf andere Axen oder Fundamental-Ebenen bezogen. Auf gleiche Weise finden alle andern Hauptmomente der Theorie der ternären Formen hier ihre geometrische Bedeutung, das Enthaltensein einer Form unter einer andern, die Darstellung einer bestimten Zahl oder einer unbestimmten binären Form durch eine ternäre, die Lehre von den zugeordneten ternären Formen *(formae adjunctae)*, das Wegfallen der Unterscheidung zwischen eigentlicher und uneigentlicher Aequivalenz, das Wesen der reducirten Formen u. s. w. Wir müssen uns aber auf obige Andeutungen beschränken, zumal da das vorliegende Werk, welches die ternären Formen lediglich aus rein arithmetischem Gesichtspuncte betrachtet, nur mittelbarer Weise Veranlassung dazu gegeben hat. Man wird wenigstens daraus erkennen, welch ein reiches Feld hier den Untersuchungen geöffnet ist, die nicht bloſs für sich ein hohes theoretisches Interesse haben, sondern auch zu einer eben so bequemen als allgemeinen Behandlung aller Relationen unter den Krystallformen benutzt werden können. In das Detail dieser Benutzung einzugehen, ist hier der Ort nicht: wir dürfen jedoch die Bemerkung nicht übergehen, daſs wenn gleich ursprünglich angenommen ist, daſs a, b, c, a', b', c' ganze Zahlen vorstellen, doch der gröſste Theil der Lehre von den ternären Formen, und namentlich dasjenige, was für jene Benutzung erforderlich ist, auch unabhängig von jener Voraussetzung gültig bleibt. In der That führen zwar *Hauy's* Angaben bei den meisten Krystallgat-

tungen auf sehr einfache ganze Werthe der Coefficienten in den ternären Formen, welche sich auf die jenen entsprechende Anordnung des Puncten-systems beziehen; allein die genaueren spätern Messungen von *Wollaston, Malus, Biot, Kupfer* u. a. stehen damit im Widerspruche, und machen es zweifelhaft, ob rationale Verhältnisse jener Coefficienten überall naturgemäfs sind; jedenfalls aber lassen sich, wenn man nicht in der Theorie die Beschränkung auf ganze Werthe der Coefficienten weglassen will, da es dabei nicht auf absolute Werthe, sondern nur auf ihr Verhältnifs unter einander ankommt, allezeit ganze Zahlen finden, die den Messungsresultaten so nahe kommen, als man nur will.

Schliefslich wollen wir noch dem oben angeführten *Seeber*schen Lehrsatze seine geometrische Bedeutung unterlegen. Wenn ein Parallelopipedum so beschaffen ist, dafs keine seiner zwölf Kanten (unter denen je vier einander gleich sind) gröfser ist, weder als eine der zwölf Diagonalen von Seitenflächen (die paarweise gleich sind), noch als eine der vier Diagonalen des Parallelopipedum: so ist der mit $\sqrt{2}$ multiplicirte Raum-Inhalt desselben nicht kleiner, als der Raum-Inhalt eines aus denselben Kanten gebildeten rechtwinklichten Parallelopipedum.

23.

Sur la valeur d'une série finie.

(Par Mr. *Stern* à Göttingue.)

Dans les *Comptes Rendus des séances de l'acad. des sc.* *) *Mr. Cauchy* a donné la démonstration d'un théorême d'analyse fort curieux. Cette démonstration m'a fait trouver un autre théorême, qui me semble être assez remarquable pour le publier ici. On peût l'énoncer comme suit.

Soit S la somme de la série

$$1-\frac{n-3}{2}+\frac{(n-4)(n-5)}{2.3}-\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4}\cdots\cdot$$

dont le terme général est $=\frac{(n-r-1)\ldots\ldots(n-2r+1)}{2\;\ldots\ldots\;r}$. Alors, n étant un nombre entier, on aura

1) $S=\frac{3}{n}$, si n est un nombre impair divisible par 3;
2) $S=0$, si n est un nombre impair non divisible par 3;
3) $S=-\frac{1}{n}$, si n est un nombre pair divisible par 3;
4) $S=\frac{2}{n}$, si n est un nombre pair non divisible par 3.

Demonstration. On a

$$A.\quad (x+y)^n-x^n-y^n$$
$$=nxy(x+y)\left[(x+y)^{n-3}-\frac{n-3}{2}xy(x+y)^{n-5}+\frac{(n-4)(n-5)}{2.3}(xy)^2(x+y)^{n-7}\ldots\right].$$

Maintenant si l'on désigne par $1,\ \alpha,\ \alpha^2$ les trois racines de l'équation

$$x^3=1$$

et qu'on suppose

$$x=\alpha y$$

le second membre de l'équation ($A.$) se transformera en

$$n\alpha y^2(1+\alpha)y\left[(1+\alpha)^{n-3}y^{n-3}-\frac{n-3}{2}\alpha y^2(1+\alpha)^{n-5}y^{n-5}+\frac{(n-4)(n-5)}{2.3}\alpha^2y^4(1+\alpha)^{n-7}y^{n-7}\ldots\right],$$

*) 1839, 2e sem. No. 12.

ou bien, en vertu de l'équation

$$\alpha = (1+\alpha)^2$$

en

$$B. \quad n(1+\alpha)^n y^n \left[1 - \frac{n-3}{2} + \frac{(n-4)(n-5)}{2.3} - \frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4} \dots\right] = n(-\alpha^2)^n y^n . S.$$

La même supposition réduit le premier membre de l'équation ($A.$) à

$$C, \quad = [(1+\alpha)^n - 1 - \alpha^n] y^n = [-1 - \alpha^n + (-\alpha^2)^n] y^n.$$

Donc, si n est un nombre impair divisible par 3, on a

$$C = -3y^n = n(-\alpha^2)^n y^n S = -n y^n S$$

et

$$S = \frac{3}{n}.$$

Si n est un nombre impair non divisible par 3, on a

$$C = 0,$$

d'où l'on tire

$$S = 0.$$

Maintenant soit n un nombre pair. Alors, si ce nombre est divisible par 3, on a $(-\alpha^2)^n = 1$ et

$$C = -y^n = n y^n S$$

ou bien

$$S = -\frac{1}{n}.$$

Mais si le nombre n n'est pas divisible par 3, la valeur de l'expression ($C.$) est $= 2\alpha^{2n}$, à cause de l'équation

$$1 + \alpha^n + \alpha^{2n} = 0.$$

Alors on a

$$2\alpha^{2n} y^n = n\alpha^{2n} y^n S$$

et

$$S = \frac{2}{n}.$$

Le 29 Octobre 1839.

24.

Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen.

(Von Herrn Dr. *Ferd. Minding* zu Berlin.)

Aus der Formel für das Linear-Element, nämlich $ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$, ergiebt sich für die kürzeste Linie auf einer krummen Fläche folgende Differential-Gleichung zweiter Ordnung zwischen p und q, nämlich:

$$1.\quad \frac{dE}{dp}dp^2 + 2\frac{dF}{dp}dp\,dq + \frac{dG}{dp}dq^2 = 2ds.d\left(\frac{Edp + Fdq}{ds}\right).$$

Diese allgemeine Gleichung soll hier zunächst angewendet werden auf die *abwickelbaren* Flächen, im gewöhnlichen Sinne dieses Ausdruckes. Es seien u, v, w die Coordinaten, φ der Bogen der Knotenlinie einer solchen Fläche, sämmtlich Functionen einer Veränderlichen p, so lassen sich mit Hülfe der zweiten Veränderlichen q die Coordinaten der Fläche ausdrücken wie folgt:

$$x = u + q\frac{du}{d\varphi},\qquad y = v + q\frac{dv}{d\varphi},\qquad z = w + q\frac{dw}{d\varphi}.$$

Man setze

$$\left(d\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \left(d\frac{dv}{d\varphi}\right)^2 + \left(d\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 = dP^2$$

und bemerke, dafs $du^2 + dv^2 + dw^2 = d\varphi^2$ ist; so folgt für das Linear-Element die Formel

$$ds^2 = q^2 dP^2 + (dq + d\varphi)^2,$$

oder

$$2.\quad ds^2 = (Q - P)^2 dP^2 + dQ^2,$$

wenn man eine neue Veränderliche Q einführt, nämlich:

$$Q = q + \varphi.$$

Schreibt man in (1.) P anstatt p, Q anstatt q, und setzt $E = (Q-\varphi)^2$, $F = 0$, $G = 1$, noch bemerkend, dafs φ nur von P abhängt, so erhält man folgende Differential-Gleichung der kürzesten Linie:

$$3.\quad (Q-\varphi)\frac{d^2Q}{dP^2} - 2\left(\frac{dQ}{dP}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dP}.\frac{dQ}{dP} - (Q-\varphi)^2 = 0.$$

Von dieser erhält man, am leichtesten durch eine geometrische Betrachtung, folgendes Integral:

$$4.\quad (Q-\varphi)\cos(P-a) + \int d\varphi.\cos(P-a) = k.$$

a und k sind willkürliche Constanten. Der Bogen (σ) der kürzesten Linie wird ausgedrückt wie folgt:

$$\sigma = q\sin(P-a) + \int d\Phi . \sin(P-a) + \text{Const.};$$

wo wieder q für $Q-\Phi$ gesetzt ist.

Für die Curve vom kürzesten Umringe auf der abwickelbaren Fläche gilt folgende Differential-Gleichung:

$$5. \quad (Q-\Phi)\frac{d^2 Q}{dP^2} - 2\left(\frac{dQ}{dP}\right)^2 + \frac{dQ}{dP}.\frac{d\varphi}{dP} - (Q-\Phi)^2 = \frac{1}{k}\left(\frac{ds}{dP}\right)^2.$$

Zur Abkürzung sei

$$m + \int^p d\Phi . \cos p = U, \qquad n + \int^p d\Phi . \sin p = V$$

(m und n sind beliebige Constanten). Alsdann ist das Integral von (5.) in folgender Gleichung enthalten:

$$6. \quad (q + U\cos p + V\sin p)^2 + (U\sin p - V\cos p)^2 = k^2.$$

Da P und Φ bloß von der Veränderlichen p abhängen und $\frac{dP}{dp}$, $\frac{d\varphi}{dp}$ als Functionen von p gegeben sind, so ist durch vorstehende Formeln das Problem der kürzesten Linien, so wie der Curven kürzesten Umringes auf abwickelbaren Flächen, auf Quadraturen gebracht und mithin allgemein gelöset.

Daß auf jeder Fläche von unveränderlichem positivem Krümmungsmaaße zwischen den Seiten und Winkeln eines aus kürzesten Linien gebildeten Dreiecks die Formeln der sphärischen Trigonometrie gelten, folgt sogleich, wenn man sich erinnert, daß jede Fläche dieser Art sich auf eine Kugel abwickeln läßt. Ist das Krümmungsmaaß negativ, so gelten dieselben Formeln mit der Aenderung, daß die hyperbolischen Functionen der Seiten an die Stelle der trigonometrischen treten. Sind nämlich a, b, c die Seiten des Dreieckes, A der Gegenwinkel von a, und k das unveränderliche Krümmungsmaaß, gleichviel ob positiv oder negativ, so ist es nicht schwer, die Richtigkeit folgender Gleichung zu beweisen:

$$\cos a\sqrt{k} = \cos b\sqrt{k} . \cos c\sqrt{k} + \sin b\sqrt{k} . \sin c\sqrt{k} . \cos A.$$

Im 19ten Bande dieses Journals, Seite 379, findet man eine Gruppe von Flächen von unveränderlichem negativem Krümmungsmaaße ($k = -1$) angegeben, deren Linear-Element daselbst in folgender Form dargestellt wird:

$$ds^2 = (v^2 + h^2 - a)\,dt^2 + \frac{dv^2}{v^2 + h^2 - a}.$$

Nimmt man auf einer solchen Fläche einen beliebigen Punct A, dessen Argumente $v = v'$, $t = t'$ seien, und zieht aus A nach einem zweiten zu v und t gehörigen Puncte B eine kürzeste Linie auf der Fläche, setzt die Länge ihres Bogens $AB = \sigma$, den Winkel, unter welchem sie in A die Curve von unveränderlichen v schneidet, $= \theta$; so gelten zwischen den Veränderlichen v, t, σ, θ folgende Gleichungen, in welchen $\sqrt{(a-h^2)} = b$ gesetzt ist, nämlich:

$$7.\quad \begin{cases} \dfrac{bv'\cot\theta - b^2\tan b(t-t')}{b+v'\cot\theta.\tan b(t-t')} = \dfrac{\cos\theta\sqrt{(v'^2-b^2)}.(v'+\mathfrak{Tang}\,\sigma.\sin\theta\sqrt{(v'^2-b^2)})}{\sin\theta\sqrt{(v'^2-b^2)}+v'\,\mathfrak{Tang}\,\sigma}. \\ v = \mathfrak{Sin}\,\sigma.\sin\theta.\sqrt{(v'^2-b^2)} + v'\,\mathfrak{Cos}\,\sigma. \end{cases}$$

Diese Formeln gelten ohne Ausnahme, die Gröfse $b^2 = a - h^2$ mag positiv, Null, oder negativ sein. Durch sie verwandelt sich der obige Werth von ds^2 in $ds^2 = d\sigma^2 + \mathfrak{Sin}\,\sigma^2.d\theta^2$, wie erforderlich. Man kann sie auch leicht auf eine einfachere Gestalt bringen; denn wenn z. B. $a-h^2$ negativ ist, so setze man:

$$v = \sqrt{(h^2-a)}\,\mathfrak{Sin}\,q,\qquad \sqrt{(h^2-a)}\,t = p,$$
$$v' = \sqrt{(h^2-a)}\,\mathfrak{Sin}\,q',\qquad \sqrt{(h^2-a)}\,t' = p',$$
$$\mathfrak{Tang}\,w = \cot\theta.\mathfrak{Sin}\,q',\qquad \mathfrak{Tang}\,u = \frac{\mathfrak{Tang}\,q'}{\sin\theta},$$

wo die Hülfsgröfsen w und u einen imaginären Theil haben können, der nachher wieder aus der Rechnung herausfällt. Dadurch gehen die Gleichungen 7. in folgende über:

$$\mathfrak{Tang}(p-p'+w) = \cos\theta.\mathfrak{Cos}\,q'.\mathfrak{Tang}(\sigma+u),$$
$$\mathfrak{Sin}\,q.\mathfrak{Sin}\,u = \mathfrak{Sin}\,q'.\mathfrak{Sin}(\sigma+u),$$
$$\mathfrak{Cos}\,q.\mathfrak{Cos}(p-p'+w) = \mathfrak{Cos}(\sigma+u),$$

von welchen die letzte aus den beiden ersten folgt. Ist $a-h^2=0$, so kommt

$$v(t-t') = \mathfrak{Sin}\,\sigma.\cos\theta,\qquad v = v'(\mathfrak{Cos}\,\sigma + \mathfrak{Sin}\,\sigma\sin\theta).$$

Versteht man unter p und q die Argumente der Krümmungslinien auf einem Ellipsoïd, dessen Gleichung sei: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, so ist

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{(a^2-p)(a^2-q)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\qquad \frac{y^2}{b^2} = \frac{(b^2-p)(b^2-q)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)},\qquad \frac{z^2}{c^2} = \frac{(c^2-p)(c^2-q)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

Hieraus folgt

$$ds^2 = \tfrac{1}{4}(p-q)(P\,dp^2 - Q\,dq^2),$$

wo gesetzt ist:

$$P = \frac{p}{(a^2-p)(b^2-p)(c^2-p)},\qquad Q = \frac{q}{(a^2-q)(b^2-q)(c^2-q)}.$$

Zur Abkürzung sei noch

$$\frac{P}{Q} = \lambda.$$

Für die kürzeste Linie erhält man nun folgende Differential-Gleichung:

$$8.\quad (\lambda dp - dq)(\lambda dp^2 - dq^2) + (p-q)dq(d\lambda dp + 2\lambda d^2p) = 0,$$

worin $d^2q = 0$ gesetzt ist. Der Anblick dieser Gleichung läfst kaum eine so einfache Integration erwarten, wie sie Herr Prof. *Jacobi* im 19ten Bande Seite 309 mitgetheilt hat. Man kann dieses merkwürdige Integral auf folgende Weise aus (8.) herleiten:

Multiplicirt man die Gleichung (8.) mit dp und bemerkt, dafs $dp(d\lambda dp + 2\lambda d^2p) = d(\lambda dp^2) = d(\lambda dp^2 - dq^2)$ ist, so erhält man

$$(\lambda dp - dq)(\lambda dp^2 - dq^2)dp + (p-q)dq\, d(\lambda dp^2 - dq^2) = 0.$$

Diese Gleichung werde mit dq multiplicirt und folgende identische bemerkt:

$$(\lambda dp - dp)dp\, dq = d(\lambda q\, dp^2 - p\, dq^2) - q\, d(\lambda dp^2 - dq^2),$$

so findet man

$$(\lambda dp^2 - dq^2)d(\lambda q\, dp^2 - p\, dq^2) = (\lambda q\, dp^2 - p\, dq^2)d(\lambda dp^2 - dq^2),$$

aus welcher sofort das Integral mit der willkürlichen Constante h hervorgeht, nämlich:

$$\lambda q\, dp^2 - p\, dq^2 = h(\lambda dp^2 - dq^2)$$

oder

$$9.\quad \frac{P.dp^2}{p-h} = \frac{Q.dq^2}{q-h}.$$

Durch Addition der Gleichungen

$$4ds^2 = (p-q)(P dp^2 - Q dq^2),$$
$$0 = \{\surd(q-h.P).dp - \surd(p-h.Q).dq\}^2$$

ergiebt sich nach Ausziehung der Wurzel für den Bogen der kürzesten Linie:

$$10.\quad 2ds = \surd(p-h.P).dp - \surd(q-h.Q).dq.$$

Denkt man sich $a^2 > b^2 > c^2$, so liegt von den Argumenten p, q das eine immer zwischen a^2 und b^2, das andere zwischen b^2 und c^2; die Constante h in (9.) liegt nothwendig zwischen p und q. Es sei $p > q$, so bewegt sich, wenn $h > b^2$ ist, in den vorstehenden Gleichungen p immer zwischen a^2 und h; hingegen q durchläuft alle Werthe von b^2 bis c^2. Für $p = h$ wird in (9.) $dp = 0$, d. h. die Curve berührt die Krümmungslinie, oder vielmehr die beiden Krümmungslinien, für welche $p = h$ ist. Für $p = a^2$ wird gleichfalls $dp = 0$, also p für einen Augenblick unveränderlich; d. h. die Curve geht, indem sie den Hauptschnitt, für welchen $p = a^2$ ist, schneidet,

von einer Krümmungslinie, in unendlicher Nähe dieses Hauptschnittes, zu einer anderen *demselben* Werthe von p entsprechenden über. Aehnlich verhält es sich, wenn h zwischen b^2 und c^2 liegt; alsdann berührt die Curve abwechselnd die beiden zu $q=h$ gehörigen Hauptschnitte. Schreibt man in den vorstehenden Formeln $-c^2$ für c^2, so ergeben sich die Ausdrücke für kürzeste Linien auf dem einfachen Hyperboloïd, in welchen p zwischen a^2 und b^2, q zwischen $-c^2$ und $-\infty$ liegen muſs. Für $h=0$ giebt die Gleichung (9.) die geraden Linien auf dieser Fläche. Schreibt man noch $-b^2$ für b^2, so erhält man die Ausdrücke für das zweitheilige Hyperboloïd.

Um die Ausdrücke für das Paraboloïd zu erhalten, schreibe man in den Formeln für das Ellipsoïd $z-c$ statt z, mc statt a^2, nc statt b^2, pc, qc, hc statt p, q, h, und setze hierauf $c=\infty$, so kommt

$$\frac{x^2}{m}=\frac{(m-p)(m-q)}{n-m},\quad \frac{y^2}{n}=\frac{(n-p)(n-q)}{m-n},\quad 2z=p+q-m-n,$$

$$4ds^2=(p-q)\left\{\frac{p\,dp^2}{(m-p)(n-p)}-\frac{q\,dq^2}{(m-q)(n-q)}\right\}.$$

Die Gleichungen für die kürzeste Linie und die für den Bogen derselben sind

$$\frac{p.dp^2}{(p-m)(p-n)(p-h)}=\frac{q.dq^2}{(q-m)(q-n)(q-h)},$$

$$2ds=\sqrt{\left(\frac{p(p-h)}{(p-m)(p-n)}\right)}dp-\sqrt{\left(\frac{q(q-h)}{(q-m)(q-n)}\right)}dq.$$

Die Ausdrücke für den Kegel und den Cylinder zweiten Grades sind in den oben allgemein für abwickelbare Flächen gegebenen enthalten. Ich bemerke noch, daſs die dort eingeführten Argumente P und Q ebenfalls wieder den Krümmungslinien entsprechen; nämlich P den geraden Linien der Fläche und Q dem anderen Systeme von Krümmungslinien.

25.
Auflösung der Aufgaben im 17ten Bande S. 389 dieses Journals.

(Von Hrn. Dr. *Haedenkamp* zu Hamm.)

Herr Professor *Gudermann* hat im 17ten Bande S. 389 dieses Journals die Gleichung und einige merkwürdige Eigenschaften einer sphärischen Curve mitgetheilt, die er Circulare nennt. Ich will hier den von dieser Curve eingeschlossenen Flächenraum und den Bogen derselben auf elliptische Integrale zurückführen. Es sei $AB = 2\mu$ (Fig. 4. Taf. III.), der constante Peripheriewinkel $= 2\nu$, die Hypotenuse des in B rechtwinkligen Dreiecks $ABM = 2\tau$, die Cathete $BH = 2\theta$, die Ordinate $GF = z$ und die Abscisse $CF = v$. Dann ist, wie Herr *Gudermann* zeigt, die Gleichung der Curve:

$$\tang\theta = \sin z - \cos z \sqrt{\left(\frac{\cos 2\nu - \cos 2\tau}{\cos 2\nu + \cos 2\tau}\right)}$$

und der Flächenraum $CFGD$ oder

$$F = \cotang 2\nu \int \frac{(x \tang\theta)(x - \cotang\theta)\, x\, dx}{(1-x^2)\sqrt{[(x+\alpha)(x+\alpha')(x-\beta)(x-\beta')]}},$$

wo der Kürze wegen $x = \sin z$, $\alpha = \tang\mu \tang\nu$, $\alpha' = \cotang\nu \cotang\mu$, $\beta = \tang\nu \cotang\mu$, $\beta' = \cotang\nu \tang\mu$ gesetzt ist. Setzt man nun

$$\tang^2\Phi = \frac{\alpha'+\beta}{\alpha+\beta'} \cdot \frac{(x+\alpha)(x-\beta')}{(x+\alpha')(x-\beta)},$$

so ist

$$\frac{(1-x^2)}{\sqrt{[(x+\alpha)(x+\alpha')(x-\beta)(x-\beta')]}} = \frac{\sin 2\mu}{\sin 2\varphi}, \quad x = \frac{\cos 2\mu \sin 2\theta \pm \sqrt{(\sin^2 2\tau - \sin^2 2\varphi)}}{\cos 2\varphi + \cos 2\mu},$$

$$d\Phi = \frac{\sin 2\mu \cos 2\mu (x - \tang\theta)(x - \cotang\theta)\, dx}{(1-x^2)\sin 2\varphi},$$

und daher

$$F = \int_0 \frac{\cos 2\mu \sin 2\theta \pm \sqrt{(\sin^2 2\tau - \sin^2 2\varphi)}}{\cos 2\varphi + \cos 2\mu}\, d\Phi.$$

Das obere Zeichen in diesem Ausdrucke bezieht sich auf den Flächenraum $CFGD$, das untere auf $CFIE$. Es ist zu bemerken, daſs der Winkel Φ nichts anderes als die Abscisse CF ist.

Setzt man ferner

$$\sin 2\Phi = k \sin\varphi, \quad \text{wo} \quad k = \sin 2\tau,$$

so ist

$$F = \int_0 \frac{\cos 2\mu \sin 2\theta \, d\varphi}{\cos 2\varphi + \cos 2\mu} \pm \int \frac{\cos^2\psi \, d\psi}{2(\sin^2 2\nu - \sin^2\psi)}$$

$$\mp \frac{\cos 2\mu}{2} \int_0 \frac{\cos^2\psi \, d\psi}{(\sin^2 2\nu - \sin^2\psi)\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}}.$$

Setzt man $2\nu = \operatorname{am} a$, $\psi = \operatorname{am} u$, so wird nach der gewöhnlichen, von *Jacobi* zuerst eingeführten Bezeichnung elliptischer Integrale,

$$\frac{\cos 2\mu}{2} \int_0 \frac{\cos^2\psi \, d\psi}{(\sin^2 2\nu - \sin^2\psi)\Delta(\psi, k)} = \frac{\Delta \operatorname{am} a}{\sin^2 \operatorname{am} a} \cdot \frac{u}{2} - \frac{\operatorname{cotang} \operatorname{am} a}{2} \Pi(u, a + iK'),$$

$$\int \frac{\cos^2\psi \, d\psi}{2(\sin^2 2\nu - \sin^2\psi)} = \frac{\operatorname{am} u}{2} - \frac{\operatorname{cotang} \operatorname{am} a}{4} \log \frac{\sin \operatorname{am}(a-u)}{\sin \operatorname{am}(a+u)},$$

$$\int \frac{\cos 2\mu \sin 2\theta \, d\varphi}{\cos 2\varphi + \cos 2\mu} = \frac{\operatorname{cotang} \operatorname{am} a}{2} \log \frac{\cos(\mu - \varphi)}{\cos(\mu + \varphi)};$$

und da auch

$$\Pi(u, a + iK') - \tfrac{1}{2} \log \frac{\sin \operatorname{am}(a-u)}{\sin \operatorname{am}(a+u)}$$

$$= \Pi(u, a) + \operatorname{cotang} \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} u \quad \text{(Fundamenta §. 166.)},$$

so ist der Raum

$$2\,CFGD = \operatorname{am} u - u \cos 2\mu + \operatorname{cotang} \operatorname{am} a \left[\Pi(u, a) + \log \frac{\cos(\mu - \varphi)}{\cos(\mu + \varphi)}\right],$$

$$2\,CFIE = \operatorname{am} u - u \cos 2\mu + \operatorname{cotang} \operatorname{am} a \left[\Pi(u, a) - \log \frac{\cos(\mu - \varphi)}{\cos(\mu + \varphi)}\right].$$

Für den ganzen, von der Curve eingeschlossenen Raum erhält man den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\pi - \cos 2\mu K + \operatorname{cotg} \operatorname{am} a \, \Pi(K, a).$$

Für das Element des Bogens der Curve findet Herr *Gudermann* den Ausdruck

$$\sin 2r . ds = \frac{(1-x^2)\, dx}{\sqrt{[(1-x)(1+x)(x+\alpha)(x+\alpha')(x-\beta)(x-\beta')}}.$$

Obgleich der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen bis zur 6ten Potenz von x steigt, so läfst sich doch das Integral noch auf elliptische Transcendenten zurückführen. Durch die oben angewandte Substitution

$$\operatorname{tang}^2\Phi = \frac{\alpha' + \beta}{\alpha + \beta'} \cdot \frac{(x+\alpha)(x-\beta')}{(x+\alpha')(x-\beta)}$$

erhält man

$$ds = \frac{\sin 2\tau \, d\varphi \sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(\sin^2 2\tau - \sin^2 2\varphi)}} = \frac{\sin 2\tau \sqrt{(1-x^2)}\, d\varphi}{2\sqrt{[(\sin^2\tau - \sin^2\varphi)(\sin^2\tau - \sin^2\varphi)]}} \text{ und}$$

$$\sqrt{(1-x^2)} = \frac{\sqrt{(\cos 2\mu)} . [\sin\theta \sqrt{(\lambda^2 - \sin^2\varphi)} \pm \cos\theta \sqrt{(\lambda'^2 - \sin^2\varphi)}]}{\cos^2\mu - \sin^2\varphi},$$

wo $\lambda = \sin\tau$, $\lambda' = \cos\tau$; und somit wird endlich

$$\frac{s}{\lambda\lambda'\sqrt{(\cos 2\mu)}}$$
$$= \sin\theta\int\frac{d\varphi}{(\cos^2\mu - \sin^2\varphi)\sqrt{(\lambda^2 - \sin^2\varphi)}} \pm \cos\theta\int\frac{d\varphi}{(\cos^2\mu - \sin^2\varphi)\sqrt{(\lambda'^2 - \sin^2\varphi)}}.$$

Das obere Zeichen + gilt für den Bogen *DG*, das untere — für *EI*. Setzt man noch $\sin\Phi = \lambda\sin\operatorname{am} u$ und $\sin\Phi = \lambda'\sin\operatorname{am}(v, \lambda')$, ferner

$$\frac{1}{\cos\mu} = \sin\operatorname{am}(ia + K) = \frac{1}{\Delta\operatorname{am}(a, \lambda')} \text{ und}$$
$$\frac{1}{\cos\mu} = \sin\operatorname{am}(ib + K', \lambda') = \frac{1}{\Delta\operatorname{am}(b, \lambda')},$$

so wird endlich

$$\frac{\sin\mu\cos\mu}{\lambda\lambda'\sqrt{(\cos^2\mu)}}.s = \frac{\sin\theta}{\sqrt{(\lambda'^2 - \sin^2\mu)}}.i\Pi(u, ia + K) + \operatorname{tang}\mu\sin\theta u$$
$$\pm\frac{\operatorname{c}\sin\theta}{\sqrt{(\lambda^2 - \sin^2\mu)}}.i\Pi(v, ib + K', \lambda') \pm \operatorname{tang}\mu\cos\theta v;$$

oder auch

$$\frac{\Delta\operatorname{am}(a, \lambda')}{\lambda\lambda'}.s = \frac{\operatorname{cotang}\operatorname{am} b}{\lambda\cos\operatorname{am} a}.i\Pi(u, ia + K) \pm \frac{\operatorname{cotang}\operatorname{am} a}{\lambda\cos\operatorname{am} b}.i\Pi(v, ib + K', \lambda')$$
$$+ \frac{\lambda\cos\operatorname{am} b}{\Delta\operatorname{am}(a, \lambda')}u \pm \frac{\lambda'\cos\operatorname{am} a}{\Delta\operatorname{am}(a, \lambda')}v.$$

Das vorhergehende Integral

$$\int\frac{(1 - x^2)\,dx}{\sqrt{(1 - x^2)(x + \alpha)(x + \alpha')(x - \beta)(x - \beta')}}$$

kann auch noch durch die Substitutionen

$$x = \frac{1 + \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\cos\eta}{1 - \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\cos\eta} \quad \text{oder} \quad \frac{1 - \cos\eta}{1 + \cos\eta}\alpha' = \frac{x + \alpha'}{x + \alpha} \quad \text{und} \quad \sin\eta = k\sin\psi$$

auf die Form

$$Ni\int\frac{d\cos\eta\sqrt{(\cos\eta)}}{\left(1 - \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\cos\eta\right)\sqrt{\left[(1 - \cos^2\eta)\left(1 - \frac{\cos^2\eta}{k'^2}\right)\right]}} = N\int\frac{d\psi}{\left(1 - \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\Delta(\psi, k)\right)\sqrt{[\Delta(\psi, k)]}}$$

zurückgeführt werden. Durch eine zweite Transformation von der Form

$$\sqrt{(\cos\eta)} = \sqrt{[\Delta(\psi, k)]} = \frac{(\lambda + \lambda')\sin\psi'}{\Delta(\psi', \lambda) + \Delta(\psi', \lambda')}$$

wird dann

$$\frac{dx(1 - x^2)}{\sqrt{[(1 - x^2)(x + \alpha)(x + \alpha')(x - \beta)(x - \beta')]}}$$
$$= M\sin\theta\int\frac{\sin^2\psi'\,d\psi'}{(1 - \cos^2\mu\sin^2\psi')\Delta(\psi, \lambda)} \pm M\cos\theta\int\frac{\sin^2\psi'\,d\psi'}{(1 - \cos^2\mu\sin^2\psi'^2)\Delta(\psi', \lambda)}.$$

Diese beiden Integrale sind elliptische dritter Gattung mit derselben Amplitude und mit complementären Moduln. Setzt man in dem einen Integrale

$$\sin\psi' = \frac{1}{\lambda \sin \operatorname{am} u} = \sin \operatorname{am}(u + iK')$$

und im anderen

$$\sin\psi' = \frac{1}{\lambda' \sin \operatorname{am}(v, \lambda')} = \sin \operatorname{am}(v + iK', \lambda'),$$

so geben sie auf die angegebene Form zurück. Die zweite Substitution hat zuerst *Legendre* im 3ten Supplemente seiner „Théorie des fonctions elliptiques" angewandt, und *Jacobi* hat dieselbe im 8ten Bande S. 416 dieses Journals auf noch allgemeinere Transcendenten ausgedehnt.

Hamm im Januar 1840.

26.
Fragment über die Begründung des Begriffs der Ebene.

(Von Herrn Prof. *Gerling* in Marburg.)

Dafs die Anschauung der Ebene keine ursprüngliche sei, sondern aus der geraden Linie (deren Anschauung als ursprünglich vorausgesetzt wird) abgeleitet werden müsse, ist lange anerkannt. Wie diese Ableitung aber auf die einfachste Weise bewirkt werde, darüber scheint man nicht einig. Mir däucht nun, dafs man dazu ziemlich leicht gelangt, wenn man aufser den von *Euclid* angewandten Bewegungen einer geraden Linie noch die weitere hinzunimmt, bei welchen der eine von den beiden Puncten, durch welche eine gerade Linie bestimmt ist, unverändert bleibt, der andere aber (mit veränderlichem Abstande) einen vorgeschriebenen Weg im Raume beschreibt, wobei immer nur die Gerade als die durch zwei Puncte vollkommen bestimmte gedacht und demnach nichts weiter vorausgesetzt wird, als dafs nur *eine* Gerade durch zwei Puncte gelegt werden kann, zwei Gerade sich also nur in einem Puncte schneiden können. Ich construire nun wie folgt.

§. 1.

Aufgabe. Einen Winkel *BAC* (Fig. 5.) umzulegen, d. h. seine Schenkel zu vertauschen, bei unverändertem Scheitelpuncte.

Auflösung.

I. Ich denke mir den einen Schenkel *AB* als Rotations-Achse, und beschreibe vermittelst des andern bei unverändertem Winkel eine Kegelfläche, bis *AC* wieder an seinem Platz ist,

II. Ich denke sodann *AC* als Rotations-Axe und rotire so lange, bis *AB* in die unter *I.* beschriebene Kegelfläche kommt. Die Linie, wo dieses geschieht, heifse *AX*. Sie ist immer doppelt vorhanden, je nachdem ich rechts oder links rotirt habe.

III. Ich denke nun *AX* (das frühere *AB*) als Rotations-Axe, so mufs *AC* in die ursprüngliche Lage der *AB* gebracht werden können, Dies sei geschehen.

IV. Ich stelle mir wieder AB (das frühere AC) als Rotations-Axe vor und rotire, bis AX (das frühere AB) in AC fällt.
So liegt nun AB da, wo früher AC lag, und dagegen
AC da, wo früher AB lag; und der Winkel ist umgelegt.

Anmerkung 1. Dieser Satz hat nicht den Zweck, die *Möglichkeit* des Umlegens eines Winkels zu beweisen, sondern setzt dieselbe vielmehr voraus. Der folgende Satz bliebe also ungeändert, wenn man diese Möglichkeit auch unmittelbar postulirte. Es scheint mir aber zur Fixirung des Gedankenganges nützlich, ein bestimmtes Verfahren für die Ausführung der Operation anzugeben; weshalb ich hier damit anfange.

Anmerkung 2. Es wird bei diesem Verfahren offenbar vorausgesetzt, dafs, da BAC, um AB gedreht, den BAX deckt und
BAC, um AC gedreht, den CAX deckt,
auch CAX, um AX rotirt, den BAX decken müsse, oder dafs die Veränderung der Rotations-Axe keine Veränderung in dem Winkel hervorbringen könne. Eine weitere Begründung dieser Voraussetzung (die sich übrigens meines Erachtens ganz genügend geben läfst) würde aber in diesem Aufsatze zu weit führen.

§. 2.

Lehrsatz. Wenn in dem einen Schenkel AC (Fig. 6.) eines Winkels BAC ein beliebiger Punct D angenommen ist, so wird durch die Umlegung des Winkels ein Punct E in dem andern Schenkel gefunden, von der Beschaffenheit, dafs die gerade Linie DE bei der Umlegung des Winkels mit umgelegt wird; und es ist dabei gleichgültig, welche von den beiden Umlegungsweisen (§. I. II.) man anwendet.

Beweis. Da AD die AE deckt, so deckt auch AE die AD.

§. 3.

Lehrsatz. Wenn man zwischen den Schenkeln eines Winkels BAC (Fig. 7.) nach §. 1. und 2. eine Linie DE gefunden hat, von der in §. 2. bezeichneten Eigenschaft, und nun DE zur Rotations-Achse nimmt, vermittelst A aber bei dieser Rotations-Bewegung eine neue (vierte) gerade Linie dergestalt bestimmen läfst, dafs dieselbe immer durch die ursprüngliche Stelle des Puncts A, zugleich aber durch die jedesmalige Stelle desselben Puncts A während der Rotation geht, so wird es

I. nothwendig eine Lage *AG* dieser vierten (beweglichen) Linie geben, in welcher sie die *DE* in *F* schneidet.

II. *AG* hat dann die Eigenschaft, daſs durch die Rotation um *AG*, sowohl der Winkel *DAE* als auch die Linie *DE* umgelegt wird, und

III. ist es dabei gleichgültig, ob die Rotationen, sowohl um *DE* als um *AG*, rechts oder links ausgeführt werden.

Beweis zu *I.* Man denke sich den Winkel *CAB* der Rotation um *DE* folgend, so entsteht ein geschlossener Raum (Doppel-Kegel), welcher die *DE* ganz in sich enthält. Nimmt man sodann die unbestimmt verlängerte *AB* dergestalt bewegt an, daſs *A* bleibt, *E* aber nach und nach in andere Puncte der *ED* kommt, so muſs sie immer die Gränze dieses geschlossenen Raumes schneiden: also, da sie erst die von *EA* und hernach die von *DA* beschriebene Kegelfläche schneidet, auch einmal in die Lage kommen, um beide in einem *gemeinschaftlichen* Puncte zu schneiden. Dieser gemeinschaftliche Punct sei *G* und die entsprechende Lage *AFG*. *G* ist aber nothwendig auch eine von den unendlich vielen Stellen, welche *A* bei der Rotation um *DE* nach und nach einnimmt; und da *AG* und *DE* nur einen Punct gemein haben können, so wird auch bei der Rotation dasselbe *G* gefunden.

Zu *II.* Ist *F* gefunden, so muſs bei der Rotation um *DE* auch *AF* auf *GF* fallen. Man denke sich nun *GFE* nach §. 1. umgelegt, so legt sich auch *AFD* um, so daſs *AG* in die Lage von *DE* kommt; und umgekehrt. Da nun bei der Rotation um *DE* die *AF* auf *GF* fiel, so fällt bei der Rotation um *AG* die *EF* auch *längs DF*.

Durch Verlegung von *BAC*, nach §. 1., fiel aber *D* auf *E* (§. 2.); und da dabei *A* unverändert blieb, so bleibt auch, wenn nach dieser Umlegung um *DE* rotirt wird, *G* unverändert, also auch *F*. Folglich ist $FE = FD$.

Demnach fällt bei der Rotation um *AG* der Punct *E* auf den Punct *D*; also die *AE* auf *AD* und die *DF* auf *EF*; und umgekehrt.

Zu *III.* Jede der obigen verschiedenen Rotationen und Umlegungen läſst sich doppelt, links und rechts, ausführen. Bei jeder aber kommt man auf beide Arten immer auf dieselben Linien und Puncte.

§. 4.

Lehrsatz. Wenn außer den in §. 3. vorkommenden Puncten und Linien noch ein Punct *H* (*Fig.* 8.) in *AC* betrachtet wird, so entspricht demselben nach §. 2. ein Punct *I* in *AB*. Legt man nun durch *HI* eine gerade Linie, so muſs dieselbe die nach §. 2. bestimmte Gerade *AFG* schneiden; und es ist also in §. 3. für die Bestimmung von *AG* gleichgültig, *welcher* Punct *D* in *AC* angenommen worden ist.

Beweis. Man kann sich die *HI* dadurch erzeugt vorstellen, daſs bei der Rotation von *AC* um *AG*, vermittelst des Puncts *H* eine gerade Linie dergestalt bestimmt wird, daſs dieselbe immer durch die ursprüngliche Stelle des Puncts *H* und durch die jedesmalige Stelle desselben Puncts während der Rotationen geht; bis *H* in *AB*, d. h. in *I*, angekommen ist.

Sollte nun *HI* die *AG* nicht schneiden, so könnte man *HI* auf *doppelte* Weise (je nachdem man rechts oder links rotirte), durch *H* und *I* legen; welches dem Begriffe der geraden Linie widerspricht.

§. 5.

Lehrsatz. Die nach §. 3. bestimmte Linie *AG* (Fig. 9.), welche ich *Rotations-Axe des Winkels BAC* nennen will, schneidet jede gerade Linie *DI* von einem Puncte *D* des einen Schenkels nach einem Puncte *I* des andern Schenkels.

Beweis. Es giebt nach §. 2. für *D* und *I* entsprechende Puncte *E* und *H* in den entgegengesetzten Schenkeln, und man kann sich *DI* durch dieselben so gezogen denken, daſs, indem sich *H* nach *I* um *AG* rotirend bewegt, eine neue Linie stets durch das ursprüngliche *D* und auch durch das bewegte *H* geht, bis letzteres in *I* angekommen ist. Sollte nun *DI* die *AG* nicht schneiden, so wäre sie wieder *doppelt* bestimmt (je nachdem man rechts oder links rotirt hätte); welches unmöglich ist.

§. 6.

Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien *DH* und *IK* (Fig. 10.) zwischen Puncten in den Schenkeln des Winkels *BAC* gezogen sind, und von *A* aus eine gerade Linie *AL* durch einen Punct *M* der Linie *DH* gezogen wird, so muſs dieselbe, nach gehöriger Verlängerung, auch die *IK* schneiden.

Beweis. Gesetzt *AML* schnitte die *IK* nicht (ginge darüber oder darunter hinweg), so sind drei Fälle zu unterscheiden.

a) *AML* wäre entweder die *einzige* Linie, welche, von *A* durch einen Punct *M* der *DH* gezogen, die *IK* nicht schneidet, oder

b) es gäbe auf *DH* verschiedene Puncte M', M'' u. s. w., für welche ein Durchschnitt mit *IK* erfolgte; zwischen je zweien von ihnen aber wäre kein Punct, der einen Durchschnitt gestattete;

c) oder es gäbe auf *DH* überall keinen Punct, für welchen ein Durchschnitt mit *IK* statt fände.

Der Fall *a*) ist nicht möglich, da er der Stetigkeit der geraden Linie *DH* widerspricht.

Der Fall *b*) enthält nur eine Wiederholung des Falles *c*), indem nur andere Puncte, z. B. M^{IV}, M^{V}, an die Stelle von *D*, *H* träten.

Demnach bleibt nur die Absurdität des Falles *c*) zu erweisen.

Hier ist *AML* entweder die Rotations-Axe des Winkels *CAB*, oder sie ist es nicht. Ist sie es, so muſs sie nach §. 5. sowohl die *DH* in *M*, als auch die *IK* schneiden. Ist sie es nicht, so muſs nach §. 3. eine Rotations-Axe *AG* gefunden werden können; welche aber wieder nach §. 5. *beide* Linien schneidet.

Anmerkung 1. Eine weitere Ausführung, wie und warum die Annahme *a*) dem Begriffe der Stetigkeit widerspricht, läſst sich zwar meines Erachtens vollkommen genügend geben, würde aber hier zu weit führen.

Anmerkung 2. Ist durch den §. 5. bewiesen, daſs die Bewegung der geraden Linie *AML* längs *DH* eine Fläche beschreibt, in welche jede gerade Linie *IK* mit allen ihren Puncten fällt, so läſst sich nun leicht weiter nachweisen, daſs schon §. 3. solche Flächen auch bei den Rotationen um *DE* und *AG* beschrieben sind, und dann weiter die Aufgabe: eine solche Fläche durch drei beliebige Puncte des Raumes, die nicht in einer Geraden liegen zu beschreiben, auf mehrfache Weise lösen. Die Ausführung davon gehört aber nicht in dieses Fragment.

27.

Neuer Beweis für die Auflösbarkeit der algebraischen Gleichungen durch reelle oder imaginäre Werthe der Unbekannten.

(Von Herrn Dr. *F. Deahna* zu Cassel in Hessen.)

---

1. **Hülfssatz.** Ist

$$X = A_m . x^m + A_{m-1} . x^{m-1} + A_{m-2} . x^{m-2} + \dots . + A . x + A_0$$

irgend eine ganze rationale Function von x, in welcher A_m ein constanter, positiver Coefficient, $A_{m-1}, A_{m-2}, \dots . A_1, A_0$ aber ganze rationale Functionen der Cosinus und Sinus eines veränderlichen Winkels φ sind, so kann man x so groß annehmen, daß X, unabhängig von dem Werthe von φ, größer wird, als eine willkürliche gegebene Größe G.

Beweis. Da die Größen $A_{m-1}, X_{m-2}, \dots . A_1, A_0$ ganze rationale Functionen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ sind, so kann keine derselben durch irgend eine Veränderung von φ ins Unbestimmte wachsen, sondern jede kann nur ein bestimmtes Maximum ihrer Zahlenwerthe (d. h. ihrer vom Zeichen unabhängigen Werthe) erreichen. Es sei A eine beliebige positive Zahl, welche größer als das größte dieser Maxima ist, so hat man, welche Größe auch φ haben mag, für jedes die Einheit übersteigende x:

$$X > A_m x^m - mAx^{m-1}.$$

Um $A_m x^m - mAx^{m-1} > G$ zu machen, darf man nur x größer als die größere der Zahlen $\sqrt[m-1]{G}$ und $\frac{mA+1}{A_m}$ nehmen; denn dann wird $xA_m - mA > 1$ und $x^{m-1} > G$, folglich auch $x^{m-1}(xA_m - mA) = A_m x^m - m.Ax^{m-1} > G$. Für einen solchen Werth von x wird also auch, unabhängig von φ, $X > G$, w. z. b. w.

2. Ist $X = x^m + B_{m-1} . x^{m-1} + B_{m-2} . x^{m-2} + \dots . + B_1 . x + B_0 = 0$ die gegebene Gleichung, und sind r, φ zwei neue veränderliche Größen: ist ferner

$$r^m \cos m\varphi + B_{m-1} . r^{m-1} . \cos(m-1)\varphi + B_{m-2} . r^{m-2} . \cos(m-2)\varphi + \dots . \\ \dots . + B_1 . r . \cos\varphi = t,$$

$$r^m \sin m\varphi + B_{m-1} . r^{m-1} . \sin(m-1)\varphi + B_{m-2} . r^{m-2} . \sin(m-2)\varphi + \dots . \\ \dots . + B_1 . r . \sin\varphi = u,$$

$$mr^m.\cos m\varphi + (m-1)B_{m-1}.r^{m-1}.\cos(m-1)\varphi$$
$$+(m-2)B_{m-2}.r^{m-2}.\cos(m-2)\varphi + \ldots. + B_1.r.\cos\varphi = t',$$
$$mr^m.\sin m\varphi + (m-1)B_{m-1}.r^{m-1}.\sin(m-1)\varphi$$
$$+(m-1)B_{m-1}.r^{m-2}.\sin(m-2)\varphi + \ldots. + B_1.r.\sin\varphi = u':$$

so kommt alles darauf an, zu zeigen, dafs die Functionen $t+B_0$ und u durch eine schickliche Wahl von r und φ zum Verschwinden gebracht werden können. Durch die Substitutionen $x = r(\cos\varphi \pm \sin\varphi.\sqrt{-1})$ geht nämlich X in $t+B_0 \pm u.\sqrt{-1}$ über, so dafs mit $t+B_0$ und u zugleich X verschwindet. Zu jenem Ende betrachte ich t und u als rechtwinkelige Coordinaten einer Curve W, indem ich blofs φ als veränderlich ansehe, und für r eine positive Zahl R setze, welche zugleich t^2+u^2 und $tt'+uu'$ gröfser als B_0^2 macht; welches nach dem obigen Hülfssatze angeht. Die so durch die beiden Gleichungen

$$t = R^m.\cos m\varphi + B_{m-1}.R^{m-1}.\cos(m-1)\varphi + B_{m-2}.R^{m-2}.\cos(m-2)\varphi + \ldots.$$
$$\ldots. + B_2.R^2.\cos 2\varphi + B_1.R.\cos\varphi,$$
$$u = R^m.\sin m\varphi + B_{m-1}.R^{m-1}.\sin(m-1)\varphi + B_{m-2}.R^{m-2}.\sin(m-2)\varphi + \ldots.$$
$$\ldots. + B_1.R.\sin\varphi$$

bestimmte Linie ist, behaupte ich, in sich selbst zurückkehrend und hat die den Coordinaten $t=0$, $u=0$ und $t=-B$, $u=0$ entsprechenden Puncte innerhalb ihrer. Um dieses zu zeigen, führe ich mittelst der Gleichungen $t=\varrho\cos\psi$, $u=\varrho\sin\psi$ zwei neue Coordinaten ϱ und ψ ein. Die angeführten Gleichungen geben $\tang\psi = \frac{u}{t}$,

$$\frac{d\psi}{\cos\psi^2} = (1+\tang^2\psi)\,d\psi = \frac{\frac{du}{d\varphi}.t - \frac{dt}{du}.u}{t^2}.d\varphi = \frac{tt'+uu'}{t^2}.d\varphi \text{ und}$$

$d\psi = \frac{tt'+uu'}{t^2+u^2}.d\varphi$; woraus man sieht, dafs ψ mit φ zugleich wächst, wenn $tt'+uu' > 0$, wie es hier der Fall ist. Es ist aber ψ der Winkel, welchen der Radius-vector ϱ unserer Curve mit den Abscissen t bildet. Wenn nun dieser Winkel beständig wächst, während man in einer gewissen Richtung auf der Curve fortgeht, zuletzt aber, eben so wie der Radius-vector ϱ, seinen anfänglichen Werth wieder erhält, so mufs jene eine geschlossene Linie bilden. Es leuchtet nämlich ein, dafs t und u bei gleichen Werthen von r für $\varphi=0$ und $\varphi=360^0$ gleiche Werthe erhalten. Da aufserdem $\varrho=\sqrt{(t^2+u^2)}$ immer gröfser als B_0 bleibt, so sieht man, dafs sowohl der Anfangspunct der Coordinaten, als auch der Punct, für welchen $t=-B$, $u=0$ ist, innerhalb W liegt.

Man erhält offenbar neue krumme Linien w, wenn man in den Gleichungen

$$t = r^m.\cos m\varphi + B_{m-1}.r^{m-1}.\cos(m-1)\varphi + B_{m-2}.r^{m-2}.\cos(m-2)\varphi$$
$$+ B_{m-3}.r^{m-3}.\cos(m-3)\varphi + \ldots + B_1.r.\cos\varphi,$$
$$u = r^m.\sin m\varphi + B_{m-1} \quad . \quad \sin(m-1)\varphi + B_{m-2}.r^{m-2}.\sin(m-2)\varphi$$
$$+ B_{m-3}.r^{m-3}.\sin(m-3)\varphi + \ldots + B_1.r.\sin\varphi$$

für r andere von R verschiedene Werthe setzt; und zwar werden dieselben nur unendlich wenig von W abweichen, wenn man $R-r$ unendlich klein annimmt: für $r=0$ aber erhält man statt einer Linie nur einen Punct, für welchen $t=0$, $u=0$ ist. Läſst man daher r, in stetigem Wechsel, alle Werthe von $r=R$ bis $r=0$ durchlaufen, so werden die diesen Werthen entsprechenden Formen der Linie w, da dieselbe sich nur stetig, nicht sprungweise ändern kann und zuletzt mit dem Anfangspuncte der Coordinaten zusammenfällt, den vollen innerhalb W liegenden Raum beschreiben, und folglich wird eine von ihren wechselnden Gestalten durch den den Coordinaten $u=0$ und $t=-B$ entsprechenden Punct gehen. Das heiſst mit andern Worten: „Es giebt Werthe der Gröſsen r und φ, welche die Gleichungen $u=0$ und $t=-B$ zugleich erfüllen."

28.

Ueber die Bedingungen der Integrabilität lineärer Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen einer beliebigen Anzahl veränderlicher Gröfsen.

(Von Herrn Dr. *F. Deahna* zu Cassel in Hessen.)

Die Bedingungen, unter welchen eine gegebene Differentialgleichung von der Form $\sum_{m=1}^{m=n} X_m\, dx_m = 0$ durch eine einzige endliche Gleichung integrirt werden kann, sind bekannt; aber die zur Auffindung dieser Bedingungsgleichungen angewendeten Methoden enthalten nicht zugleich den Beweis, dafs dieselben zur Integrabilität der vorgelegten Gleichung hinreichen. Ich glaube daher eine Lücke auszufüllen, wenn ich in dem Folgenden einen solchen Beweis entwickele und denselben aufserdem für den Fall erweitere, wo es sich um die Integration mehrerer Gleichungen der erwähnten Art durch eben so viele endliche Gleichungen handelt.

1. **Lehrsatz.** Soll eine lineäre Differentialgleichung

$$1.\quad dx = \sum_{m=1}^{m=n} X_m\, dx_m,$$

wo $X_1, X_2, X_3, \dots X_n$ Functionen der Veränderlichen $x, x_1, x_2, \dots x_n$ bezeichnen, durch eine einzige endliche Gleichung integrabel sein, so ist es nothwendig und hinreichend, dafs ihre Variation verschwinde, wenn $x_1, x_2, x_3, \dots x_m$ um willkürliche Variationen $\delta x_1, \delta x_2, \dots \delta x_m$ wachsen, während x um $\delta x = \sum_{m=1}^{m=n} X_m\, \delta x_m$ wächst.

Beweis. Hat die Gleichung (1.) eine einzige Stammgleichung, $x = F(x_1, x_2, \dots x_n, a)$, so wird, wenn man $x, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ in $x+\Delta x,\ x_1+\delta x_1,\ x_2+\delta x_2, \dots\ x_n+\delta x_n$ verändert, noch immer $x+\Delta x = F(x_1+\delta x_1, x_2+\delta x_2, \dots x_n+\delta x_n, a)$ die Stammgleichung von $d(x+\Delta x) = \sum_{m=1}^{m=n}((X_m+\Delta X_m)\, d(x_m+\delta x_m))$ sein, wo $X_m+\Delta X_m$ das bezeichnet, was durch die erwähnten Veränderungen aus X_m wird, $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \dots \delta x_n$ aber beliebige von der Constante a unabhängige Gröfsen

bedeuten. Die Gleichung $d(x+\Delta x)-\sum_{m=1}^{m=n}((X_m+\Delta X_m)\,d(x_m+\delta x_m))=0$ wird also identisch, wenn man für $x+\Delta x$ den Ausdruck

$$F(x_1+\delta x_1,\; x_2+\delta x_2,\; \dots\; x_n+\delta x_n,\; a)$$

setzt. Anstatt dessen kann man aber offenbar $F(x_1, x_2, \dots x_n, a)$ statt x, und $\Delta F = F(x_1+\delta x_1, x_2+\delta x_2, \dots x_n+\delta x_n, a) - F(x_1, x_2, x_3, \dots x_n, a)$ statt Δx setzen. Auf diese Art verschwindet der von $\delta x_1, \delta x_2, \dots \delta x_n, \Delta x$ unabhängige Theil von $d(x+\Delta x)-\sum_{m=1}^{m=n}((X_m+\Delta X_m)\,d(x_m+\delta x_m))$, nämlich $dx-\sum_{m=1}^{m=n}X_m\,dx_m$, von selbst. Soll nun für den übrigen Theil dieses Ausdrucks dasselbe Statt finden, so mufs zuerst die Gesammtheit aller der Glieder, welche $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \dots \delta x_n, d\delta x_1, d\delta x_2, \dots \dots d\delta x_n$ in der ersten Dimension enthalten, gleich Null werden. Um diese zu finden, braucht man bei der Substitution von ΔF statt Δx offenbar blofs auf die in $\delta x_1, \delta x_2, \dots \delta x_n$ lineären Glieder Rücksicht zu nehmen. Bezeichnen wir den so erhaltenen Werth von Δx durch δx; er ist offenbar derselbe, welchen man aus $\sum_{m=1}^{m=n} X_m\,\delta x_m$ erhält, wenn man darin für x den obigen Ausdruck $F(x_1, x_2, \dots x_n, a)$ substituirt. Man darf also auch $\sum_{m=1}^{m=n} X_m\,\delta x_m$ für δx, und eben so für dx, welches in $d\delta x$ wieder vorkommen kann, den aus $x=F(x_1, x_2, \dots x_n, a)$ folgenden Werth $\sum_{m=1}^{m=n} X_m\,dx_m$ setzen, sobald man nur berücksichtigt, dafs zuletzt statt x immer $F(x_1, x_2, \dots x_n, a)$ zu substituiren ist.

Auf diese Art wird man für die Variation von $dx-\sum_{m=1}^{m=n}X_m\,dx_m$ einen Ausdruck von der Form

$$P_1\delta x_1+P_2\delta x_2+P_3\delta x_3+\dots+P_n\delta x_n+Q_1\,d\delta x_1+Q_2\,d\delta x_2+\dots+Q_n\,d\delta x_n$$

bekommen, wo $Q_1, Q_2, Q_3, \dots Q_n$ blofs von $x, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ abhängen, und von selbst verschwinden müssen, sobald man in ihnen durch die Gleichung $x=F(x_1, x_2, x_3, \dots x_n, a)$ die Gröfse a statt x einführt. Sind aber die so in Functionen von $a, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ verwandelten Gröfsen $Q_1, Q_2, Q_3, \dots Q_n$ identisch gleich Null, so bleiben sie es auch, sobald man für a einen beliebigen andern Ausdruck setzt: folglich auch, wenn man für a rückwärts den aus der Gleichung $x=F(x_1, x_2, \dots x_n, a)$ folgenden Werth in $x_1, x_2, x_3, \dots x_n, x$ substituirt: oder die Ausdrücke

$Q_1, Q_2, \ldots. Q_n$ verschwinden nothwendig in der oben unmittelbar gefundenen Form von selbst. Die Gröfsen $P_1, P_2, P_3, \ldots. P_n$ müssen nach dem Prinzip der Homogeneität noch lineäre Functionen von $dx_1, dx_2, dx_3, \ldots. dx_n$ sein, und können demnach nicht identisch verschwinden, wofern nicht in jeder die Coefficienten von $dx_1, dx_2, dx_3, \ldots. dx_n$ einzeln gleich Null werden. Wir schliefsen nun eben so, wie oben bei $Q, Q_1, Q_2, Q_2, \ldots. Q_n$, dafs diese Coefficienten nach der Substitution des Ausdrucks $F(x_1, x_2, \ldots. x_n, a)$ für x, nicht verschwinden können, wenn solches nicht auch vorher der Fall war. Man sieht also, dafs wenn die Gleichung

$$dx - \sum_{m=1}^{m=n} (X_m\, dx_m) = 0$$

durch *eine* endliche Gleichung integrabel sein soll, die Variation derselben für willkürliche Variationen $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \ldots. \delta x_n$ von $x_1, x_2, x_3, \ldots. x_n$ und für $\delta x = \sum_{m=1}^{m=n} X_m\, \delta x_m$, von selbst verschwinden mufs, sobald darin $dx = \sum_{m=1}^{m=n} X_m\, dx_m$ und $\delta x = \sum_{m=1}^{m=n} X_m\, \delta x_m$ gesetzt werden.

Ich will nun annehmen, diese Bedingung der Integrabilität finde Statt. Verwandelt man dann die Gleichung $dx - \sum_{m=1}^{m=n} X_m\, dx_m = 0$ in eine andere, indem man statt x überall eine beliebige Function $\varphi(x_1, x_2, \ldots. x_n, z)$ von $x_1, x_2, \ldots. x_n$ und von einer neuen Veränderlichen z setzt, so wird offenbar die Variation der verwandelten Gleichung ebenfalls verschwinden, wenn $x_1, x_2, x_3, \ldots. x_n$ verändert werden, wie vorher, und wenn statt δz der aus der Gleichung

$$\frac{d\varphi}{dx_1}\delta x_1 + \frac{d\varphi}{dx_2} + \ldots. + \frac{d\varphi}{dx_n}\delta x_n + \frac{d\varphi}{dz}\delta z = \delta x = \sum_{m=1}^{m=n} Z_m\, \delta x_m$$

folgende Werth gesetzt wird, wo $Z_1, Z_2, \ldots. Z_n$ die aus $X_1, X_2, \ldots. X_n$ durch die Substitution $x = \varphi(x_1, x_2, \ldots. x_n, z)$ entstehenden Ausdrücke bezeichnen, und wo demnach δz wieder das ist, was aus dz wird, wenn man in der neuen Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{dz}.dz = \sum_{m=1}^{m=n} \left(Z_m - \frac{d\varphi}{dx_m}\right) dx_m$$

die Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots. dx_n$ in die Variationen $\delta x_1, \delta x_2, \ldots. \delta x_n$ verwandelt. Man kann nun die Function φ so wählen, dafs einer der Coefficienten $Z_m + \frac{d\varphi}{dx_m}$, etwa $Z_1 + \frac{d\varphi}{dx_1}$, verschwindet. Zu diesem Ende

darf man nur die Gleichung $dx = X_1 dx_1$ integriren, indem man nur x und x_1 als variabel betrachtet, und dann den aus der Integralgleichung folgenden Werth von x in $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ und der willkürlichen Constante c für Φ, c selbst aber für die neue Veränderliche nimmt. Substituirt man diesen Werth von x in $dx - \sum_{m=1}^{m=n} X_m dx_m = 0$, so werden die Glieder $\frac{dx}{dx_1} dx_1 - X_1 dx_1$ offenbar identisch verschwinden, und die transformirte Gleichung hat die Form:

$$dc = C_2 dx_2 + C_3 dx_3 + C_4 dx_4 \ldots + C_n dx_n,$$

wo $C_2, C_3, \ldots C_n$ Functionen von nur n Variabeln $c, x_2, x_3, \ldots x_n$ sein können. Dem Obigen gemäfs mufs nämlich die Variation dieser Gleichung verschwinden, wenn $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ beliebige Incremente $\delta x_1, \delta x_2, \ldots \ldots \delta x_n$ bekommen, und c um $\delta c = \sum_{m=2}^{m=n} (C_m \delta x_m)$ wächst. Verändert man nun δx_1 allein, so hat man $\delta c = 0$, und folglich

$$0 = \frac{dC_2}{dx_1} \delta x_1 dx_2 + \frac{dC_3}{dx_1} \delta x_1 dx_3 + \ldots + \frac{dC_n}{dx_1} \delta x_1 dx_n;$$

woraus $\frac{dC_2}{dx_1} = \frac{dC_3}{dx_1} = \frac{dC_4}{dx_1} \ldots = \frac{dC_n}{dx_1} = 0$ hervorgeht, so dafs $C_1, C_2, \ldots \ldots C_n$, x_1 nicht enthalten können. Setzt man wieder $dc = C_2 dx_2$ und integrirt unter der Voraussetzung der alleinigen Veränderlichkeit von x_2 und c, so kann man die Gleichung $dc = \sum_{m=2}^{m=n} C_m dx_m$ von neuem in eine andere zwischen nur $n-1$ Veränderlichen transformiren, und so fort, bis zuletzt blofs eine Gleichung mit zwei Variabeln übrig bleibt. Da nun diese jedenfalls integrabel ist, so mufs auch die gegebene Gleichung $dx = \sum_{m=1}^{m=n} X_m dx_m$, aus der sie abgeleitet worden, integrabel sein, w. z. b. w.

2. Ich will diesen Lehrsatz nun noch verallgemeinern, und sagen, dafs wenn ein System von $n+1$ lineären Differentialgleichungen

$$\text{I.} \begin{cases} dx - ((00)da + (01)da_1 + (02)da_2 \ldots + (0m)da_m) = 0, \\ dx_1 - ((10)da + (11)da_1 + (12)da_2 \ldots + (1m)da_m) = 0, \\ dx_2 - ((20)da + (21)da_1 + (22)da_2 \ldots + (2m)da_m) = 0, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ dx_n - ((n0)da + (n1)da_1 + (n2)da_2 \ldots + (nm)da_m) = 0, \end{cases}$$

wo (00), (01), $(02) \ldots (10)$, $(12) \ldots (n0)$, $(n1) \ldots (nm)$ gegebene Functionen der Veränderlichen $x, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ bezeichnen, durch

$n+1$ endliche Gleichungen integrabel sein soll, dazu nothwendig und dafs es hinreichend ist, dafs die Variationen der links des Gleichheitszeichens stehenden Ausdrücke für beliebige Variationen δa, δa_2, δa_3, ... δa_n der Gröfsen a, a_1, a_2, a_3, ... a_n, und für

$$\begin{aligned}
\delta x &= (00)\delta a + (01)\delta a_1 + \dots (0m)\delta a_m,\\
\delta x_1 &= (10)\delta a + (11)\delta a_1 + \dots (1m)\delta a_m,\\
\delta x_2 &= (20)\delta a + (21)\delta a_1 + \dots (2m)\delta a_m,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\delta x_n &= (n0)\delta a + (n1)\delta a_1 + \dots (nm)\delta a_m
\end{aligned}$$

identisch verschwinden, sobald für die in den Differentialen $d\delta x$, $d\delta x_1$, $d\delta x_2$, ... $d\delta x_n$ vorkommenden Gröfsen dx, dx_1, dx_2, ... dx_n ihre aus den gegebenen Gleichungen folgenden Werthe in da, da_1, da_2, da_3, ... da_m gesetzt werden. Der Beweis dieses Satzes gründet sich auf dieselben Principien wie der des schon behandelten einzelnen Falles. Man zeigt, wie vorher, dafs wenn die gegebenen Gleichungen $n+1$ Stammgleichungen

$$\text{II.}\quad \begin{cases}
x = F(a, a_1, a_2, a_3, \dots a_m, c_0, c_1, c_2, \dots c_n),\\
x_1 = F_1(a, a_1, a_2, a_3, \dots a_m, c_0, c_1, c_2, \dots c_n),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n = F_n(a, a_1, a_2, a_3, \dots a_m, c_0, c_1, c_2, \dots c_n)
\end{cases}$$

mit $n+1$ willkürlichen Constanten c_0, c_1, c_2, ... c_n haben, die Variationen der Ausdrücke (I.) verschwinden müssen, wenn man für δx, δx_1, δx_2, ... δx_n die oben angegebenen Ausdrücke setzt, nachdem darin statt x, x_1, x_2, ... x_n die durch die Gleichungen (II.) gegebenen Functionen substituirt worden sind. Nimmt man nun, ohne diese Substitutionen auszuführen, für δx, δx_1, δx_2, ... δx_n die obigen Ausdrücke selbst, so hat man unter den Differentialen dx, dx_1, dx_2, ... dx_n, welche in $d\delta x$, $d\delta x_1$, $d\delta x_2$, ... $d\delta x_n$ vorkommen können, die Differentiale von $F(a, a_1, a_2, \dots a_m, c_0, c_1, c_2, \dots c_n)$, $F_1(a, a_1, a_2, \dots a_m, c_0, c_1, c_2, \dots c_n)$, ..., $F_n(a, a_1, a_2, \dots a_m, c_0, c_1, c_2, \dots c_n)$ zu verstehen; diese aber erhält man aus den durch die Gleichungen (I.) gegebenen Werthen von dx, dx_1, dx_2, ... dx_n gleichfalls durch Substitution der Functionen (II.) statt x, x_1, x_2, x_3, ... x_n. Die Variationen der ersten Glieder der Gleichungen (I.) werden demnach noch verschwinden, wenn man für dx, dx_1, dx_2, ... dx_n ihre Werthe aus denselben Gleichungen, und für δx, δx_1, δx_2, ... δx_n die ähnlichen angegebenen Ausdrücke setzt, nachher aber

in den endlichen Coefficienten überall für x, x_1, x_2, ... x_n die Functionen (II.) substituirt. Dies Verfahren hat den Vortheil, dafs man, ohne die eben genannten Functionen zu kennen, eine Anzahl von $x, x_1, x_2, \dots x_n$, $a, a_1, a_2, \dots a_m$ abhängender Ausdrücke bekommt, welche identisch gleich Null werden müssen, wenn man in sie vermittelst der Gleichungen (II.) statt der Gröfsen x, x_1, x_2, ... x_n eben so viele neue c_0, c_1, c_2, ... c_n einführt, und welche daher ebenfalls verschwinden müssen, sobald man rückwärts statt c_0, c_1, c_2, ... c_n ihre aus den Gleichungen (II.) folgenden Werthe in x, x_1, x_2, ... x_n, a, a_1, ... a_m substituirt; wodurch sie ihre erste Form wieder erhalten.

Um nun den noch übrigen Theil des Lehrsatzes zu beweisen, bemerke ich, dafs man durch Integration der Gleichungen $dx=(00)da$, $dx_1=(10)da$, $dx_2=(20)da$, ... $dx_n=(n0)da$ zu einem System endlicher Gleichungen gelangt, vermittelst dessen x, x_1, x_2, ... x_n als Functionen von a, a_1, a_2, ... a_m und von $n+1$. neuen, bei der Integration als Constanten erscheinenden Gröfsen c_0, c_1, c_2, c_3, ... c_n dergestalt ausgedrückt werden können, dafs sie, diese Functionen statt x, x_1, x_2, ... x_n in die Gleichung (I.) substituirt und die Gröfsen c_0, c_1, c_2, c_3, ... c_n als neue Veränderliche betrachtet, alle in da multiplicirten Glieder verschwinden machen. Die Gleichungen (I.) verwandeln sich nämlich durch dies Verfahren, wenn φ_1, φ_2, ... φ_n die erwähnten Functionen bezeichnen, in folgende:

$$\text{III.}\left\{\begin{array}{l} \frac{d\varphi}{da}\,da-(00)\,da+\sum\limits_{p=1}^{p=m}\left(\frac{d\varphi}{da_p}-(0p)\right)da_p+\sum\limits_{q=0}^{q=n}\frac{d\varphi}{dc_q}\,dc_q=0,\\ \frac{d\varphi_1}{da}\,da-(10)\,da+\sum\limits_{p=1}^{p=m}\left(\frac{d\varphi_1}{da_p}-(1p)\right)da_p+\sum\limits_{q=0}^{q=n}\frac{d\varphi_1}{dc_q}\,dc_q=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{d\varphi_n}{da}\,da-(n0)\,da+\sum\limits_{p=1}^{p=m}\left(\frac{d\varphi_n}{da_p}-(n_1p)\,da_p\right)+\sum\limits_{q=0}^{q=n}\frac{d\varphi}{dc_q}\,dc_q=0; \end{array}\right.$$

wo in (00), (01) .... (0m), (10), (11) .... (1m) .... (n0), (n1) .... (nm) statt x, x_1, x_2, ... x_n überall φ, φ_1, φ_2, ... φ_n zu setzen ist. Da nun die Gleichungen $x=\varphi$, $x_1=\varphi_1$, $x_2=\varphi_2$ .... $x_n=\varphi_n$ die gegebenen integriren, wenn man die Veränderlichkeit blofs auf x, x_1, x_2, ... x_n, a, beschränkt, so müssen die eben aufgestellten Gleichungen unter dieser Voraussetzung verschwinden; welches erfordert, dafs

$$\frac{d\varphi}{da}=(00),\quad \frac{d\varphi_1}{da}=(10),\quad \frac{d\varphi_2}{da}=(20)\quad \dots\quad \frac{d\varphi_n}{da}=(n0)\ \text{sei.}$$

Die Gleichungen (III.) verwandeln sich demnach in folgende:

$$\text{IV.}\quad\begin{cases}\sum_{p=1}^{p=m}\left(\frac{d\varphi}{da_p}-(0p)\right)da_p+\sum_{q=0}^{q=n}\frac{d\varphi}{dc_q}dc_q=0,\\ \sum_{p=1}^{p=m}\left(\frac{d\varphi_1}{da_p}-(1p)\right)da_p+\sum_{q=0}^{q=n}\frac{d\varphi_1}{dc_q}dc_q=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum_{p=1}^{p=m}\left(\frac{d\varphi_n}{da_p}-(n_1p)\right)da_p+\sum_{q=0}^{q=n}\left(\frac{d\varphi_n}{dc_q}dc_q\right)=0.\end{cases}$$

Setzen wir nun voraus, die im Lehrsatze angegebenen Bedingungen der Integrabilität fänden Statt: so müssen offenbar die Variationen der Gleichungen (IV.) ebenfalls für beliebige δa, δa_1, δa_2 .... δa_m identisch verschwinden, wenn den Variationen von c_0, c_1, c_2, ... c_n die aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{p=m}\frac{d\varphi}{da_p}\delta a_p+\sum_{q=0}^{q=n}\frac{d\varphi}{dc_q}\delta c_q&=\sum_{p=1}^{p=m}(0p)\delta a_p,\\ \sum_{p=1}^{p=m}\frac{d\varphi_1}{da_p}\delta a_p+\sum_{q=0}^{q=n}\frac{d\varphi_1}{dc_p}\delta c_p&=\sum_{p=1}^{p=m}(1p)\delta a_p,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum_{p=1}^{p=m}\frac{d\varphi_n}{da_p}\delta a_p+\sum_{q=0}^{q=n}\frac{d\varphi_n}{dc_q}\delta c_q&=\sum_{p=1}^{p=m}(np)\delta a_p\end{aligned}$$

folgenden Werthe gegeben werden, die mit denen übereinstimmen, welche die Gleichungen (IV.) durch Vertauschung der Variationen δa_1, δa_2, ... δa_m, δc_0, δc_1, δc_2, ... δc_n mit den entsprechenden Differentialen da_1, da_2, ... etc. geben würden. Man sieht hieraus, dafs die Variationen δc_0, δc_1, δc_2, ... δc_n verschwinden, sobald nur a verändert wird, δa_1, δa_2, ... δa_m aber gleich Null gesetzt werden.

Bringt man aber die Gleichungen (IV.) auf die Form:

$$\begin{aligned}dc&=A_1dc_1+A_2da_2+A_3da_3+\ldots+A_mda_m,\\ dc_1&=A'_1da_1+A'_2da_2+A'_3da_3+\ldots+A'_mda_m,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ dc^n&=A^n_1da_1+A^n_2da_2+A^n_3da_3+\ldots+A^n_mda_m,\end{aligned}$$

(wo die am obern Ende der Buchstaben A stehenden Zahlen Indices, nicht Exponenten sind), und variirt unter der erwähnten Voraussetzung, so bekommt man, ähnlich wie im vorhergehenden Satze:

$$\frac{dA_1}{da} = 0, \quad \frac{dA_2}{da} = 0, \quad \ldots\ldots \quad \frac{dA_m}{da} = 0,$$
$$\frac{dA'_1}{da} = 0, \quad \frac{dA'_2}{da} = 0, \quad \ldots\ldots \quad \frac{dA'_m}{da} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dA^n_1}{da} = 0, \quad \frac{dA^n_1}{da} = 0, \quad \ldots\ldots \quad \frac{dA^n_m}{da} = 0.$$

Die Coefficienten A sind demnach von a unabhängig. Das vorliegende System von Gleichungen läfst sich nun eben so, wie das ursprünglich gegebene, in ein anderes mit einer um eine Einheit geringeren Anzahl veränderlicher Gröfsen verwandeln, und man kann auf diese Weise fortfahren, bis nur ein System von $n+1$ Gleichungen zwischen $n+2$ Veränderlichen übrig bleibt. Dieses endlich ist stets integrabel, und folglich auch das gegebene, aus dem es nur durch wiederholte Transformationen gefunden wurde.

Aufgabe. Die Bedingungsgleichungen zu entwickeln, unter welchen ein System von $n+1$ lineären Differentialgleichungen zwischen beliebig vielen veränderlichen Gröfsen durch eben so viele endliche Gleichungen integrabel ist.

Auflösung. Es seien

$$dx - \sum_{p=0}^{p=m} (0p)\, da_p = 0,$$
$$dx - \sum_{p=0}^{p=m} (1p)\, da_p = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$dx - \sum_{p=0}^{p=m} (np)\, dx_p = 0$$

die gegebenen Gleichungen. Nach dem bekannten Algorithmus des Infinitesimalcalculs kann man die blofs von der Veränderung von a herrührenden Theile der Variationen der Ausdrücke links des Gleichheitszeichens erhalten, wenn man nur in Bezug auf a variirt, a, a_1, a_2, ... a_n aber constant bleiben läfst. Wendet man dies zunächst auf die erste der gegebenen Gleichungen an, und bemerkt, dafs unter dieser Voraussetzung $\delta x = (00)\,\delta a$, $\delta x_1 = (10)\,\delta a$, $\delta x_2 = (20)\,\delta a$, ... $\delta x_n = (n0)\,\delta a$ wird, so bekommt man:

$$d\delta x - \sum_{p=0}^{p=m}\left(\frac{d(0p)}{da}\delta a + \frac{d(0p)}{dx}\delta x + \frac{d(0p)}{dx_1}\delta x_1 + \ldots \frac{d(0p)}{dx_n}\right) + (00)\,d\delta a =$$
$$\delta x \sum_{p=0}^{p=m}\left[\frac{d(00)}{da_p} - \frac{d(0p)}{da} + \sum_{q=0}^{q=n}\left(\frac{d(00)}{dx_q}(qp) - \frac{d(0p)}{dq_q}(q0)\right)\right] da_p.$$

Auf dieselbe Art könnte man nun den von δa_1 abhängenden Theil von $\delta\left(dx - \sum_{p=0}^{p=m}(0p)\,da\right)$ suchen; es ist indessen leicht zu sehen: dafs man ihn aus vorstehendem Ausdruck erhalten mufs, indem man a mit a_1, (00) mit (01), $(q0)$ mit $(q1)$ vertauscht; welches

$$\delta a_1 \sum_{p=0}^{p=m}\left[\frac{d(01)}{da_p} - \frac{d(0p)}{da_1} + \sum_{q=0}^{q=n}\left(\frac{d(01)}{dx_q}(qp) - \frac{d(0p)}{dx_q}(q1)\right)\right] da_p$$

giebt. Aehnlich erhält man allgemein den von δa_r abhängenden Theil

$$\delta a_r \sum_{p=0}^{p=m}\left[\frac{d(0r)}{da_p} - \frac{d(0p)}{da_r} + \sum_{q=0}^{q=n}\left(\frac{d(0r)}{dx_q}(qp) - \frac{d(0p)}{dx_q}(qr)\right)\right] da_p.$$

Da nun $\delta\left(dx - \sum_{p=0}^{p=m}(0p)\,da_p\right)$ die Summe dieser verschiedenen in δa, δa_1, δa_2, ... δa_m multiplicirten Glieder ist, so kann diese Variation nur dann unabhängig von δa, δa_1, δa_2, ... δa_m verschwinden, wenn die Coefficienten dieser veränderlichen Incremente einzeln gleich Null werden. Diese Coefficienten sind aber wieder Summen von der Form

$$M\,da + M_1\,da_1 + M_2\,da_2 + \ldots + M_m\,da_m.$$

Sollen sie daher ohne irgend eine zwischen a, a_1, a_2, ... a_m festgesetzte Relation verschwinden, so müssen die Gröfsen M, M_1, M_2, ... M_m einzeln gleich Null werden. Der allgemeine Typus der Gleichungen, welche man auf diesem Wege aus der ersten der gegebenen findet, ist

$$0 = \frac{d(0r)}{da_p} - \frac{d(0p)}{da_r} + \sum_{q=0}^{q=n}\left(\frac{d(0r)}{dx_q}(qp) - \frac{d(0p)}{dx_q}qr\right).$$

Die einzelnen Bedingungen ergeben sich aus demselben, indem man nach und nach den Elementen r, p alle Werthe von 0 bis m ertheilt; die Anzahl derselben beläuft sich jedoch blofs auf so viele, als es Combinationen der Elemente 0, 1, 2, 3, ... m zu je zweien ohne Wiederholungen giebt, d. h. auf $\frac{m(m+1)}{1.2}$, indem der angegebene Typus für $p=r$ allemal von selbst serschwindet, und je zwei Gleichungen, in welchen p und r wechselseitig gleich sind, d. h., wo in der einen $p=a$, $r=b$, während in der andern $p=b$, $r=a$ ist, wesentlich dieselbe Bedingung enthalten. Um die aus der Gleichung

$$dx_k - \sum_{p=0}^{p=m} (kp)\, da_p = 0$$

entspringenden Bedingungen zu finden, darf man nur in der eben angegebenen die Coefficienten $(0r)$, $(0p)$ mit (kr), (kp) vertauschen; so gelangt man zu der allgemeinsten Form aller Bedingungsgleichungen des gegebenen Systems:

$$0 = \frac{d(kr)}{da_p} - \frac{d(kp)}{da_r} + \sum_{q=0}^{q=n} \left(\frac{d(kr)}{dx_q}(qp) - \frac{d(kp)}{dx_q}(qr) \right).$$

Diese Form giebt die einzelnen $k.\frac{(n+1)m}{1.2}$ Bedingungen, wenn man k alle Werthe von o bis n, q und p alle Werthe von o bis m durchlaufen läſst.

29.
Ueber Primzahlen.

(Von Herrn Gymnasiallehrer *Märcker* zu Meiningen.)

Obgleich es den Mathematikern noch nicht gelungen ist, eine genügende Theorie der Primzahlen aufzustellen, so scheint doch die Aufgabe nicht zu denen zu gehören, auf deren Lösung man für immer verzichten müfste, sondern es ist von der stets zunehmenden Ausbildung der Wissenschaft zu hoffen, dafs eine spätere Zeit sich noch der vollständigen Lösung derselben erfreuen werde. Bis dahin werden den Freunden der Wissenschaft auch einzelne Bemühungen willkommen sein, welche hoffen lassen, dafs sie jenem Ziele einen Schritt näher führen können. Vielleicht dürfte auch die hier folgende Darstellung zweier die Primzahlen betreffenden Sätze nicht ohne Interesse sein.

I.

Wenn A irgend eine positive ganze Zahl bedeutet, und man bezeichnet sämmtliche Primzahlen, welche kleiner als A sind, die Einheit ausgenommen, durch $a, b, c, d, \ldots. m$ und ihr Product durch p, so sind alle Zahlen von A bis A^2, und innerhalb dieser Gränzen, keine andere Zahlen als die in der Formel

$$p\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots.+\frac{u}{m}+n\right),$$

und zwar nur ein einzigesmal enthaltenen, wenn jeder der Zähler gröfser als Null und kleiner als der Nenner genommen wird.

Zuerst mufs nachgewiesen werden, dafs innerhalb der angegebenen Gränzen und mit den angegebenen Beschränkungen die Formel nur Primzahlen giebt. Als bekannt wird vorausgesetzt, dafs jede Zahl, die kleiner als A^2 und durch keine Primzahl unter A theilbar ist, eine Primzahl sein mufs. Dafs die Formel nur ganze Zahlen giebt, weil alle Brüche mit dem gemeinschaftlichen Nenner p multiplicirt werden, ist klar. Da nun die Nenner der Brüche sämmtliche Primzahlen unter A sind, so mufs gezeigt werden, dafs die Formel durch keinen der Nenner

theilbar ist. Nehmen wir einen solchen Nenner, z. B. d, so ist klar, daſs alle Glieder der Formel, nachdem sie mit p multiplicirt und dadurch zu ganzen Zahlen geworden sind, durch d theilbar sind, ausgenommen das Glied, welches d als Nenner enthält; denn z. B. $\frac{\beta p}{b}$ ist durch d theilbar, weil p es ist und b mit d keinen gemeinschaftlichen Factor hat; und so alle übrigen, auſser $\frac{\delta p}{d}$; dies ist durch d nicht theilbar, da p die Primzahl d nur *ein*mal als Factor enthält und diesen Factor durch die Division mit d verliert, δ jedoch kleiner als d ist und daher d nicht als Factor enthalten kann. Da nun alle Glieder der Formel, bis auf das eine, durch d theilbar sind, so ist die Formel durch d nicht theilbar. Eben so wenig ist sie durch einen der andern Nenner theilbar, und sie enthält daher, bis zu A^2, nur Primzahlen.

Nun muſs nachgewiesen werden, daſs *alle* Primzahlen von A bis A^2 in der Formel, und zwar nur *ein*mal, enthalten sind. Wenn P eine Primzahl, die man beliebig zwischen A und A^2 annimmt, bezeichnet, so ist zu zeigen, daſs die unbestimmte Gleichung

$$P = p\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \dots + \frac{\mu}{m} + n\right),$$

worin die Zähler der Brüche und auſserdem n die unbestimmten Gröſsen sind, jedenfalls, unter den gegebenen Beschränkungen, in ganzen Zahlen nur auf eine einzige Weise aufgelöset werden kann. Wir erhalten aus jener Gleichung

$$\frac{\alpha p}{a} + \frac{\beta p}{b} + \frac{\gamma p}{c} + \frac{\delta p}{d} + \dots + \frac{\mu p}{m} + np - P = 0.$$

Da nun Null durch alle Zahlen theilbar ist, so muſs es auch der Ausdruck auf der linken Seite sein; es müssen also auch nothwendig sämmtliche Nenner darin aufgehen. Dieses nothwendige Erforderniſs dient zur Bestimmung des Werthes der Zähler. Um z. B. δ zu bestimmen, wissen wir schon, daſs d in allen Gliedern, auſser in $\frac{\delta p}{d}$ und in $-P$ aufgeht: also muſs δ so bestimmt werden, daſs d in $\frac{\delta p}{d} - P$ aufgeht. Die Reste, welche d bei der Division in $\frac{p}{d}$ und in P übrig läſst, nennen wir q und r; also wird d in $\frac{\delta p}{d} - P$ aufgehen, wenn $\frac{q\delta - r}{d}$ eine ganze Zahl ist. Da nun d und q relative Primzahlen sind, indem der Rest q immer kleiner

sein mufs als die Primzahl d, so läfst sich δ jedenfalls so bestimmen, dafs $\frac{q\delta - r}{d}$ eine ganze Zahl wird. Die Form für δ ist, wie aus der unbestimmten Analytik bekannt, $\delta = ds \pm tr$, wo t der Zähler des vorletzten Partialwerths von $\frac{d}{q}$, welcher in einen Kettenbruch verwandelt wird (also $t < d$), s aber noch unbestimmt ist. Da nun $\delta < d$ und > 0 werden soll, so erhält man $s < \mp \frac{tr}{d} + 1$ und $> \mp \frac{tr}{d}$. Da r als Rest zum Divisor d, und t, wie wir ebenfalls sahen, kleiner als die Primzahl d ist, so sind r und t zu d relative Primzahlen: also ist $\frac{tr}{d}$ nie eine ganze Zahl. Deshalb mufs es immer eine ganze Zahl geben, welche $> \pm \frac{tr}{d}$ und $< \pm \frac{tr}{d} + 1$ ist; aber auch nur eine einzige, da der Unterschied von $\mp \frac{tr}{d}$ und $\mp \frac{tr}{d} + 1$ blofs 1 ist. Man erhält also für s jedesmal einen einzigen bestimmten Werth, für welchen dann aus $\delta = ds \pm tr$ auch ein einziger bestimmter Werth von δ sich ergiebt. Eben so folgt, dafs da für jeden andern Zähler in unserer Formel immer ein einziger bestimmter Werth enthalten ist, der die nothwendige Bedingung erfüllt, dafs der Ausdruck

$$\frac{\alpha p}{a} + \frac{\beta p}{b} + \frac{\gamma p}{c} + \frac{\delta p}{d} + \ldots + \frac{\mu p}{m} + n - P$$

sich durch die sämmtlichen Nenner, und, da sie Primzahlen sind, auch durch ihr Product p ohne Rest dividiren läfst. Haben nun auf die beschriebene Weise alle Zähler ihren bestimmten Werth erhalten, und wir nennen den Quotienten, der durch die Division von

$$\frac{\alpha p}{a} + \frac{\beta p}{b} + \frac{\gamma p}{c} + \frac{\delta p}{d} + \ldots + \frac{\mu p}{m} - P$$

durch p entsteht, Q, so wird unsere Gleichung nach der Division mit p,

$$n + Q = 0,$$

woraus $n = -Q$ folgt. Demnach erhält n für jedes positive Q, nämlich, wenn die mit p multiplicirte Summe aller Brüche die Primzahl P an Gröfse übertrifft, was meistens der Fall ist, einen negativen Werth. Da nun, wie aus dem Gesagten hervorgeht, die Gleichung:

$$P = p\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots + \frac{\mu}{m} + n\right),$$

wo P irgend eine Primzahl zwischen A und A^2 bedeutet, sich immer in ganzen Zahlen lösen läfst, so müssen in der Formel

$$p\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots\ldots+\frac{\mu}{m}+n\right)$$

alle Primzahlen zwischen A und A^2, und auch A selbst, wenn es eine Primzahl ist, enthalten sein. Da ferner, wie wir sahen, für ein bestimmtes P, jede der Gröfsen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots \mu, n$ nur einen einzigen bestimmten Werth erhalten kann, so ist jede Primzahl zwischen A und A^2, unter den angegebenen Beschränkungen, nur ein einzigesmal in der Formel enthalten. Dafs keine kleinere Primzahl als A, die Einheit ausgenommen, darin enthalten sein kann, folgt daraus, dafs, wie wir sahen, die Formel durch keinen der Nenner, also durch keine Primzahl unter A theilbar ist.

Es ist nun noch zu zeigen, wie man aus der Formel die Primzahlen der Reihe nach erkennen kann. Man bestimmt zu diesem Zwecke für eine Primzahl, von der man ausgehen will, z. B. für die kleinste aufser der Einheit in der Formel enthaltene, die Werthe der Zähler α, β, etc. und von n auf die beschriebene Weise. Da nun zwischen dieser Primzahl und der nächstfolgenden der Unterschied 2 oder ein Vielfaches von 2 ist, so untersucht man, wie der Werth jedes Zählers und von n abgeändert werden mufs, damit die Formel eine um 2 höhere Zahl giebt. Man setzt daher, wenn $\frac{\alpha'}{a}$ der Bruch für die erste Primzahl nach der Einheit, also für 2 bezeichnet, dessen Zähler nach den angegebenen Beschränkungen nur 1 sein kann, mit Weglassung dieses Bruches $\frac{1}{2}$:

$$p\left(\frac{\beta'}{b}+\frac{\gamma'}{c}+\frac{\delta'}{d}+\ldots\ldots+\frac{\mu'}{m}+n'\right)=2,$$

oder

$$\frac{\frac{1}{2}\beta' p}{b}+\frac{\frac{1}{2}\gamma' p}{c}+\frac{\frac{1}{2}\delta' p}{d}+\ldots\ldots+\frac{\frac{1}{2}\mu' p}{m}+\tfrac{1}{2}n'p=1.$$

Hier ist, wie man leicht sieht, jedes Glied eine ganze Zahl, und die Gröfsen $\beta', \gamma', \delta', \ldots\ldots \mu', n'$ lassen sich, wie oben, so bestimmen, dafs der Gleichung Genüge geschieht. Hat man nun für die Primzahl P, von der man ausgehen will:

$$p\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots\ldots+\frac{\mu}{m}+n\right)=P$$

und man addirt

$$p\left(\frac{\beta'}{b}+\frac{\gamma'}{c}+\frac{\delta'}{d}+\ldots\ldots+\frac{\mu'}{m}+n'\right)=2,$$

so giebt dies:

$$p\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta+\beta'}{b}+\frac{\gamma+\gamma'}{c}+\frac{\delta+\delta'}{d}+\dots+\frac{\mu+\mu'}{m}+n+n\right)=P+2.$$

Ist nach dieser Addition irgend ein Zähler von der Beschaffenheit, dafs der Nenner darin aufgeht, so ist $P+2$ keine Primzahl. Denn wenn z. B. d in $\delta+\delta'$ aufgeht, so geht es auch in $P+2$ auf, da es in allen andern Gliedern, nachdem sie mit p multiplicirt sind, aufgeht. Eben so leicht folgt aus dem früher Bewiesenen, dafs, wenn kein Nenner in den Zähler aufgeht, $P+2$ eine Primzahl sein mufs. Will man nun zu $P+4$ fortschreiten, so mufs man zu dem erhaltenen Ausdruck für $P+2$ wieder

$$p\left(\frac{\beta'}{b}+\frac{\gamma'}{c}+\frac{\delta'}{d}+\dots+\frac{\mu'}{m}+n'\right)=n$$

addiren, und wie vorher die Prüfung anstellen. Man thut jedoch wohl, um so kleine Zahlen als möglich zu behalten, wenn man vorher in dem Ausdruck für $P+2$ alle Zähler, die gröfser als der Nenner geworden sind, um so viel Einheiten als der Nenner beträgt, vermindert und dafür zu $n+n'$ so viele Einheiten addirt, als die Anzahl der so verminderten Zähler beträgt. Vermindert man z. B. den zu d gehörigen Zähler um d, so vermindert man den Bruch um 1, und es mufs daher der Werth der Formel unverändert bleiben, wenn man innerhalb der Parenthesen, am besten zu $n+n'$ eine Einheit addirt, oder, wenn bei mehreren Zählern die Subtraction vorgenommen wird, so viele Einheiten, als die Anzahl dieser Zähler beträgt. Ist man dann zu $P+4$ fortgeschritten und hat auf die gesagte Weise die Prüfung angestellt, auch die Zähler wieder, wie eben beschrieben wurde, reducirt, so kann man zu $P+6$ fortschreiten u. s. w. Auf diese Weise lassen sich der Reihe nach alle Primzahlen, als solche, aus der Formel erkennen und zugleich von den Zahlen, die es nicht sind, die Primfactoren finden.

Wollte man aufser der Reihe eine ungerade Zahl, die $=P+2\nu$ wäre, prüfen, so wäre nach Obigem:

$$p\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\dots+\frac{\mu}{m}+n\right)=P$$

und

$$p\left(\frac{\nu\beta'}{b}+\frac{\nu\gamma'}{c}+\frac{\nu\delta'}{d}+\dots+\frac{\nu\mu'}{m}+\nu p'\right)=2\nu,$$

also

$$p\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta+\nu\beta'}{b}+\frac{\gamma+\nu\gamma'}{c}+\frac{\delta+\nu\delta'}{d}+\dots+\frac{\mu+\nu\mu'}{m}+n+\nu n'\right)=P+2\nu.$$

Gingen hier in einen oder mehreren der neu erhaltenen Zähler die zugehörigen Nenner auf, so wäre $P+2\nu$ durch jene Nenner theilbar: wo nicht, so wäre $P+2\nu$ eine Primzahl.

II.

Die Kettenbrüche gewähren eine bequeme Methode, die Theiler einer gegebenen Zahl A zu berechnen. Man muſs zu diesem Zwecke $\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch verwandeln. Man erhält dafür (nach der Bezeichnung in *Klügels* math. Wörterbuch, unbestimmte Analytik, 36):

$$Q = 0; \qquad P = 1; \qquad a < \sqrt{A};$$

$$Q' = a; \qquad P' = \frac{A - Q'^2}{P}; \qquad a' < \frac{\sqrt{A} + Q'}{P'};$$

$$Q'' = a' P' - Q'; \qquad P'' = \frac{A - Q''^2}{P'}; \qquad a'' < \frac{\sqrt{A} + Q'}{P''};$$

$$Q'' = a'' P'' - Q''; \qquad P''' = \frac{A - Q'''^2}{P''}; \qquad a'' < \frac{\sqrt{A} + Q'''}{P'''};$$

u. s. w.

wo das Zeichen $<$, zwischen zwei Gröſsen gesetzt, bedeutet, daſs die erste die gröſste in der zweiten enthaltene ganze Zahl ist. Die verschiedenen a sind die Nenner des Kettenbruchs, so daſs

$$\sqrt{A} = a + \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \cfrac{1}{a'' + \ldots}}}$$

ist. Hier findet nun bekanntlich das Gesetz Statt, daſs sowohl die a als auch die P und Q jeder Periode symmetrisch gleich sind, namentlich das nullte P (nämlich 1) dem letzten, das erste dem vorletzten, das zweite dem drittletzten u. s. w.; das erste Q dem letzten, das zweite dem vorletzten, das dritte dem drittletzten u. s. w. Ist nun die Gliederzahl einer Periode gerade, $=2n$, was bei weitem in den meisten Fällen Statt findet, so ist das n^{te} Q dem $(n+1)^{\text{ten}}$ gleich, das $(n-1)^{\text{te}}$ P dem $(n+1)^{\text{ten}}$; das n^{te} P aber hat kein ihm entsprechendes gleiches in derselben Periode; und es findet dann der merkwürdige Satz Statt, *daſs das n^{te} P, oder dessen Hälfte, jedesmal ein Factor von A sein muſs.*

Wir setzen nemlich nach Obigem, indem wir beim $(n-1)^{\text{ten}}$ Gliede fortfahren:

$$Q_{n-1} = \mathfrak{Q}; \quad P_{n-1} = \mathfrak{P}; \quad a_{n-1} = \mathfrak{a} < \frac{\sqrt{A}+\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}};$$
$$Q_n = \mathfrak{Q}' = \mathfrak{a}\,\mathfrak{P} - \mathfrak{Q}; \quad P_n = \mathfrak{P}' = \frac{A-\mathfrak{Q}'^2}{\mathfrak{P}}; \quad a_n = \mathfrak{a}' < \frac{\sqrt{A}+\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{P}'};$$
$$Q_{n+1} = \mathfrak{Q}'' = \mathfrak{a}'\mathfrak{P}' - \mathfrak{Q}'; \quad P_{n+1} = \mathfrak{P}'' = \frac{A-\mathfrak{Q}''^2}{\mathfrak{P}'}; \quad a_{n+1} = \mathfrak{a}'' < \frac{\sqrt{A}+\mathfrak{Q}''}{\mathfrak{P}''};$$

u. s. w.

Da hier, wie oben bemerkt, $Q_n = Q_{n+1}$ ist, so haben wir: $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{a}'\mathfrak{P}' - \mathfrak{Q}'$ und hieraus $\mathfrak{Q}' = \frac{1}{2}\mathfrak{a}'\mathfrak{P}' = \mathfrak{Q}''$. Dies in den Werth von P_{n+1} eingetragen, giebt: $P_{n+1} = \frac{A - \frac{1}{4}\mathfrak{a}'^2\mathfrak{P}'^2}{\mathfrak{P}'}$. Da nun $P_{n-1} = P_{n+1}$ ist, so haben wir

$$\mathfrak{P} = \frac{A - \frac{1}{4}\mathfrak{a}'^2\mathfrak{P}'^2}{\mathfrak{P}'},$$

woraus folgt:

$$A = \mathfrak{P}\mathfrak{P}' + \tfrac{1}{4}\mathfrak{a}'^2\mathfrak{P}'^2$$

oder

$$A = \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}'(2\mathfrak{P} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}'^2\mathfrak{P}').$$

Demnach ist $\mathfrak{P}'$ selbst, wenn es ungerade ist (wo denn $\mathfrak{a}'$ gerade sein muſs), oder, wenn es gerade ist, $\frac{1}{2}\mathfrak{P}'$, immer ein Factor von A.

Ist nun $\mathfrak{P}'$, als ungerade Zahl, ein Factor von A, so hat man als andern Factor $\mathfrak{P} + \frac{1}{4}\mathfrak{a}'^2\mathfrak{P}'$, welcher letztere, da $\frac{1}{4}\mathfrak{a}'^2$ eine ganze Zahl sein muſs, offenbar gröſser als $\mathfrak{P}'$ ist; ist aber $\mathfrak{P}'$ gerade, und $\frac{1}{2}\mathfrak{P}'$ ein Factor von A, so ist der andere Factor $2\mathfrak{P} + \frac{1}{2}\mathfrak{a}'^2\mathfrak{P}'$ auch wieder offenbar gröſser als $\frac{1}{2}\mathfrak{P}$: also ist der so gefundene Factor $\mathfrak{P}'$ oder $\frac{1}{2}\mathfrak{P}'$ jedesmal kleiner als der andere. Ist demnach A eine Primzahl, so muſs nothwendig entweder $\mathfrak{P}'$ oder $\frac{1}{2}\mathfrak{P}' = 1$ sein. $\mathfrak{P}'$ kann aber nicht $= 1$ sein. Denn dann hätten wir $a_n = \mathfrak{a}' < \sqrt{A} + \mathfrak{Q}'$; d. h. $\mathfrak{a}'$ wäre die gröſste in $\sqrt{A} + \mathfrak{Q}'$ enthaltene ganze Zahl. Die gröſste in $\sqrt{A}$ enthaltene ganze Zahl haben wir a genannt; also wäre $a_n = \mathfrak{a}' = a + \mathfrak{Q}'$. Ferner wäre $Q_{n+1} = \mathfrak{Q}'' = \mathfrak{a}' - \mathfrak{Q}'$, und wenn der Werth für $\mathfrak{a}'$ gesetzt wird, $Q_{n+1} = \mathfrak{Q}'' = a$. Auch wäre $P_{n+1} = \mathfrak{P}'' = A - \mathfrak{Q}''^2$, und wenn $\mathfrak{Q}'' = a$ gesetzt wird, $P_{n+1} = \mathfrak{P}'' = A - a^2$. Endlich $a_{n+1} = \mathfrak{a}'' < \frac{\sqrt{A}+\mathfrak{Q}''}{\mathfrak{P}''}$, oder $a_{n+1} < \frac{\sqrt{A}+Q_{n+1}}{P_{n+1}}$. Für das erste Q hatten wir $Q' = a$ und nun für das $(n+1)^{\text{te}}$: $Q_{n+1} = a$, also $Q_{n+1} = Q'$. Für das erste P hatten wir $P' = \frac{A-Q'^2}{P}$, oder, da $P = 1$ und $Q' = a$ ist, $P' = A - a^2$; und nun auch $P_{n+1} = A - a^2$; also $P_{n+1} = P'$. Für das erste a hatten wir $a' < \frac{\sqrt{A}+Q'}{P'}$, und $a_{n+1} < \frac{\sqrt{A}+Q_{n+}}{P_{n+1}}$

folglich, da $Q_{n+1} = Q'$ und $P_{n+1} = P'$ ist, auch $a_{n+1} = a'$. Also wäre jetzt wieder Alles wie zu Anfang der Periode. Für $\mathfrak{P}' = 1$ muſs also die Periode beendigt sein, weil unmittelbar darauf eine neue anfinge. Nach unserer Voraussetzung hat aber die Periode $2n$ Glieder, und $\mathfrak{P}'$ ist das n^{te} P und nicht das letzte; weshalb $\mathfrak{P}'$ nicht $= 1$ sein kann. Also bleibt hier für Primzahlen nur der andere Fall $\frac{1}{2}\mathfrak{P}' = 1$ oder $\mathfrak{P}' = 2$ übrig. *Für alle Primzahlen also, deren Quadratwurzeln Perioden von gerader Gliederzahl $= 2n$ haben, ist das n^{te} $P = 2$.* Dies würde ein Merkmal zur Erkennung der Primzahlen abgeben, wenn nicht dasselbe auch bei andern Zahlen Statt fände. Für solche Zahlen lassen sich also nicht die Factoren unmittelbar auf die angegebene Weise finden. Die Form, welche sie mit jenen Primzahlen gemein haben, ist $\frac{u^2 \pm 2}{v^2}$; denn wenn $\frac{u}{v}$ der $(n-1)^{te}$ Partialwerth für $\sqrt{A}$, das n^{te} P aber, wie hier, $= 2$ ist, so gilt bekanntlich die Gleichung $u^2 - Av^2 = \mp 2$. Hieraus folgt $A = \frac{u^2 \pm 2}{v^2}$, wo das obere oder untere Zeichen vor 2 gültig ist, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Man erhält jedoch auch für solche Zahlen die Factoren, wenn man sie vorher mit einer Primzahl multiplicirt und dann auf die angegebene Weise behandelt. Ist die zu zerlegende Zahl selbst eine Primzahl, so wird man dann bloſs den hinzu gebrachten Factor wieder finden. Denkbar ist freilich der Fall, daſs Letzteres auch bei anderen Zahlen einträte; doch habe ich hierüber theoretisch noch nichts ausmitteln können; bei vielen berechneten Beispielen, wo ich eine ungerade zu prüfende Zahl gewöhnlich mit 3 multiplicirte, ist mir der Fall nicht ein einziges Mal vorgekommen.

Für die Zahlen, deren Quadratwurzeln Perioden von ungerader Gliederzahl $= 2n+1$ haben, also für alle, welche, für A gesetzt, die Gleichung $x^2 - Ay^2 = -1$ in rationalen ganzen Zahlen auflösbar machen, ist das n^{te} P dem $(n+1)^{ten}$ gleich. Wir hatten in obigem Schema $\mathfrak{P}'' = \frac{A - \mathfrak{Q}''^2}{\mathfrak{P}'}$, und da nach dem eben Gesagten jetzt $\mathfrak{P}'' = \mathfrak{P}'$ ist, so giebt dies $\mathfrak{P}'' = \frac{A - \mathfrak{Q}''^2}{\mathfrak{P}''}$ und $A = \mathfrak{P}''^2 + \mathfrak{Q}''^2$. Diese Art von Zahlen ist also jedesmal die Summe zweier Quadrate *). Wenn eine Zahl die Summe

*) Es gilt von diesen Zahlen noch mehr, was hier nur beiläufig erwähnt werden kann, nämlich daſs sie ein ganz abgeschlossenes System bilden, worin keine einzige Zahl einen Primfactor hat, der nicht auch eine Zahl dieses Systems wäre. Die Zahlen dieses Systems unter 1000

zweier Quadrate ist, z. B. $r = s^2 + t^2$, so sind s und t entweder relative Primzahlen oder nicht. Für den ersteren Fall hat r blofs Factoren, welche wieder die Summe zweier Quadrate sind (*Klügels* math. Wörterb., Zahl, VI. 1.); für den letztern sei $s = ps'$ und $t = pt'$, wo p der gröfste gemeinschaftliche Factor von s und t ist, also s' und t' relative Primzahlen sind. Dann ist $r = p^2(s'^2 + t'^2)$, und $s'^2 + t'^2$ hat nur Factoren, die wieder die Summe zweier Quadrate sind. Also kann r aufser solchen Factoren nur noch einen quadratischen Factor haben. Multiplicirt man daher eine Zahl, welche die Summe zweier Quadrate ist, mit einer andern, die dies nicht ist, und auch kein Quadrat ist, so kann, wie nun leicht erhellet, nicht wieder die Summe zweier Quadrate oder ein Quadrat herauskommen. Hieraus folgt, dafs, wenn man $A = \mathfrak{P}'^2 + \mathfrak{Q}'^2$ mit einer Zahl, die kein Quadrat und auch nicht die Summe zweier Quadrate ist, z. B. mit 3 multiplicirt, eine Zahl herauskommen mufs, deren Quadratwurzel Perioden von gerader Gliederzahl hat, weil, wenn die Gliederzahl wieder ungerade wäre, die erhaltene Zahl wieder die Summe zweier Quadrate sein müfste. Hiernach kann man die oben beschriebene Art der Zerlegung in Factoren auch auf die Zahlen anwenden, welche in den Perioden ihrer Quadratwurzeln eine ungerade Gliederzahl haben, indem man ein Product einer solchen Zahl von entgegengesetzter Beschaffenheit, z. B. des aus der Multiplication mit 3 entstandenen, auf jene Weise behandelt. Hier wird man für Primzahlen auch nur den hinzu gebrachten Factor wiederfinden. Doch ist auch hier der Fall denkbar, dafs dies auch bei anderen Zahlen geschehen könnte; worüber ich aber ebenfalls theoretisch noch nichts habe auffinden können. In den berechneten Beispielen bin ich auch hier auf einen solchen Fall niemals gestofsen.

Zum Schlusse möge hier noch einer oft anwendbaren Art erwähnt werden, wie die Factorenzerlegung nicht selten auch bei grofsen Zahlen leicht ausführbar ist. Wenn man nämlich bei der Entwickelung der Quadratwurzel einer Zahl in einen Kettenbruch auf ein m^{tes} P trifft (wo m eine gerade Zahl bedeutet), welches ein Quadrat ist, z. B. $= q^2$, und man bezeichnet den $(m-1)^{\text{ten}}$ Partialwerth von $\sqrt{A}$ mit

---

sind verzeichnet in *Egens* Handbuch der allg. Arithm. Theil I. §. 297. Doch sind hier sonderbarer Weise alle hierhergehörigen mit eingliedriger Periode, denen ausschliefslich die Form $q^2 + 1$ zugehört, weggelassen.

$\frac{u}{v}$, so gilt bekanntlich die Gleichung $u^2 - Av^2 = q^2$; woraus $A = \frac{u^2 - q^2}{v^2}$ oder $A = \frac{(u+q)(u-q)}{v^2}$ folgt. Hier muſs $u+q$ und auch $u-q$ einen Factor mit A gemein haben, den man nach der bekannten Methode der Auffindung des gröſsten gemeinsamen Factors leicht berechnen kann. Da es hier, wenn $u+q$ und $u-q$ gröſser als A sind, nicht auf den absoluten Werth dieser Gröſsen, sondern nur auf den Rest ankommt, der bei der Division mit A in $u+q$ oder $u-q$ bleibt, so braucht man auch statt u nur den Rest zu berechnen, den u bei der Division mit A übrig läſst. Für die verschiedenen Partialwerthe entsteht jeder neue Zähler, indem man den vorletzten gefundenen zu einem Producte des letzten addirt. Der bei der Division mit A bleibende Rest wird daher bei jedem neuen Zähler nicht verändert, wenn in den beiden vorhergehenden Zählern ein Vielfaches von A weggelassen und statt der Zähler nur die vom Divisor A übrig gelassenen Reste genommen werden. Es kommt also durchgängig nur auf diesen Rest an, und man kann daher denselben auch für u finden, wenn man ihn für alle vorhergehenden Zähler statt der Zähler selbst berechnet. Hierdurch werden die groſsen, den Werth von A weit übersteigenden Zahlen, die man sonst leicht bekommt, vermieden. Wollte man bis zu Ende der Periode fortrechnen, so würde man zwar immer auf ein P, welches ein Quadrat ist, nämlich das letzte $P=1$ stoſsen: doch läſst sich nachweisen, daſs bei gerader Gliederzahl der Periode in allen Fällen, wo die obige kürzere Art der Factorenzerlegung nur die Factoren 1 und A giebt, es auch bei dieser weitläuftigeren der Fall ist. Ist dagegen die Gliederzahl ungerade, und man rechnete bis zu $P=1$ am Ende der zweiten Periode fort, (dies wäre nöthig, da der Index für P am Ende der ersten Periode eine ungerade, hier aber eine gerade Zahl ist) so läſst sich zeigen, daſs man hier immer nur die Factoren 1 und A finde. Beides nachzuweisen würde jedoch die Gränzen dieser Abhandlung überschreiten.

Meiningen, im December 1839.

Druckfehler im 19ten Bande.

S. 373 Z. 18 v. o. statt C l. C^4
— 376 — 17 v. o. statt tdz l. tdx
— 382 — 12 v. o. lese man: sie mufs also entweder eine besondere Auflösung gestatten, oder mit u. s. w.

Im 20sten Bande.

S. 172 Z. 3 v. u. statt unveränderlichem lies veränderlichem
P. 179 ligne 22 l. ψx au l. de $\psi' x$
— 181 — 1 - de - - - dans
— 182 — 10 - où - - - ou
— 187 — 10 - $r + \frac{p}{n}$ au l. de $r + \frac{r}{n}$

30.

Inhalts-Verzeichnifs I.

der zweiten zehn Bände des Journals für die reine und angewandte Mathematik, 11 bis 20, herausgegeben zu Berlin in den Jahren 1833 bis 1840 von *A. L. Crelle;* nach alphabetischer Ordnung der Namen der Verfasser.

Dr. E. F. August, Gymnasialdirector zu Berlin.

		Band.	Heft.	Seite.
324.	Eine Eigenschaft des Kreises.	17.	IV.	387

Dr. Bauer, in Stettin.

		Band.	Heft.	Seite.
325.	Beweise einiger geometrischen Lehrsätze.	19.	III.	205

Brennecke, Professor der Mathematik zu Berlin.

		Band.	Heft.	Seite.
326.	Sur le théorême de Wilson.	19.	IV.	319

C. A. Bretschneider, Professor der Mathematik zu Gotha.

		Band.	Heft.	Seite.
327.	Beiträge zur sphärischen Trigonometrie.	13.	I.	85
		13.	II.	145
328.	Theoriae logarithmi integralis lineamenta nova.	17.	III.	257

C. J. Broch, Cand. der Philosophie zu Christiania.

		Band.	Heft.	Seite.
329.	Sur quelques propriétés d'une certaine classe de fonctions transcendantes.	20.	II.	178

Ch. Brooke, Professor at St. Johns College at Cambridge.

		Band.	Heft.	Seite.
330.	Solution of the partial-differential equation to the motion of sound in space.	13.	III.	260

Brune, Rechnungsrath zu Berlin.

		Band.	Heft.	Seite.
331.	Gröfstes Quadrat im Dreiecke.	15.	IV.	365
332.	Auflösung der Aufgabe No. 5. im 15ten Bande S. 375 dieses Journals.	16.	I.	80
333.	Anderer Beweis vorsteheder Auflösung der Aufgabe No. 5. Band 15. S. 375 dieses Journals.	16.	IV.	373
334.	Neue Sterblichkeits-Tabellen für Wittwen-Cassen.	16.	I.	58

Bruun, Professor zu Odessa.

		Band.	Heft.	Seite.
335.	Einiges von Kegelschnitten.	16.	III.	215

Th. Clausen, zu München.

		Band.	Heft.	Seite.
336.	Beweis des Lehrsatzes des Hrn. Steiner (im 2. Bd. S. 192 No. 34. dieses Journals.)	11.	IV.	399
337.	Beitrag zur Theorie der krummen Linien dritter Ordnung.	11.	IV.	402

		Band.	Heft.	Seite.
	Ed. Collins, Staatsrath und Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg.			
338.	Neuer Beweis der Zerlegbarkeit ganzer Functionen in reelle Factoren vom ersten oder zweiten Grade. (Nach einer vor der Kaiserlichen Academie der Wissenschaften zu St. Petersburg in deren Sitzung am $\frac{10}{22}$ März 1835 gehaltenen Vorlesung neu bearbeitet.)	18.	II.	119
	A. L. Crelle, Herausgeber dieses Journals.			
339.	Comment, dans la trigonométrie sphérique, les formules de *Gauſs* et les analogies de *Neper*, qui en découlent, peuvent être tirées immédiatement et facilement des formules fondamentales.	12.	IV.	348
340.	Die Sätze von *Fourier* und *Sturm* zur Theorie der algebraischen Gleichungen.	13.	II.	119
341.	Wie sich die Division mit Zahlen erleichtern und zugleich sicherer ausführen läſst, als auf die gewöhnliche Weise.	13.	III.	209
342.	Zur Theorie des Kreises.	14.	I.	66
343.	Démonstration élémentaire du théorème de Wilson généralisé.	20.	I.	29
	Dr. F. Deahna, zu Cassel in Hessen.			
344.	Neuer Beweis für die Auflösbarkeit der algebraischen Gleichungen durch reelle oder imaginäre Werthe der Unbekannten.	20.	IV.	337
345.	Ueber die Bedingungen der Integrabilität linearer Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen einer beliebigen Anzahl veränderlicher Gröſsen.	20.	IV.	340
	Dippe, Stud. phil. zu Halle.			
346.	Ueber einige Aufgaben und Lehrsätze des Herrn Professor *Steiner*.	16.	I.	65
	Dr. Dirksen, Professor der Mathematik an der Universität zu Berlin.			
347.	Ueber die Auflösung der numerischen Gleichungen mit einer Unbekannten. (Ein Auszug aus einer, am 7. Mai 1835 in der Königl. Akademie der Wissenschaften gehaltenen Vorlesung.)	14.	IV.	316
	A. Fischer, Prof. der Math. zu Königsberg in Pr.			
348.	Resolutio algebraica aequationis $x^{257}-1=0$.	11.	III.	201
	Freiherr von Forstner, Königl. Preuſs. Hauptmann zu Berlin.			
349.	Ueber den innern Grund der Erscheinung der Aberration des Lichtes.	20.	II.	101
	Dr. W. A. Förstemann, Prof. der Math. zu Danzig.			
350.	Einfacher Beweis eines Satzes der Combinationslehre.	13.	III.	237
351.	Umkehrung des Ptolomäischen Satzes.	13.	III.	233
352.	Ueber das Rationalmachen algebraischer Gleichungen.	14.	III.	236
	Gerling, Professor an der Universität zu Marburg.			
353.	Fragment über die Begründung des Begriffs der Ebene.	20.	IV.	332

P. Gerwien, Königl. Preuſs. Hauptmann.

No.	Titel	Band	Heft	Seite
354.	Beweis einiger auf der Kugel Statt findenden Sätze. In Folge der in Bd. 9. S. 102 No. 13. und 14. d. J. stehenden Aufforderung bearbeitet.	11.	II.	130
355.	Einige geometrische Sätze.	11.	III.	264

Dr. Grunert, Professor der Mathematik zu Greifswalde.

No.	Titel	Band	Heft	Seite
356.	Ueber *Lamberts* Theorem von der Quadratur parabolischer Sectoren, und verwandte Sätze.	16.	I.	21

Dr. C. Gudermann, Professor der Mathematik an der Akademie zu Münster in Westphalen.

No.	Titel	Band	Heft	Seite
357.	Die loxodromische Linie und ihr merkwürdiger Zusammenhang mit der sphärischen Kettenlinie.	11.	IV.	394
358.	Aufgaben.	11.	II.	199
359.	Lehrsätze zu beweisen.	12.	I.	82
360.	Lehrsätze, zu beweisen, und Anmerkungen zu dem Aufsatze 15. im 2. Hefte 12. Bandes dieses Journals.	12.	IV.	362
361.	Beitrag zur analytischen Sphärik.	13.	III.	262
362.	Neue und directeste Methode, aus den gemessenen Höhen zweier bekannter Sterne und der Zwischenzeit der beiden Beobachtungen die Polhöhe zu finden. (In Folge des Aufsatzes 34. im zweiten Bande dieses Journals S. 345.)	13.	III.	274
363.	Integralia elliptica tertiae speciei reducendi methodus simplicior, quae simul ad ipsorum applicationem facillimam et computum numericum expeditum perducit. Sectionum conico sphaericarum quadratura et rectificatio.	14. 14.	II. III.	159 185
364.	Methodus nova et simplex computandi valores integralium $\int_0^\varphi P\partial\varphi$, et iteratorum $\iint P\partial\varphi^2$, $\iiint P\partial\varphi^3$ etc. in quibus P est functio qualiscunque quantitatis $\sin\varphi$ sive $\cos\varphi$ per series rapido convergentes.	14. 15.	II. I.	182 100
365.	Nachträgliche Entwickelungen zur Theorie der Potenzial-Functionen im Betreff der vermittelnden Function $\mathfrak{L}x$ und $\frac{\mathfrak{L}(x+i)}{i} = lx$.	15.	II.	173
366.	Einige Bemerkungen über elliptische Functionen.	16.	I.	78
367.	Series novae, quarum ope integralia elliptica primae et secundae speciei computantur simul ea, quorum moduli sunt conjugati.	16. 17.	IV. IV.	366 382
368.	Aufgaben und Lehrsätze.	17.	IV.	389
369.	Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale.	18. 18. 18. 18. 19. 19. 19. 20. 20.	I. II. III. IV. I. II. III. I. II.	1 142 220 303 46 119 244 62 103

		Band.	Heft.	Seite.
	Dr. C. Gützlaff, Professor am Gymnasio zu Marienwerder.			
370.	Aequatio modularis pro transformatione functionum ellipticarum septimi ordinis.	12.	II.	173
	Dr. Haedenkamp, zu Hamm.			
371.	De transformatione integralis $\int\int \frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{\sqrt{(\sin^2\nu - \sin^2\varphi\cos^2\psi)}}$.	20.	II.	97
372.	Auflösung der Aufgaben im 17. Bande S. 389 dieses Journals.	20.	IV.	328
	Dr. F. Heinen, Director des Real-Gymnasiums zu Düsseldorf.			
373.	Lehrsätze.	16.	IV.	374
374.	Problematis analytici, a clar. *Hill* in hujus diarii vol. XVI. pag. 95. propositi solutio.	17.	I.	92
375.	Einiges in Bezug auf den im 11. Bande dieses Journals No. 63. S. 291 aufgestellten Lehrsatz.	18.	II.	176
	Dr. Hesse, zu Königsberg in Preufsen.			
376.	Ueber Oberflächen zweiter Ordnung.	18.	II.	101
377.	De curvis et superficiebus secundi ordinis.	20.	IV.	285
	Dr. C. J. D. Hill, Professor der Mathematik, an der Universität zu Lund in Schweden.			
378.	Exemplum usus functionum iteratarum in theoria functionum integraliter transcendentium	11.	II.	193
379.	Analysis aequationum aliquot, functionis duplicis argumenti (x, y) determinantium, videlicet I. $(x, (y, z)) = ((x, y), z)$, II. $(x, (y, z)) = (y, (y, z))$, III. $(x+y, z) = (x, (y, z))$.	11.	III.	241
380.	De factoribus numerorum compositorum dignoscendis.	11.	III.	251
381.	De radice cubica celeriter extrahenda.	11.	III.	262
382.	Tabula schematum, numeros auxiliares et regulas (ultra trecentas) pro factoribus primis (300 minoribus) (p) agnoscendis idoneas breviter exhibentium. (Vide tom. XI. fasc. 3.)	12.	IV.	355
383.	Aufgaben und Lehrsätze.	16.	I.	95
384.	Formule générale d'intégration indéfinie.	18.	IV.	376
	Dr. C. G. J. Jacobi, Professor der Mathematik an der Universität zu Königsberg in Preufsen.			
385.	Demonstratio formulae $\int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1}\partial w = \frac{\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx \int_0^\infty e^{-x}x^{b-1}dx}{\int_0^\infty e^{-x}x^{a+b-1}\partial x} = \frac{\Gamma a\,\Gamma b}{\Gamma(a+b)}$.	11.	III.	307
386.	De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constant; una cum variis theorematis de transformatione et determinatione integralium multiplicium.	12.	I.	1
387.	De compositione numerorum e quatuor quadratis.	12.	II.	167

		Band.	Heft.	Seite.
388.	De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae.	12.	III.	263
389.	De fractione continua, in quam integrale $\int_0^\infty e^{-xx}\partial x$ evolvere licet.	12.	IV.	346
390.	Auszug aus einem Schreiben an den Herrn Prof. Dr. *J. Steiner* zu Berlin. Mitgetheilt von dem Letztern.	12.	II.	137
391.	De functionibus duarum variabiliam quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur.	13.	I.	55
392.	Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes.	13.	IV.	340
393.	De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium Abelianorum in analysi Diophantea.	13.	IV.	353
394.	Dato systemate n aequationum linearium inter n incognitas, valores incognitarum per integralia definita $(n-1)$ tuplicia exhibentur.	14.	I.	51
395.	Ueber den *Steiner*schen Satz von den Primzahlen im 4ten Hefte des 13ten Bandes dieses Journals.	14.	I.	64
396.	Theoremata nova algebraica circa systema duarum aequationum, inter duas variabiles propositarum.	14.	IV.	281
397.	Zur Theorie der Curven.	14.	I.	56
398.	Formula transformationis integralium definitorum.	15.	I.	1
399.	De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis. .	15.	II.	101
400.	De integralibus quibusdam duplicibus, quae post transformationem variabilium in eandem formam redeunt.	15.	III.	193
401.	Formulae novae in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales.	15.	III.	199
402.	De evolutione expressionis $(l+2l'\cos\varphi+2l''\cos\varphi')^{-n}$ in seriem infinitam secundum cosinus multiplorum utriusque anguli φ, φ' procedentem.	15.	III.	205
403.	De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum vel trium superficierum algebraicarum dati ordinis, simul cum enodatione paradoxi algebraici.	15.	IV.	285
404.	Observationes geometricae.	15.	IV.	309
405.	Nota de erroribus quibusdam geometricis, qui in theoria functionum leguntur.	16.	IV.	342
406.	Demonstratio et amplificatio nova theorematis Gaussiani de quadratura integra trianguli in data superficie e lineis brevissimis formati.	16.	IV.	344
407.	Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differenzial-Gleichungen. (Auszug eines Schreibens desselben vom 29. November 1836 an den Herrn Prof. *Enke*, Secretair der mathematischen Classe der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.)	17.	I.	68
408.	Ueber die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen.	17.	II.	97
409.	Ueber die complexen Primzahlen, welche in der Theorie der Reste der 5ten, 8ten und 12ten Potenzen zu betrachten sind. (Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 12. Mai 1839.)	19.	IV.	314
410.	Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution. (Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 18. April 1839.)	19.	IV.	309

		Band.	Heft.	Seite.
	Dr. Jordann, zu Münster.			
411.	Beweis des Lehrsatzes 12. im 9ten Bande dieses Journals, S. 102, und Bemerkungen zum 10ten Aufsatze im 11ten Bande. . . .	15.	IV.	367
412.	De tabularum functionum hyperbolicarum constructione. . . .	16.	II.	196
	C. Jürgensen, Professor an der Universität zu Copenhagen.			
413.	Note sur une formule de *Laplace*. (Extrait d'une dissertation.)	11.	II.	136
414.	Sur les expressions du reste de la série de *Taylor*.	17.	III.	291
415.	Sur la décomposition d'une certaine classe de fonctions. . . .	19.	I.	84
416.	Sur la sommation des transcendantes à différentielles algébriques.	19.	II.	113
	C. Koppe, Professor zu Soest in Westphalen.			
417.	Von der Lage der Ebenen und Linien im Raume.	14.	I.	70
418.	Ein polyedrischer Satz.	18.	III.	275
	A. Kramer, Stud. phil. zu Berlin.			
419.	Auflösung der 10ten Aufgabe im Anhange zum 1sten Bande des *Steiner*schen Werkes „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit etc."	18.	II.	185
	Dr. E. E. Kummer, Professor zu Liegnitz.			
420.	Sur l'intégration générale de l'équation de Riccati par des intégrales définies.	12.	II.	144
421.	Ueber die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen. .	13.	II.	171
422.	Ueber unendlich verschiedene Entwickelungen der Potenzen der Cosinus und Sinus.	14.	II.	110
423.	Ueber die hypergeometrische Reihe $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\dots$	15. 15.	I. II.	39 127
424.	Eine neue Methode, die numerischen Summen langsam convergirender Reihen zu berechnen.	16.	III.	206
425.	De aequatione $x^{2\lambda}+y^{2\lambda}=z^{2\lambda}$ per numeros integros resolvenda.	17.	III.	203
426.	De integralibus definitis et seriebus infinitis.	17. 17.	III. III.	210 228
427.	Note sur l'intégration de l'équation $\frac{d^ny}{dx^n}=x^m.y$ par des intégrales définies.	19.	III.	286
428.	Sur quelques transformations générales des intégrales définies. .	20.	I.	1
	Lacroix, Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Paris.			
429.	Rapport sur un mémoire de Mr. *Liouville*, concernant une question nouvelle d'analyse.	16.	I.	39
	Lebesque, Professor der Mathematik zu Paris.			
430.	Intégration d'un système d'équations lineaires du n^e ordre. . .	15.	II.	185
	Leithold, Stud. phil. in Berlin.			
431.	Beweis der Lehrsätze No. 40. und 41. im Anhange zum geometrischen Werke des Herrn *Steiner*.	11.	I.	67
	G. Lejeune Dirichlet, Professor der Mathematik an der Universität zu Berlin.			
432.	Sur les intégrales *Eulériennes*.	15.	III.	258
433.	Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles, et qui servent à exprimer des fonctions abitraires entre des limites données.	17.	I.	35

		Band.	Heft.	Seite.
434.	Sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des séries finies ou infinies. Lu à l'Académie des sciences de Berlin le 25. Juin 1835. (Extrait.)	17.	I.	57
435.	Sur la manière de résoudre l'équation $t^2 - pu^2 = 1$ au moyen des fonctions circulaires.	17.	III.	286
436.	Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres. . .	18.	III.	259
437.	Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres. Première partie.	19.	IV.	334

G. Libri, Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Paris.

438.	Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences de tous les ordres. (Lu à l'académie royale des sciences de Paris, le 28. Octobre 1833.)	12.	III.	234
439.	Mémoire sur les intégrales définies aux différences finies. (Lu à l'Académie royale des sciences de Paris, le 8. Juillet 1833.) .	12.	III.	240

Jos. Liouville, Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Paris.

440.	Mémoire sur le théorème des fonctions complémentaires. . . .	11.	I.	1
441.	Mémoire sur une formule d'analyse.	12.	IV.	273
442.	Mémoires sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes.	13.	II.	93
443.	Mémoire sur l'usage que l'on peut faire de la formule de *Fourier*, dans le calcul des différentielles à indices quelconques. . . .	13.	III.	219
444.	Note ajoutée au rapport tom. 16. I. 39 par Mr. *Liouville*. . . .	16.	I.	41

N. Lobatschewsky, recteur de l'université de Cazan.

445.	Géométrie imaginaire.	17.	IV.	295

R. Lobatto, Docteur en sciences et attaché au département de l'intérieur pour les affaires concernant les poids et mesures, à la Haye.

446.	Note sur les différentielles partielles de la fonction $\frac{x}{x^2+y^2}$. .	11.	II.	169
447.	Sur le développement des coefficiens différentiels d'une fonction au moyen de ses différences finies, et réciproquement.	16.	I.	11
448.	Note sur le calcul des momens d'inertie d'un ellipsoïde homogène par rapport à ses trois axes.	16.	I.	76
449.	Sur l'intégration des équations $\frac{d^n y}{dx^n} - xy = 0$, $\frac{d^2 y}{dx^2} + abx^n y = 0$ par des intégrales définies.	17.	IV.	363

S. Löwenstern, Cand. phil. zu Dorpat.

450.	Zwei analytische Abhandlungen.	13.	II.	159 und 168
451.	Einige Sätze aus der Sphärik.	13.	I.	79
452.	Einiges über die Flächen.	13.	II.	163

Band. Heft. Seite.

Dr. R. A. Luchterhandt, Gymnasial-Oberlehrer zu Marienwerder.

453. De transformatione expressionis $\frac{dy}{\sqrt{[\pm(y-\alpha)(y-\beta)(y-\delta)]}}$ in formam simpliciorem $\frac{dx}{M\sqrt{[(1-xx)(1-k^2xx)]}}$, adhibita substitutione $x=\frac{a+a'y+a''y^2}{1+b'y+b''y^2}$ . . . . . 17. III. 248

454. Beweis der Lehrsätze 3. und 4. im 15. Bande S. 374 und 375 und Auflösung der Aufgabe 1. im 14. Bande S. 89 und 79 dieses Journals. . . . . . 18. III. 213

Märcker, Oberlehrer am Gymnasium zu Meiningen.

455. Ueber Primzahlen. . . . . . 20. IV. 350

W. H. Miller, Professor at St. Johns College at Cambridge.

456. To prove that $\frac{n.(n-1).(n-2)\ldots.(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}$ is a whole number when n and r are whole numbers. . . . . . 13. III. 257

457. An investigation of the caustics produced by successive reflexion at spherical surfaces. . . . . . 13. III. 258

Dr. Ferd. Minding zu Berlin.

458. Recherches sur la sommation d'un certain nombre de fonctions transcendantes, dont les dérivées sont déterminées par des équations algébriques du troisième dégré. . . . . . 11. IV. 373

459. Sur la somme des carrés de toutes les droites, qui à partir d'un point donné coupent sous un angle déterminé une courbe algébrique. . . . . . 11. I. 20

460. Beantwortung der im 11. Bande dieses Jourals S. 200 vorgelegten Frage No. 4. . . . . . 12. II. 179

461. Untersuchung betreffend die Frage nach einem Mittelpuncte nicht paralleler Kräfte. . . . . . 14. IV. 289

462. Ueber den Ort sämmtlicher Resultanten eines der Drehung unterworfenen Systemes von Kräften. Als Fortsetzung der Untersuchung über einen Mittelpunct nicht paralleler Kräfte; Band 14. Heft IV. . . . . . 15. I. 27

463. Einige Sätze über die Veränderungen, welche ein System von Kräften durch Drehung derselben erleidet; nebst einer Anwendung auf das Seilpolygon. . . . . . 15. IV. 313

464. Beweis eines geometrischen Satzes. . . . . . 16. IV. 351

465. Ueber die Biegung gewisser Flächen. . . . . . { 18. IV. 297; 18. IV. 365 }

466. Wie sich entscheiden läfst, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind, oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaafse. . . 19. IV. 370

467. Bemerkung über die Wurzeln der algebraischen Gleichungen. . 20. II. 168

468. Ueber einen besondern Fall bei der Abwickelung krummer Flächen. . . . . . 20. II. 171

469. Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen. 20. IV. 323

		Band.	Heft.	Seite.
	A. F. Möbius, Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig.			
470.	Beweis der Gleichung $0^0 = 1$, nach *J. F. Pfaff.*	12.	II.	134
471.	Ueber eine allgemeinere Art der Affinität geometrischer Figuren.	12.	II.	109
472.	Ueber den Mittelpunct nicht paralleler Kräfte.	16.	I.	1
473.	Ueber die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen.	18.	IV.	189
	Dr. A. Müller, Universitäts-Bibliothecar zu Heidelberg.			
474.	Beitrag zur Theorie der Facultäten.	11.	IV.	361
475.	Einfacher Beweis des Gesetzes der gleichförmig beschleunigten Bewegung.	11.	I.	98
476.	Zur Begründung und Erweiterung der Variationsrechnung.	13	III.	240
	Dr. G. W. Müller, Capitain in der Königl. Hannöverischen Artillerie-Brigade.			
477.	Darstellung der Lehre vom Zuge; zur Einleitung in die analytische Geometrie.	15.	III.	229
	Nernst, Vermessungs-Revisor zu Stralsund.			
478.	Lehrsätze.	16.	I.	96
	M. Ohm, Professor an der Universität zu Berlin.			
479.	Etwas über die *Bernoulli*schen Zahlen.	20.	I.	11
	Ostrogradsky, Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Petersburg.			
480.	Mémoire sur le calcul des variations des intégrales multiples. (Lu à l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg le 24 Janvier.)	15.	IV.	332
	Oettinger, Professor der Mathematik zu Freiberg im Br.			
481.	Zur Differenzen Rechnung.	11.	I.	75
		11.	II.	173
		12.	IV.	295
		13.	IV.	292
		13.	IV.	315
		13.	IV.	329
		14.	III.	262
		14.	IV.	330
		15.	III.	264
		15.	IV.	317
		16.	II.	131
	Pagani, Prof. an der Universität zu Löwen.			
482.	Déplacement virtuel d'un système de points unis invariablement entre eux.	11.	IV.	388
483.	Note sur la loi de la réfraction simple.	11.	IV.	351
484.	Sur la forme et le mouvement d'une bulle qui se meut à travers un liquide.	11.	IV.	384
485.	Démonstration d'un théorème de *Lambert.*	12.	IV.	350
486.	Note sur l'attraction des sphéroïdes.	12.	IV.	342
487.	Sur les pressions exercés par un corps pesant qui repose sur plusieurs appuis.	13.	III.	270
488.	Resolution d'un problême rélatif au calcul des variations.	15.	I.	84

		Band.	Heft.	Seite.
489.	Note sur une transformation générale de la formule fondamentale de la mécanique.	17.	III.	243
490.	Mémoire sur l'équilibre d'un corps solide suspendu à un cordon flexible.	19.	III.	185

Jean Plana, professeur de math. et directeur de l'observatoire à Turin.

		Band.	Heft.	Seite.
491.	Recherches analytiques sur les expressions du rapport de la circonférence au diamètre trouvées par *Wallis* et *Brounker*; et sur la théorie de l'intégrale *Eulérienne* $\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^q$. . . .	17. 17. 17.	I. II. IV.	1 163 338
492.	Note, où l'on explique une remarquable objection faite par *Euler* en 1751, contre une règle donnée par *Newton* dans son Arithmétique universelle, pour extraire la racine d'un binome réel de la forme $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, quelque soit le degré impair de la racine demandée, si toutefois elle est possible.	17.	IV.	331
493.	Addition à cette note.	20.	III.	183
494.	Mémoire sur l'expression analytique de la surface totale de l'ellipsoïde dont les trois axes sont inégaux; et sur l'évaluation de la surface d'une voute symmétrique, à la base rectangulaire, retranchée dans la moitié du même ellipsoïde.	17.	IV.	345
495.	Mémoire sur différens procédés d'intégration, par lesquels on obtient l'attraction d'un ellipsoïde homogène dont les trois axes sont inégaux, sur un point extérieur.	20.	III.	189
496.	Note sur l'intégrale $\int\frac{dM}{r}=V$, qui exprime la somme des élémens de la masse d'un ellipsoïde, divisés respectivement par leur distance à un point attiré.	20.	III.	271

Dr. Plücker, Prof. der Mathematik an der Universität zu Bonn.

		Band.	Heft.	Seite.
497.	Analytisch-geometrische Aphorismen.	11. 11. 11. 11.	I. II. III. IV.	26 117 219 356
498.	Solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes.	12.	II.	105
499.	Théorèmes généraux concernants les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'inconnues.	16.	I.	47
500.	Discussion de la forme générale des ondes lumineuses. . . .	19.	I.	1
501.	Note rélatif à ce memoire.	19.	I.	91

Baron Poisson, Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Paris.

		Band.	Heft.	Seite.
502.	Théorèmes relatifs aux intégrales des fonctions algébriques. 1. Décembre 1833.	12.	II.	89
503.	Théorie mathématique de la chaleur. (Cet article est le préambule d'un ouvrage actuellement sous presse, et qui paraîtra incessamment.)	12.	III.	258
504.	Rapport sur un mémoire de Mr. *Liouville*, concernant une question nouvelle d'analyse.	16.	I.	39

		Band.	Heft.	Seite.
	J. V. Poncelet, Bataillons-Chef im Genie-Corps, Professor und Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Paris.			
505.	Application de la méthode des moyennes à la transformation, au calcul numérique et à la détermination des limites du reste des séries. (Mémoire lu à l'académie des sciences de Paris, le lundi 30 Juillet 1833.)	13.	I.	1
506.	Sur la valeur approchée linéaire et rationelle des radicaux de la forme $\sqrt{(a^2+b^2)}$, $\sqrt{(a^2-b^2)}$ etc.	13.	IV.	277
	J. L. Raabe, Professor an der Universität zu Zürich.			
507.	Note zur Theorie der Convergenz und Divergenz der Reihen.	11.	IV.	309
508.	Ueber die Integration der Differentialgleichungen von der Form $dz = Hdx + Kdy + Ldp + Mdq + Ndr +$ etc.	14.	II.	123
509.	Bemerkungen zum Principe der doppelten Substitution bei den elliptischen Functionen.	15.	II.	191
510.	Ueber die Summation periodischer Reihen und die Reduction des Integrals $\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\,dx$.	15.	IV.	355
511.	Zur Theorie der Eingehüllten, Einhüllungs-Flächen, ihrer Characteristiken und der Wendungs-Curven.	15.	II.	125
512.	Bemerkung über Kreisfunctionen.	16.	III.	219
513.	Bemerkungen über eine Stelle in *Lagrange's* „Traité de la résolution des équations numériques, article IV. No. 79."	17.	I.	94
514.	Beiträge zur näherungsweisen Berechnung bestimmter Integrale nach der Methode der Quadraturen.	18.	I.	75
515.	Ueber den Fall, wenn in dem bestimmten Integrale $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ die Function $\varphi(x)$ für einen oder mehrere Werthe von x, welche innerhalb a und b liegen, unendlich groſs oder discontinuirlich wird.	20.	II.	173
	Ramus, Professor zu Copenhagen.			
516.	Solution générale d'un problème d'analyse combinatoire.	11.	IV.	353
517.	Démonstration de la formule générale d'intégration indéfinie proposée par Mr. *Hill.*	19.	II.	117
518.	Remarques sur les fractions continues périodiques. (Extrait d'un mémoire présenté à la société royale des sciences de Copenhague).	20.	I.	13
519.	Theorema geometricum ad trianguli rectilinei theoriam pertinens.	20.	I.	28
	Dr. F. J. Richelot, Professor der Mathematik an der Universität zu Königsberg in Preuſsen.			
520.	De integralibus *Abelianis* primi ordinis commentatio prima.	12.	III.	181
521.	De transformatione integralium *Abelianorum* primi ordinis commentatio.	16. 16.	III. IV.	221 285
	J. Th. Sanio, Professor der Mathematik zu Königsberg in Preuſsen.			
522.	De functionum ellipticarum multiplicatione et transformatione, quae ad numerum parem pertinet, commentatio.	14.	I.	1

		Band.	Heft.	Seite.
	Schaellibaum, Privatlehrer in Berlin.			
523.	Beweis eines vom Herrn Professor Dr. *Steiner* im 1. Hefte des 14. Bandes aufgestellten Lehrsatzes.	16.	I.	82
524.	Auflösung der Aufgabe 1. (links) im Anhange des ersten Bandes der „Systematischen Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten etc." von *J. Steiner*.	18.	II.	127
525.	Ueber die 44ste Aufgabe im Anhange zum ersten Bande des *Steiner*schen Werkes: „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit etc."	18.	II.	134
	Dr. Schellbach, Professor zu Berlin.			
526.	Ueber die *Taylor*sche Reihe; nebst einer Anwendung auf die Zerlegung der algebraischen Brüche.	11.	III.	274
527.	Ueber die Zeichen in der Mathematik.	12. 12.	I. II.	70 148
528.	Ueber die *Gauss*ischen Formeln zur näherungsweisen Berechnung eines bestimmten Integrals.	16.	II.	192
529.	Ueber das Integral der linearen Differenzialgleichungen höherer Ordnungen.	16.	IV.	352
530.	Ueber eine eigenthümliche Entwickelung der Sinus- und Cosinusreihen nach Potenzen des Bogens.	16.	IV.	363
531.	Auflösung der Aufgaben 3. 4. und 5. im 4. Hefte 15. Bandes.	16.	IV.	360
532.	Ueber eine elementare Entwickelungsweise der einfachsten transcendenten Functionen.	17.	IV.	321
	Dr. H. F. Scherk, Professor an der Universität zu Kiel.			
533.	Ueber die allgemeine Entwickelung der ganzen Potenzen des Bogens in Reihen, die nach den aufsteigenden Potenzen des Sinus fortschreiten.	11.	II.	101
534.	Analytisch-combinatorische Sätze.	11.	III.	226
535.	Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen.	13.	III.	185
	Dr. Th. Schönemann, zu Berlin.			
536.	De functionibus quibusdam, quae ad radices aequationum circuli sectionum, sive aequationis $x^p - 1 = 0$ pertinent; rationaliter determinandis.	17.	IV.	372
537.	Ueber die Congruenz $x^2 + y^2 \equiv 1$ (mod. p). (Theorie der trigonometrischen Functionen in Bezug auf Congruenzen.)	19.	II.	93
538.	Theorie der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung. Allgemeine Sätze über Congruenzen; nebst einigen Anwendungen derselben.	19. 19.	III. IV.	231 289
	N. W. Schulze, Lehrer der Mathematik zu Rudolstadt.			
539.	Einiges von Näherungen in der Analysis.	13.	III.	250
	L. C. Schulz v. Strasznicki, Professor der Mathematik am Lyceum zu Laibach.			
540.	Beiträge zur Discussion des *Euler*schen Lehrsatzes von Polyedern, in Beziehung auf die neulich bemerkten Ausnahmen desselben.	14.	II.	83

		Band.	Heft.	Seite.
	Simonoff, Professor an der Universität zu Kasan.			
541.	Sur le magnétisme terrestre.	16.	III.	197
	Dr. L. A. Sohncke, Professor der Mathematik an der Universität zu Halle.			
542.	Aequationes modulares pro transformatione functionum ellipticarum et undecimi et decimi tertii et decimi septimi ordinis. . .	12.	II.	178
543.	Aequationes modulares pro transformatione functionum ellipticarum.	16.	II.	97
	Dr. J. Steiner, Professor der Mathematik an der Universität zu Berlin.			
544.	Démonstration géométrique d'un théorème rélatif à l'attraction d'une couche ellipsoïdique sur un point extérieur.	12.	II.	141
545.	Ein neuer Satz über die Primzahlen.	13.	IV.	356
546.	Aufgaben und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.	13.	IV.	361
547.	Einfache Construction der Tangenten an die allgemeine Lemniscate.	14.	I.	80
548.	Lehrsätze und Aufgaben, erstere zu beweisen, letztere aufzulösen.	14.	I.	88
549.	Aufgaben und Lehrsätze.	15.	IV.	373
550.	Aufgaben und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.	16.	I.	86
551.	Maximum und Minimum des Bogens einer beliebigen Curve, im Verhältniſs zur zugehörigen Abscisse oder Ordinate. (Auszug aus einer am 23. Januar 1837 in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin gehaltenen Vorlesung.)	17.	I.	83
552.	Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze. (Auszug aus einer am 1. December 1836 in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin gehaltenen Vorlesung.)	18.	IV.	281
553.	Aufgaben und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.	18. 18.	III. IV.	278 369
	Dr. Stern, Universitäts-Docent zu Göttingen.			
554.	Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung. (Forsetzung der Abhandlung No. 1., 10., 18. und 30. im vorigen Bande.) .	11. 11. 11. 11.	I. II. III. IV.	33 142 277 311
555.	Lehrsatz.	11.	II.	200
556.	Démonstration de quelques théorèmes sur les nombres. . . .	12.	IV.	288
557.	Note sur la conversion des séries en produits composés d'un nombre infini de facteurs.	12.	IV.	353
558.	Beweis dreier Lehrsätze, mitgetheilt von *Steiner*, Bd. 13. S. 361 und 362; nebst zwei andern Aufgaben.	14.	I.	76
559.	Zur Theorie der Kettenbrüche.	18.	I.	69
560.	Aufgaben.	18.	I.	100
561.	Aufgaben und Lehrsätze.	18.	IV.	375
562.	Sur la valeur d'une série finie.	20.	IV.	321
	F. Strehlke, Oberlehrer am Cöllnischen Real-Gymnasium zu Berlin.			
563.	Zwei mathematische Bemerkungen.	12.	IV.	358
	A. F. Svanberg, Professor zu Stockholm.			
564.	Mémoire sur quelques intégrales définies.	18.	I.	55
	Dr. A. Tellkampf, Professor zu Soest.			
565.	Nova curvas investigandi methodus.	14.	II.	93

		Band.	Heft.	Seite.
	Dr. Umpfenbach, Professor an der Universität zu Giefsen.			
566.	Ueber die Sonderung der Wurzeln einer Gleichung.	20.	I.	60
	Rudolf Wolff, Professor zu Bern.			
567.	Ueber die Fufspunctencurven der Linien zweiten Grades. . . .	20.	I.	88
	Zornow, Professor am Kneiphofschen Gymnasio zu Königsberg in Preufsen.			
568.	De compositione numerorum e cubis integris positivis.	14.	III.	276
	Ungenannte.			
569.	Sur la valeur de 0^0.	11.	III.	272
570.	Théorie des parallèles.	11.	II.	198
571.	Aufgabe.	11.	II.	200
572.	Aufgaben.	11.	III.	308
573.	Bemerkungen zu dem Aufsatze, überschrieben „Beweis der Gleichung $0^0 = 1$ nach *J. F. Pfaff*" Band 12. Heft 2. dieses Journals S. 134. I. Von einem Ungenannten. II. Von dem Verfasser des Aufsatzes No. 25. Band II. dieses Journals.	12.	IV.	292
574.	Zwei Sätze zu beweisen.	16.	I.	95
575.	Recension der „Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen vom Prof. Dr. *L. A. Seeber* zu Freiburg.	20.	IV.	312
	Versohiedenes.			
576.	Ein früher Brief *Lagrange's* an *Laplace*.	20.	IV.	309
577.	Druckfehler Verzeichnifs.	13.	IV.	364
		14.	IV.	380
		15.	IV.	378
		16.	I.	96
		16.	IV.	376
		17.	IV.	392
		18.	IV.	376
		20.	IV.	360

31.

Inhalts-Verzeichnifs II.

der ersten zwanzig Bände des Journals für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben zu Berlin in den Jahren 1826 bis 1840 von *A. L. Crelle;* nach den Gegenständen.

Wenn man diejenigen Zahlen dieses Verzeichnisses II., die gröfser als 323 sind und welche sich auf die Bände 11 bis 20 des Journals beziehen, in dem hier vorhergehenden Verzeichnifs I., und diejenigen Zahlen, welche bis zu 323 reichen und die sich auf die ersten zehn Bände des Journals beziehen, in dem am Ende des zehnten Bandes befindlichen, auf diese 10 Bände des Journals sich beziehenden Verzeichnifs I. aufschlägt, so findet man die Titel der bezeichneten Abhandlungen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

A. Algebra.

Clausen 28, 48, 56, 57. Crelle 66, 68, 69, 70, 341. Dirksen 77. Förstemann 81. Gudermann 102, 103, 365. C. G. J. Jacobi 130, 394, 396, 399, 402, 403, 410. Jordann 412. Jürgensen 159. Köhlau 160. Lejeune Dirichlet 175, 435. Libri 180. Löwenstern 450. Luchterhandt 454. Miller 456. Möbius 470. Ohm 479. Olivier 218, 228. Oettinger 481. Plana 492, 493. Plücker 499. Poncelet 505, 506. Raabe 512. Schellbach 267, 530. Scherk 269. Specht 278, 279. Schulze 539. Steiner 546. Stern 555, 556. Ungenannte 312, 569, 573.

B. Combinatorik.

Beyer 23. Förstemann 350. Gudermann 104. Ramus 516. Scherk 268, 534. Stern 560, 561.

C. Zerlegung der Brüche insbesondere.

Beyer 23. Clausen 58. Crelle 72. Dirksen 75. C. G. J. Jacobi 148. Jürgensen 415. Schellbach 526.

D. Theorie der Zahlen insbesondere.

Abel 20. Brennecke 326. Clausen 33, 57. Crelle 71, 343. S. Germain 87. Grunert 98, 101. Hill 380, 382. Alex. v. Humboldt 125. C. G. J. Jacobi 128, 139, 144, 149, 154, 387, 393, 395, 409. Kummer 425. Lejeune Dirichlet 170, 171, 172, 173, 177, 178, 435, 436, 437. Libri 183, 184, 185. Luchterhandt 454. Märker 455. Minding 202. Scherk 272. Schönemann 536, 537, 538. Stein 280. Steiner 545, 546. Stern 294, 297, 301, 556, 558, 560, 561 Ungenannte 314, 316, 318, 575. Zornow 568.

E. Kettenbrüche insbesondere.

Clausen 29, 36. C. G. J. Jacobi 389. Löwenstern 450. Möbius 212. Ramus 518. Stern 295, 296, 299, 554, 558. Ungenannte 574.

F. Theorie der Gleichungen insbesondere.

Abel 2, 16. Bouniakowsky 24. Burg 26. Clausen 36. Collins 338, Crelle 340. F. Deahna 344. Dirksen 347. Fischer 348. Förstemann 352.

Gaufs 85. Gräffe 91. Grunert 93. Hill 117, 118, 121, 381. C. G. J. Jacobi 127, 150, 392. Libri 186. Liouville 188. F. Minding 467. Olivier 219, 221, 226. Raabe 513. Richelot 263. Schönemann 538 Schulze 539. Stern 298. F. Strehlke 563. Umpfenbach 566. Ungenannte 312.

G. Analytische Facultäten insbesondere.

Clausen 55. Crelle 70. Gudermann 359. C. G. J. Jacobi 385. Lejeune Dirichlet 432. Liouville 441. A. Müller 474.

H. Interpolation insbesondere.

Clausen 39. Dirksen 76. Olivier 226.

I. Theorie der Functionen insbesondere.

Abel 1, 10, 12, 18. Clausen 35. Crelle 70. Gudermann 365. Heinen 374. Hill 378, 379, 383. C. G. J. Jacobi 130, 153, 155, 388, 391, 393, 396, 405. Jordann 412. Jürgensen 159, 413, 416. Kummer 422. Lamé et Clapeyron 162, 163. Libri 179. 182, 187, 438. Liouville 440, 442. Luchterhandt 453. Magnus 192. Minding 458. Nernst 478. Olivier 224, 227. Raabe 512. Ramus 258. Richelot 520, 521. Schellbach 526, 532. Schönemann 536.

K. Reihen insbesondere.

Abel 3, 5, 11. 20. Bretschneider 328. Burg 25. Clausen 30, 31, 37, 41, 53, 59. Crelle 66, 68, 69, 70. Dirksen 77. Grunert 94. Gudermann 102, 103, 107, 110. Hill 120 C. G. J. Jacobi 388, 402. Jürgensen 159, 413, 414. Köhlau 160. Kummer 421, 422, 423, 424, 426. Lamé et Clapeyron 162, 163. Lejeune Dirichlet 175, 433, 434, 436. Libri 180. Möbius 214. Nernst 216, 478. M. Ohm 479. Olivier 225, 227, 228, 229. Oettinger 481. Poncelet 505. Raabe 507, 510. Schellbach 526, 530, 532. Scherk 269, 270, 533. v. Schmidten 275. Scholtz 276. Stern 300, 560, 562.

L. Differenzial- und Integral-Rechnung.

Abel 4, 12, 18, 20. Bretschneider 328. Broch 329. Brooke 330. Clausen 36. 44, 56. F. Deahna 345. Grunert 99. Gudermann 358, 364. Haedenkamp 371. Hill 119, 121, 378, 383, 384. C. G. J. Jacobi 126, 132, 133, 134, 135, 137, 149, 155, 156, 385, 386, 389, 391, 400, 402, 407, 408. Jürgensen 416. Kummer 420. Lacroix 429. Lamé et Clapeyron 162, 163. Lebesque 430. Lejeune Dirichlet 432, 437. Libri 438, 439. Liouville 441, 442, 443, 444. Lobatto 190, 191, 446, 447, 449. Luchterhandt 453. Minding 200, 203, 204, 205, 458. A. Müller 476. Oettinger 481. Ostrogradsky 480. Pagani 488. Plana 491, 495, 496. Poisson 502, 504. Raabe 508, 510, 515. Ramus 258, 517. Richelot 264, 520, 521. Sauer 265. Schellbach 529. Scherk 271. v. Schmidten 274.

M. Bestimmte Integrale insbesondere.

Abel 8. C. G. J. Jacobi 394, 398. Kummer 426, 427, 428. Lejeune Dirichlet 174, 434. Libri 439. Liouville 441. Lobatto 449. Raabe 514, 515. Schellbach 528. Svauberg 564.

N. Elliptische Functionen insbesondere.

Abel 9, 13, 14, 15, 17, 19. Gudermann 363, 366, 367, 369. Gützlaff 370. Haedenkamp 371. C. G. J. Jacobi 138, 140, 141, 142, 143, 145, 146, 147, 151, 152, 393, 401, 410. Lejeune Dirichlet 432. Luchterhandt 453. Raabe 509. Richelot 262. Sanio 522. Sohnke 542, 543.

2. Geometrie.

A. Elementar-Geometrie.

August 324. Bauer 325. Brune 331, 332, 333. Clausen 60. Crelle 342. Förstemann 81, 551. Gerling 353. Gerwien 89, 90. Grüson 92. Grunert 95, 97. Gudermann 106, 110. Hessel 116. C. G. J. Jacobi 145. Koppe 417, 418. Lehmus 168. Möbius 206, 207, 208. Olivier 220, 222, 223. Raabe 254. Ramus 519. Remy 259, 260. v. Renthe 261. Scheerer 266. Schulz v. Strasznicki 540. Specht 278, 279. Steiner 285, 288, Strehlke 302. Unger 304. Ungenannte 311, 313, 315, 320, 570.

B. Goniometrie und Trigonometrie.

Clausen 28, 36. Crelle 69. Dirksen 77. Olivier 218, 227. Schellbach 267. Scherk 269. Scholtz 276. Specht 278, 279.

C. Sphärik und sphärische Trigonometrie.

Bretschneider 327. Clausen 43. Crelle 339. Feldt 80. Gerwien 90, 354. Gudermann 105, 109, 110, 357, 359, 360, 361, 368. Jordann 411. Löwenstern 451. Raabe 252. Remy 259. Richelot 262. Schmeifser 273. Steiner 286.

D. Synthetische Geometrie.

Aubert 22. Bauer 325. Clausen 50, 336. Dippe 346. Eberty 78. Förstemann 81. Gerwien 89, 90, 355. Grunert 96, 97. Gudermann 108. Heinen 375. Hessel 116. C. G. J. Jacobi 390, 397, 404. Koppe 417. Kramer 419. Leithold 431. Magnus 193. Minding 199. Möbius 210, 215. Poncelet 248, 249, 250. Schällibaum 523, 524, 525. Schellbach 531. Steiner 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553. Wolff 567. Zornow 306. Ungenannte 319.

E. Analytische Geometrie.

Beyer 23 Bruun 335. Clausen 32, 34, 38, 46, 48, 49, 57. Dippe 346. Fischer 348. Förstemann 81. Frankenheim 83. Garbinsky 84. St. Germain 88. Grunert 95, 100, 356. Gudermann 108, 358, 360. Hachette 111, 112, 113. Haedenkamp 372. Heinen 114, 373, 375. Hellerung 115. Hesse 376, 377. Hessel 116. Horn 124. C. G. J. Jacobi 129, 131, 145, 390, 397, 403, 404, 405, 406, 410. Kummer 422. Lehmus 168. Lejeune Dirichlet 435. Littrow 189. Lobatschewsky 445. Löwenstern 452. Luchterhandt 454. Magnus 194, 195, 196. Minding 198, 199, 201, 459, 464, 465, 466, 468, 469. Möbius 206, 207, 208, 210, 215, 471. G. W. Müller 477. Olivier 222. Plana 491, 494, 495, 496. Plücker 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 497, 498. Poisson 243, 244. Raabe 254, 255, 256, 257, 511. v. Renthe 261. Scheerer 266. Schellbach 530, 531, 532. Scherk 533, 535. Schönemann 536. Stern 557. Strehlke 302. Fr. Strehlke 563. Tellkampf 565. Unger 304, 305. Zornow 306. Ungenannte 310, 313, 315, 317, 319, 572.

F. Von einzelnen Curven und Flächen.

Bruun 335. Clausen 337. Horn 122, 123. Lehmus 166. Möbius 471. Raabe 251.

3. Mechanik.

A. Statik und Dynamik.

Abel 6, 7. Burg 26. Clausen 42, 45. Cournot 61, 62. Crelle 64. Gaufs 86. Kossack 161. Lamé et Clapeyron 164. Lehmann 165. Lehmus 167, 169. Lobatto 448. Minding 460, 461, 462, 463. Möbius 209, 213,

472, 473. Oltmanns 231. Pagani 482, 486, 487, 489, 490. Plana 495, 496. Poncelet 246. Sohnke 277. Rapport sur un ouvrage de Mr. Ostrograsky 321. Steiner 544. Ungenannte 571, 572.

B. Hydrostatik und Hydrodynamik.

Brooke 330. Eytelwein 79. Lacroix 429. Lehmus 167. Liouville 444. A. Müller 475. Oltmanns 230. Pagani 484, 488. Poisson 242, 503, 504. Plücker 500, 501. v. Steinheil 293. Theremin 303. Prix de l'académie de St. Petersbourg année 1831, 322.

II. Angewandte Mathematik.

A. Astronomie.

Clausen 47, 51, 52, 54. Gudermann 362, 368. C. G. J. Jacobi 136. Littrow 189. Pagani 485. Raabe 253. Sohncke 277. Rapport sur un ouvrage de Mr. Ostrograsky 321. Prix des académies de St. Petersbourg et Berlin 322, 323.

B. Chronologie.

Jahn 158. Matzka 197.

C. Optik.

v. Forstner 349. Miller 457. Möbius 211, 212. Pagani 483.

D. Theorie der Maschinen.

Clausen 40. Crelle 63, 65. Dietlein 73, 74. M. H. Jacobi 157. Lehmus 169. G. S. Ohm 217. Poncelet 246, 247. Ungenannte 309.

E. Theorie der Wärme.

Lejeune Dirichlet 176. Libri 181.

Verschiedenes.

Abel 21. Brune 334. Crelle 67. Poisson 245. Schellbach 527. Simonoff 541. Aufgaben von Ungenannten 307. Nachrichten von Büchern 308. Lagrange 576. Druckfehler-Verzeichnisse 577.

Inhaltsverzeichnifs
des zwanzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite
1.	Sur quelques transformations générales des intégrales définies. Par *E. E. Kummer*, Dr. phil. à Liegnitz en Silésie.	I.	1
2.	Etwas über die Bernoullischen Zahlen.	I.	11
3.	Remarques sur les fractions continues périodiques. Par Mr. *C. Ramus*, prof. des Mathém. à Copenhague. (Extrait d'un mémoire présenté à la société royale des sciences de Copenhague.)	I.	13
5.	Démonstration élémentaire du théorème de Wilson généralisé. Par l'éditeur. .	I.	29
6.	Bemerkungen über eine Stelle in Lagrange's Traité de la résolution des équations numériques, article IV. No. 79. Von dem Herrn Prof. *Raabe* zu Zürich.	I.	57
7.	Ueber die Sonderung der Wurzeln einer Gleichung. Von Herrn Dr. *Umpfenbach* zu Giefsen.	I.	60
8.	Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale. Von Herrn Dr. *Gudermann* zu Münster. (Fortsetzung der Abhandlung No. 1. im 1sten, No. 10. im 2ten, No. 15. im 3ten, No. 21. im 4ten Hefte des achtzehnten, No. 2. im 1sten, No. 8. im 2ten, No. 12. im 3ten Hefte des neunzehnten Bandes.) . .	I.	62
12.	Fortsetzung dieser Abhandlung.	II.	103
10.	De transformatione integralis $\iint \frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{\sqrt{(\sin^2 \nu - \sin^2\varphi \cos^2\psi)}}$. Auctore *Haedenkamp*, Hamm. Guestph.	II.	97
13.	Bemerkung über die Wurzeln der algebraischen Gleichungen. Von Herrn Dr. *Ferd. Minding* zu Berlin.	II.	168
15.	Ueber den Fall, wenn in dem bestimmten Integrale $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ die Function $\varphi(x)$ für einen oder mehrere Werthe von x, welche innerhalb a und b liegen, unendlich grofs oder discontinuirlich wird. Von Herrn *J. L. Raabe* in Zürich.	II.	173
16.	Sur quelques propriétés d'une certaine classe de fonctions transcendantes. Par Mr. *O. J. Broch*, Candidatus philosophiae à Christiania.	II.	178
17.	Mémoire sur différens procédés d'intégration, par lesquels on obtient l'attraction d'un ellipsoïde homogène dont les trois axes sont inégaux, sur un point extérieur. Par Mr. *J. Plana* à Turin.	III.	189
18.	Note sur l'intégrale $\int \frac{dM}{r} = V$, qui exprime la somme des élémens de la masse d'un ellipsoïde, divisés respectivement par leur distance à un point attiré. Par Mr. *J. Plana* à Turin.	III.	271
19.	Addition à la Note de Mr. *Plana*, intitulée „Note, où l'on explique une remarquable objection faite par Euler en 1751 etc."	III.	283

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
22.	Recension der „Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von *Ludwig August Seeber*, Dr. der Philosophie, ordentl. Professor an der Universität in Freiburg. 1831. 248 S. in 4." (Mit Genehmigung des Herrn Verfassers aus den Göttingischen gelehrten Anzeigen vom Jahre 1831, 108tes Stück, abgedruckt.)	IV.	312
23.	Sur la valeur d'une série finie. Par Mr. *Stern* à Göttingue.	IV.	321
27.	Neuer Beweis für die Auflösbarkeit der algebraischen Gleichungen durch reelle oder imaginäre Werthe der Unbekannten. Von Herrn Dr. *F. Deahna* zu Cassel in Hessen.	IV.	337
28.	Ueber die Bedingungen der Integrabilität linearer Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen einer beliebigen Anzahl veränderlicher Gröſsen. Von Herrn Dr. *F. Deahna* zu Cassel in Hessen.	IV.	340
29.	Ueber Primzahlen. Von Herrn Gymnasiallehrer *Märcker* zu Meiningen.	IV.	350

2. Geometrie.

4.	Theorema geometricum ad trianguli rectilinei theoriam pertinens. Scripsit *C. Ramus*, professor matheseos in universitate Hafniensi.	I.	28
9.	Ueber die Fuſspunctencurven der Linien zweiten Grades. Von Herrn *Rudolf Wolf* zu Zürich.	I.	88
14.	Ueber einen besondern Fall bei der Abwickelung krummer Flächen. Von Herrn Dr. *Minding* zu Berlin.	II.	171
17.	Mémoires sur différens procédés d'intégration, par lesquels on obtient l'attraction d'un ellipsoïde homogène dont les trois axes sont inégaux, sur un point extérieur. Par Mr. *J. Plana* à Turin.	III.	189
18.	Note sur l'intégrale $\int \frac{dM}{r} = V$, qui exprime la somme des élémens de la masse d'un ellipsoïde, divisés respectivement par leur distance à un point attiré. Par Mr. *J. Plana* à Turin.	III.	271
20.	De curvis et superficiebus secundi ordinis. Auctore Dr. *Ottone Hesse*. Regiom.	IV.	285
24.	Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen. Von Herrn Dr. *Ferd. Minding* zu Berlin.	IV.	323
25.	Auflösung der Aufgaben im im 17. Bande S 389 dieses Journals. Von Herrn Dr. *Haedenkamp* zu Hamm.	IV.	328
26.	Fragment über die Begründung des Begriffs der Ebene. Von Herrn Professor *Gerling* in Marburg.	IV.	332

3. Mechanik.

17.	Mémoires sur différens procédés d'intégration, par lesquels on obtient l'attraction d'un ellipsoïde homogène dont les trois axes sont inégaux, sur un point extérieur. Par Mr. *J. Plana* à Turin.	III.	189
18.	Note sur l'intégrale $\int \frac{dM}{r} = V$, qui exprime la somme des élémens de la masse d'un ellipsoïde, divisés respectivement par leur distance à un point attiré. Par Mr. *J. Plana* à Turin.	III.	271

II. Anwendung der Mathematik.

11.	Ueber den innern Grund der Erscheinung der Aberration des Lichtes. Von Herrn Freiherrn *v. Forstner*, Königl. Preuſs. Hauptmanne zu Berlin.	II.	101

III. Verschiedenes.

21.	Ein früherer Brief *Lagrange's* an *Laplace*.	IV.	309

Zum vorigen Heft S. 61 gehörig.

3.

3.

Crelle, Jou

P'

P_1

STORAGE ARE